فصل ۳ : الگوهای غیر خطی

کتاب: ریاضی و آمار ۳

تهیه کننده: آزاده حاجی هاشمی

دبیر ریاضی: ناحیه ۲ اهواز

اسفند ۱۳۹۸

پیامبر اکرم (ص) می فرماید:

هر کسی به «لذّت» فراگیری، ساعتی صبر نکند،

تا ابد در «ذلّت» نادانی بماند.

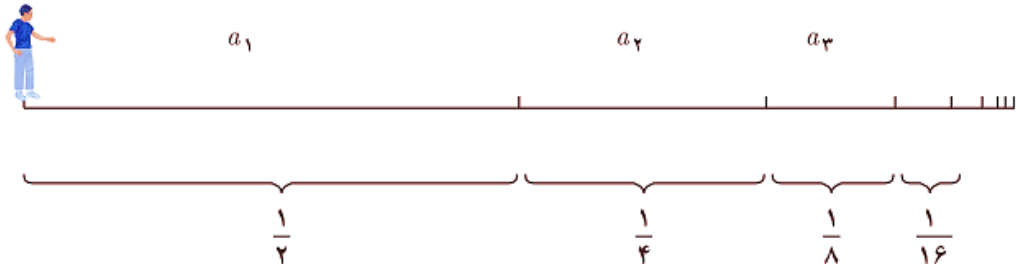
دکتر درس

درس ۱ دنبالهٔ هندسی

آیا ممکن است پس از پایان کلاس ریاضی امروز و شنیدن صدای زنگ تفریح، هنگامی که از جای خود بلند می شوید و بدون توقف به سمت در کلاس حرکت می کنید هیچ گاه به در خروجی نرسید؟

این مسئله ای است که «زنو» فیلسوف یونانی، بیش از دو هزار سال پیش مطرح کرد و به پارادکس زنو معروف است. او چنین استدلال کرد:

زمانی که از جای خود بلند می شوید تا به در خروجی برسید ابتدا نصف مسافت تا در خروجی را طی می کنید و سپس نصف مسیر باقی مانده را طی می کنید و به همین ترتیب، نصف مسیر باقی مانده و ... و این روند همیشه ادامه خواهد داشت.



بنابراین، هیچ گاه به در خروجی نخواهد رسید! زیرا هر چند هر کدام از فاصله ها نصف فاصلهٔ پیشین است، هیچ کدام از این فاصله ها صفر نخواهد شد و همواره مسافتی وجود دارد که باید طی شود.

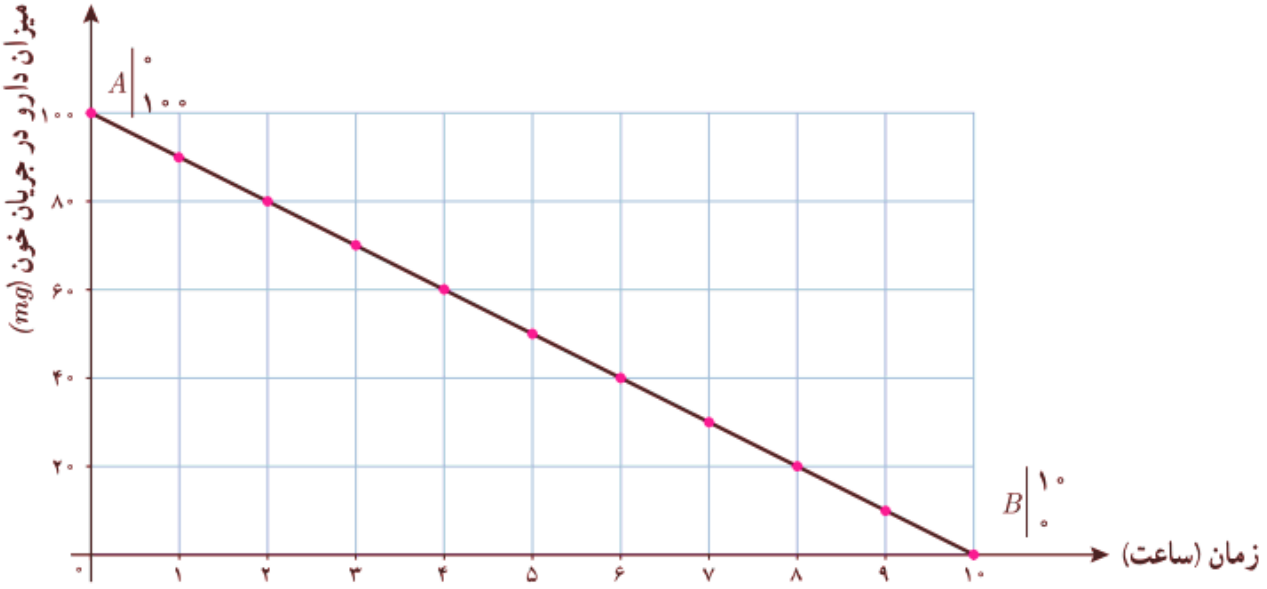
به بیان دیگر، اگر با سرعتی ثابت بخواهیم بدون توقف در کلاس به در خروجی برسیم و فرض کنیم برای طی مسافت a_1 زمان t لازم بوده است پس برای طی مسافت a_2 به زمان $\frac{t}{2}$ نیاز داریم و ... بنابراین:

زمان رسیدن به در خروجی کلاس $T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \ldots$

و چون جملات دنباله ... , $\frac{t}{4}$, $\frac{t}{2}$, t هیچ گاه صفر نمی شوند، پس T ازمجموع بی شمار جمله تشکیل شده است؛ از این رو مقدار T نیز بی نهایت خواهد بود!

بیش از دو هزار سال زمان نیاز بود تا به این تناقض پاسخ قطعی داده شود. حل این مسئله در ریاضی به ایجاد شاخه ای به نام «سری های هندسی و محاسبهٔ مجموع آنها» انجامید که در ادامهٔ این درس برخی از مفاهیم آن را بیان خواهیم کرد. با بیان این مفاهیم، نگرانی شما نیز حل می شود و در می یابید که چرا به در خروجی کلاستان خواهید رسید.

تمرین ۱ : پس از مصرف بعضی از داروها ، مادهٔ مؤثر آنها با سرعتی ثابت از خون حذف می شود. اگر فرض کنیم بدن یک شخص پس از مصرف ۱۰۰ میلی گرم از داروی A در هر ساعت ۱۰ میلی گرم آن را حذف کند، نمایش دنبالهٔ کاهشی زیر بیانگر میزان داروی موجود در بدن این شخص از لحظهٔ مصرف دارو تا لحظهٔ تمام شدن دارو در جریان خون این شخص است.



الف) ضابطهٔ تابعی دنباله با استفاده از نمودار رسم شده را بدست آورید.

حل: با استفاده از دو نقطه $(۱۰,۰)$ *و* $(۰,۱۰۰)$ *شیب خط و سپس ضابطهٔ آن را بدست می آوریم:*

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \quad \Rightarrow \quad m=\frac{۰-۱۰۰}{۱۰-۰}=\frac{-۱۰۰}{۱۰}=-۱۰$$

$$y=m(x-x_A)+y_A \quad \Rightarrow \quad y=-۱۰(x-۰)+۱۰۰ \quad \Rightarrow \quad y=-۱۰x+۱۰۰$$

ب) جملهٔ عمومی این دنبالهٔ حسابی را بدست آورید.

حل:

$$a_۱=۱۰۰-۱۰=۹۰ \qquad d=-۱۰$$

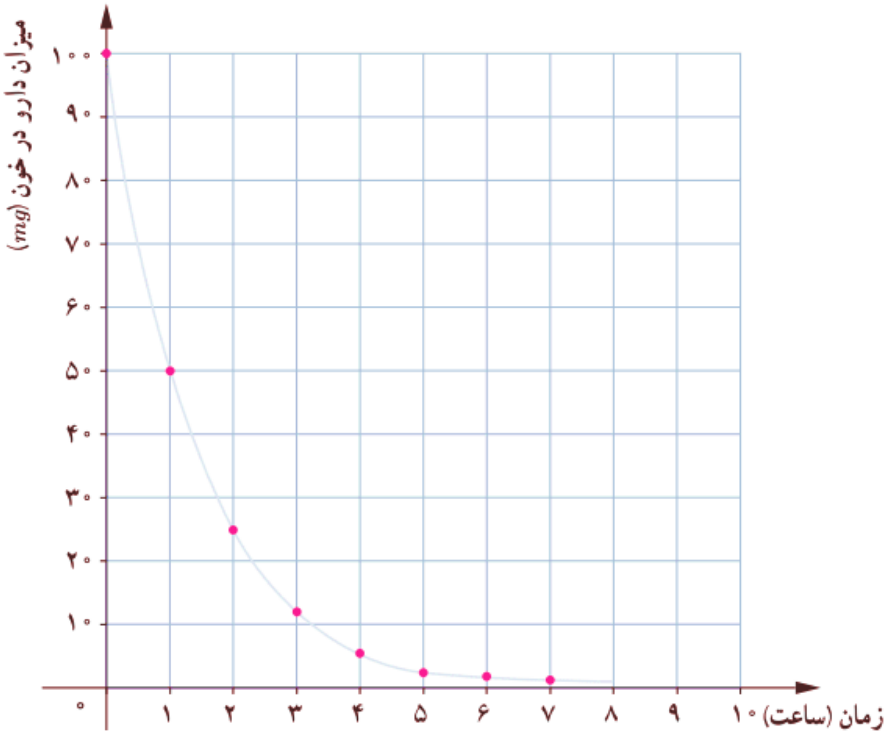
$$a_n=a_۱+(n-۱)d \quad \Rightarrow \quad a_n=۹۰+(n-۱)(-۱۰)=۹۰-۱۰n+۱۰ \quad \Rightarrow \quad a_n=-۱۰n+۱۰۰$$

نکته

میزان حذف دارو و مادهٔ مؤثر آن در خون عموماً ، مانند مثال بالا، با سرعت ثابت از جریان خون حذف نمی شود و در تعداد زیادی از داروها مادهٔ مؤثر یک دارو با توجه به «نیمه عمر مادهٔ مؤثر» دارو در بدن کاهش می یابد.

نیمه عمر: مدت زمانی است که میزان یک ماده به نصف میزان اولیه کاهش می یابد. نیمه عمر یک دارو را با $t_{\frac{۱}{۲}}$ نمایش می دهند.

تمرین ۲ : شخصی ۱۰۰ میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. نمودار «میزان دارو در خون – زمان» در شکل زیر آمده است.



الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر، کمتر از ۲۰ میلی گرم خواهد بود؟ آیا می توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟

حل: پس از سه نیمه عمر – غیر زیرا با افزایش زمان میزان دارو کم و کمتر می شود بطوریکه می توان آن را ناچیز حساب کرد، اما صفر نمی شود.

ب) اگر a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از n اُمین نیمه عمر باشد، رابطهٔ بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

حل: با توجه به تعریف دنباله a_n و نیز تعریف نیمه عمر ، هر جملهٔ دنباله از حاصل ضرب عدد ثابت $\frac{۱}{۲}$ در جملهٔ پیشین بدست می آید؛ یعنی:

$$a_۱ = ۵۰ \qquad a_{n+۱} = \frac{۱}{۲} a_n$$

پ) جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

حل:

$$a_۱ = ۵۰ \qquad a_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۵۰ \qquad a_۳ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲} \times ۵۰\right) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ \times ۵۰ \qquad a_۴ = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ \times ۵۰$$

$$a_n = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\boxed{n-۱}} \times ۵۰$$

دنبالهٔ هندسی

به دنباله هایی از اعداد که هر جملهٔ شان به جز جملهٔ اول، از ضرب یک عدد ثابت (مخالف صفر) در جملهٔ قبلی به دست می آید، «دنبالهٔ هندسی» گفته می شود. عدد ثابت را «نسبت مشترک» می نامند و با r نشان می دهند.

یک دنبالهٔ هندسی، دنباله ای به صورت : $a \neq 0$, $r \neq 0$

$$a\ ,ar\ ,ar^{2}\ ,ar^{3}\ ,...$$

است که در آن a جمله اول و عدد ثابت r « نسبت مشترک» جملات دنباله است.

جملهٔ nام این دنباله را به صورت معرفی می شود: $a_n = ar^{n-1}$

تمرین ۳ : جدول زیر را کامل کنید.

جملهٔ عمومی دنباله	ضابطهٔ بازگشتی	پنج جملهٔ اول	نسبت مشترک	جملهٔ اول
$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$, $a_1 = 1$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$r = \frac{1}{3}$	$a_1 = 1$
$a_n = \frac{1}{81}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$, $a_1 = \frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}, \frac{1}{54}, \frac{1}{36}, \frac{1}{24}, \frac{1}{16}$	$r = \frac{3}{2}$	$a_1 = \frac{1}{81}$
$a_n = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)a_n$, $a_1 = 4$	$4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$r = -\frac{1}{2}$	$a_1 = 4$
$a_n = 1\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$, $a_1 = 1$	$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$	$r = \frac{1}{5}$	$a_1 = 1$
$a_n = 100\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$, $a_1 = 100$	$100, 25, \frac{25}{4}, -\frac{25}{16}, \frac{25}{64}$	$r = \frac{1}{4}$	$a_1 = 100$
$a_n = 3(2)^{n-1}$	$a_{n+1} = 2a_n$, $a_1 = 3$	$3, 6, 12, 24, 48$	$r = 2$	$a_1 = 3$

تمرین ۴ : با توجه جدول تمرین قبل ، در هر دنبالهٔ هندسی $a_n = ar^{n-1}$ به صورت با فرض $a > 0$:

الف) اگر $0 < r < 1$ ، دنبالهٔ a_n ، ☐ افزایشی ☐ کاهشی ☐ ثابت است. حل: *کاهشی*

ب) اگر $r > 1$ ، دنبالهٔ a_n ، ☐ افزایشی ☐ کاهشی ☐ ثابت است. حل: *افزایشی*

پ) اگر $r = 1$ ، دنبالهٔ a_n ، ☐ افزایشی ☐ کاهشی ☐ ثابت است. حل: *ثابت*

تمرین ۵ : ضابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ هندسی $a , ar , ar^2 , ar^3 , \ldots$ را مشخص کنید.

حل: $a_1 = a \quad , \quad a_{n+1} = ra_n$

تمرین ۶ : در دنباله های هندسی زیر نسبت مشترک را مشخص کنید، دو جملهٔ بعدی را بنویسید و سپس جملهٔ عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف) ۲ , ۶ , ۱۸ , ۵۴ , ۱۶۲ , ۴۸۶ , ... حل: $r = 3$ $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

ب) ۵ , ۱۰ , ۲۰ , ۴۰ , ۸۰ , ۱۶۰ , ... حل: $r = 2$ $b_n = 5 \times 2^{n-1}$

پ) ۶ , −۶۰ , ۶۰۰ , −۶۰۰۰ , ۶۰۰۰۰ , −۶۰۰۰۰۰ , ... حل: $r = -10$ $c_n = 6 \times (-10)^{n-1}$

ت) ۴ , ۲ , ۱ , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... حل: $r = \frac{1}{2}$ $d_n = 4 \times (\frac{1}{2})^{n-1}$

تمرین ۸ : جاهای خالی را در دنباله های هندسی زیر پر کنید.

الف) ۴ , ۲۰ , ۱۰۰ , ۵۰۰ , ۲۵۰۰ حل: $r = \frac{20}{4} = 5$

ب) ۷ , ۲۱ , ۶۳ , ۱۸۹ حل: $r = \frac{189}{63} = 3$

تمرین ۹ : شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینهٔ استهلاک این یخچال هر سال معادل ٪۱۰ ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر در سال nاُم باشد:

الف) ضابطهٔ تابعی دنبالهٔ v_n را بدست آورید.

حل: با توجه به هزینهٔ استهلاک ٪۱۰، ارزش یخچال فریزر در هر سال ٪۹۰ سال قبل خواهد بود؛ یعنی:

$$v_۱ = ۹۶۰۰۰۰ \qquad v_۲ = ۹۶۰۰۰۰ \times \frac{۹۰}{۱۰۰} \qquad v_۳ = \left(۹۶۰۰۰۰ \times \frac{۹۰}{۱۰۰}\right) \times \frac{۹۰}{۱۰۰} = ۹۶۰۰۰۰ \times \left(\frac{۹۰}{۱۰۰}\right)^۲$$

$$v_n = ۹۶۰۰۰۰ \times \left(\frac{۹۰}{۱۰۰}\right)^{n-۱} \quad \Rightarrow \quad v_n = ۹۶۰۰۰۰ \times \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{n-۱}$$

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟

حل: با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال ٪۱۰ کاهش می یابد، هرچه ارزش آن بیشتر باشد میزان ٪۱۰ آن بیشتر خواهد بود. بنابراین در $v_۲$ کاهش ارزش یخچال فریزر بیشتر است.

خیر - زیرا هرچه زمان می گذرد این کاهش کم و کمتر می شود.

پ) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر می شود؟ ضابطهٔ v_n را به گونه ای بنویسید که ارزش یخچال پس از ده سال صفر شود. دنبالهٔ v_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟

حل: چون ٪۱۰ هر عدد غیر صفر، صفر نمی شود.

میزان کاهش باید ثابت باشد.

دنبالهٔ حسابی است. $v_n = ۹۶۰۰۰۰ - ۹۶۰۰۰n$

ت) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

حل: با توجه به قیمت خرید اولیه که ۹۶۰۰۰۰ تومان است ، پس نصف ارزش آن ۴۸۰۰۰۰ تومان است بنابراین باید نخستین عدد n را که در نامساوی $v_n < ۴۸۰۰۰۰$ صدق می کند، بدست آوریم.

$$v_n < ۴۸۰۰۰۰ \Rightarrow ۹۶۰۰۰۰ \times \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{n-۱} < ۴۸۰۰۰۰ \Rightarrow \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{n-۱} < \frac{۴۸۰۰۰۰}{۹۶۰۰۰۰} \Rightarrow \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{n-۱} < \frac{۱}{۲}$$

$n=۱ \Rightarrow \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۱-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۱ \not< ۰/۵$	$n=۵ \Rightarrow \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۵-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۶۵۶۱ \not< ۰/۵$
$n=۲ \Rightarrow \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۲-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۹ \not< ۰/۵$	$n=۶ \Rightarrow \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۶-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۵۹۰۴۹ \not< ۰/۵$
$n=۳ \Rightarrow \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۳-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۸۱ \not< ۰/۵$	$n=۷ \Rightarrow \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۷-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۵۳۱۴۴۱ \not< ۰/۵$
$n=۴ \Rightarrow \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۴-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۷۲۹ \not< ۰/۵$	$n=۸ \Rightarrow \left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{۸-۱} < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۴۷۸۲۹۶۹ < ۰/۵$

پس طبق جدول $n > ۷$ باشد.

ث) باتوجه به قسمت های ب و پ تفاوت حالتی که جملات دنباله در هر مرحله، k کسر شود، با حالتی که k درصد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنبالهٔ حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنبالهٔ هندسی است؟

حل: زمانی که k واحد کسر شود ممکن است یکی از جملات دنباله صفر شود.

دنباله یک دنبالهٔ حسابی با ضابطهٔ بازگشتی $v_{n+۱} = v_n - k$ می شود.

اما زمانی که k درصد کسر شود مقدار جملات کم وکمتر می شود اما هیچ گاه صفر نمی شود.

دنباله یک دنبالهٔ هندسی با ضابطهٔ بازگشتی $v_{n+۱} = v_n - \left(\frac{k}{۱۰۰} \times v_n\right)$ می شود.

تمرین ۱۰ : طبق آزمایش های انجام شده، نیمه عمر مادّهٔ کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه عمر یا چند ساعت یک شخص می تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه میزان کافئین در بدن کمتر از ۰/۵ میلی گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی شود.)

حل: با توجه به قیمت مقدار اولیه که ۸۰ میلی گرم است ، پس : $r = \frac{۱}{۲}$, $a_۱ = ۸۰ \Rightarrow a_n = ۸۰ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}$

$$۸۰ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱} < ۰/۵ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱} < \frac{۰/۵}{۸۰} \Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱} < ۰/۰۰۶۲۵$$

$n=۱$	$\Rightarrow$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱-۱} < ۰/۰۰۶۲۵$	$\Rightarrow$	$۱ \not< ۰/۰۰۶۲۵$
$n=۲$	$\Rightarrow$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲-۱} < ۰/۰۰۶۲۵$	$\Rightarrow$	$۰/۵ \not< ۰/۰۰۶۲۵$
$n=۳$	$\Rightarrow$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳-۱} < ۰/۰۰۶۲۵$	$\Rightarrow$	$۰/۲۵ \not< ۰/۰۰۶۲۵$
$n=۴$	$\Rightarrow$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴-۱} < ۰/۰۰۶۲۵$	$\Rightarrow$	$۰/۱۲۵ \not< ۰/۰۰۶۲۵$
$n=۵$	$\Rightarrow$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵-۱} < ۰/۰۰۶۲۵$	$\Rightarrow$	$۰/۰۶۲۵ \not< ۰/۰۰۶۲۵$
$n=۶$	$\Rightarrow$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶-۱} < ۰/۰۰۶۲۵$	$\Rightarrow$	$۰/۰۳۱۲۵ \not< ۰/۰۰۶۲۵$
$n=۷$	$\Rightarrow$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۷-۱} < ۰/۰۰۶۲۵$	$\Rightarrow$	$۰/۰۱۵۶۲۵ \not< ۰/۰۰۶۲۵$
$n=۸$	$\Rightarrow$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۸-۱} < ۰/۰۰۶۲۵$	$\Rightarrow$	$۰/۰۰۷۸۱۲۵ \not< ۰/۰۰۶۲۵$
$n=۹$	$\Rightarrow$	$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۹-۱} < ۰/۰۰۶۲۵$	$\Rightarrow$	$۰/۰۰۳۹۵۰۶۲۵ < ۰/۰۰۶۲۵$

پس طبق جدول $n > ۸$ باشد. یعنی بعد هشت نیمه عمر یا پس از ۴۸ ساعت مقدار کافئین کمتر از ۰/۵ می شود.

تمرین ۱۱ : جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $-۵ , -۲۰ , -۸۰ , \ldots$ را به دست آورید.

حل:

$$r = \frac{-۲۰}{-۵} = ۴ \qquad a_n = -۵ \times (۴)^{n-۱}$$

تمرین ۱۲ : یازدهمین جمله از دنبالهٔ هندسی $۳ , ۶ , ۱۲ , \ldots$ را به دست آورید.

حل:

$$r = \frac{۶}{۳} = ۲ \qquad a_n = ۳ \times (۲)^{n-۱}$$

$$a_{۱۱} = ۳ \times (۲)^{۱۱-۱} = ۳ \times (۲)^{۱۰} = ۳ \times ۱۰۲۴ = ۳۰۷۲$$

دکتر درس آزاده حاجی هاشمی
دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز

تمرین ۱۳ : با توجه به مفهوم دنبالهٔ هندسی و نسبت مشترک جملات دنبالهٔ هندسی ثابت کنید هرگاه c و b و a سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آنگاه $a\times c=b^{۲}$. (b را واسطهٔ هندسی میان a و c می نامند.)

حل: طبق تعریف دنبالهٔ هندسی داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{b}{a}=r\\ \frac{c}{b}=r\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \frac{b}{a}=\frac{c}{b}\quad\Rightarrow\quad a\times c=b^{۲}$$

تمرین ۱۴ : اگر اعداد ۵۶ و x و ۱۴ از چپ به راست جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند. مقدار x را محاسبه کنید.

حل:

$$x^{۲}=۱۴\times ۵۶\quad\Rightarrow\quad x^{۲}=۷۸۴\quad\Rightarrow\quad x=۲۸$$

تمرین ۱۵ : اگر اعداد $x+۳$ و x و $x-۴$ از چپ به راست جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند. مقدار x را محاسبه کنید.

حل:

$$x^{۲}=(x-۴)\times(x+۳)\quad\Rightarrow\quad \cancel{x^{۲}}=\cancel{x^{۲}}+۳x-۴x-۱۲\quad\Rightarrow$$

$$۰=-x-۱۲\quad\Rightarrow\quad x=-۱۲$$

تمرین ۱۶ : میان دو عدد a و b ، n عدد را طوری قرار می دهیم که جملات دنبالهٔ شروع از a و ختم به b یک دنبالهٔ هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله های هندسی از رابطهٔ $r^{n+۱}=\frac{b}{a}$ به دست می آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات $(n+۲)$ جمله است.)

حل: اگر دنباله $a,\underbrace{\ldots,\ldots,\ldots}_{n\text{ عدد}},b$ به صورت باشد یعنی $(n+۲)$اُمین جملهٔ این دنبالهٔ هندسی عدد b است پس طبق جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی داریم:

$$a_n=ar^{n-۱}\quad\Rightarrow\quad b=a_{n+۲}=ar^{(n+۲)-۱}=ar^{n+۱}\quad\Rightarrow\quad \frac{b}{a}=\frac{ar^{n+۱}}{a}\quad\Rightarrow\quad \frac{b}{a}=r^{n+۱}$$

می توان از فرمول زیر نیز برای بدست آوردن نسبت مشترک استفاده کرد.

$$r^{m-n}=\frac{a_m}{a_n}$$

تمرین ۱۷ : بین ۳ و ۴۸ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند.

حل:

$$\underset{a_1}{۳}\ ,\ .....\ ,\ .....\ ,\ .....\ ,\ \underset{a_5}{۴۸} \qquad a_1 = ۳ \ , \ a_5 = ۴۸$$

$$r^{۵-۱} = \frac{۴۸}{۳} \Rightarrow r^۴ = ۱۶ \Rightarrow \begin{cases} r = ۲ \\ r = -۲ \end{cases}$$

$$r = ۲ \Rightarrow ۳\ ,\ \boxed{۶}\ ,\ \boxed{۱۲}\ ,\ \boxed{۲۴}\ ,\ ۴۸ \quad \text{یا} \quad r = -۲ \Rightarrow ۳\ ,\ \boxed{-۶}\ ,\ \boxed{۱۲}\ ,\ \boxed{-۲۴}\ ,\ ۴۸$$

تمرین ۱۸ : جاهای خالی را پر کنید که در هر مورد یک دنبالهٔ هندسی حاصل شود.

الف) $۱۰, \square, ۴۰۰۰$

حل:

$$\underset{a_1}{۱۰}\ ,\ .....\ ,\ \underset{a_3}{۴۰۰۰} \qquad r^{۳-۱} = \frac{۴۰۰۰}{۱۰} \Rightarrow r^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow \begin{cases} r = ۲۰ \\ r = -۲۰ \end{cases}$$

$$r = ۲۰ \Rightarrow ۱۰\ ,\ \boxed{۲۰۰}\ ,\ ۴۰۰۰ \quad \text{یا} \quad r = -۲۰ \Rightarrow ۱۰\ ,\ \boxed{-۲۰۰}\ ,\ ۴۰۰۰$$

ب) $۱۰, \square, \square, ۸۰۰۰۰$

حل:

$$\underset{a_1}{۱۰}\ ,\ .....\ ,\ .....\ ,\ \underset{a_4}{۸۰۰۰۰} \qquad r^{۴-۱} = \frac{۸۰۰۰۰}{۱۰} \Rightarrow r^۳ = ۸۰۰۰ \Rightarrow r = ۲۰$$

$$r = ۲۰ \Rightarrow ۱۰\ ,\ \boxed{۲۰۰}\ ,\ \boxed{۴۰۰۰}\ ,\ ۸۰۰۰۰$$

پ) $۴, \square, \square, \square, \square, ۹۷۲$

حل:

$$\underset{a_1}{۴}\ ,\ .....\ ,\ .....\ ,\ .....\ ,\ .....\ ,\ \underset{a_6}{۹۷۲} \qquad r^{۶-۱} = \frac{۹۷۲}{۴} \Rightarrow r^۵ = ۲۴۳ \Rightarrow r = ۳$$

$$r = ۳ \Rightarrow ۴\ ,\ \boxed{۱۲}\ ,\ \boxed{۳۶}\ ,\ \boxed{۱۰۸}\ ,\ \boxed{۳۲۴}\ ,\ ۹۷۲$$

دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز — دکتر درس

تمرین ۱۹ : در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ پنجم ۱۶۲ و جملهٔ دوم ۶ می باشد.

الف) نسبت مشترک این دنباله را محاسبه کنید.

حل: $a_۲ = ۶ \quad , \quad a_۵ = ۱۶۲ \qquad r^{۵-۲} = \frac{۱۶۲}{۶} \Rightarrow r^۳ = ۲۷ \Rightarrow r = ۳$

ب) جملهٔ اول این دنباله را تعیین کنید.

حل: $a_۵ : \quad a \times ۳^۴ = ۱۶۲ \Rightarrow ۸۱a = ۱۶۲ \Rightarrow a = \frac{۱۶۲}{۸۱} \Rightarrow a = ۲$

پ) جملهٔ عمومی این دنباله را بنویسید.

حل: $a_n = ۲ \times (۳)^{n-۱}$

تمرین ۲۰ : در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ پنجم عدد ۸۰ و جملهٔ هشتم عدد ۶۴۰ است. جملهٔ دوازدهم این دنباله را به دست آورید.

حل:

$a_۵ = ۸۰ \quad , \quad a_۸ = ۶۴۰ \qquad r^{۸-۵} = \frac{۶۴۰}{۸۰} \Rightarrow r^۳ = ۸ \Rightarrow r = ۲$

راه اول : $a_۵ : \quad a \times ۲^۴ = ۸۰ \Rightarrow ۱۶a = ۸۰ \Rightarrow a = \frac{۸۰}{۱۶} \Rightarrow a = ۵$

$$a_{۱۲} = ۵ \times ۲^{۱۱} = ۵ \times ۲۰۴۸ = ۱۰۲۴۰$$

راه دوم : *بدون بدست آوردن جملهٔ اول* $a_{۱۲} = a \times r^{۱۱} = a \times r^۷ \times r^۴ = a_۸ \times r^۴ = ۶۴۰ \times ۲^۴ = ۶۴۰ \times ۱۶ = ۱۰۲۴۰$

تمرین ۲۱ : در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ اول عدد ۷ و جملهٔ چهارم عدد ۱۸۹ است. جملهٔ هشتم این دنباله را به دست آورید.

حل: $a_۱ = ۷ \quad , \quad a_۴ = ۱۸۹ \qquad r^{۴-۱} = \frac{۱۸۹}{۷} \Rightarrow r^۳ = ۲۷ \Rightarrow r = ۳$

$$a_۸ = ۷ \times ۳^۷ = ۷ \times ۲۱۸۷ = ۱۵۳۰۹$$

تمرین ۲۲ : برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلو درد عفونی است، پزشک معالج قرص های آنتی بیوتیک حامل ۸۰ میلی گرم آنتی بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه عمر این آنتی بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین ، این قرص ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه بار و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.

تعداد مصرف n	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n (میلی گرم)
۱	۱۵ بهمن	بامداد ۰۰:۰۰	$S_1 = ۸۰$
۲	۱۵ بهمن	صبح ۰۸:۰۰	$S_2 = \frac{1}{2}S_1 + ۸۰ = ۴۰ + ۸۰ = ۱۲۰$
۳	۱۵ بهمن	بعدازظهر ۱۶:۰۰	$S_3 = \frac{1}{2}S_2 + ۸۰ = ۶۰ + ۸۰ = \boxed{۱۴۰}$
۴	۱۶ بهمن	بامداد ۰۰:۰۰	$S_4 = \frac{1}{2}S_3 + ۸۰ = \boxed{۷۰} + ۸۰ = \boxed{۱۵۰}$
۵	۱۶ بهمن	صبح ۰۸:۰۰	$S_5 = \frac{1}{2}S_4 + ۸۰ = \boxed{۷۵} + ۸۰ = \boxed{۱۵۵}$
۶	۱۶ بهمن	بعدازظهر ۱۶:۰۰	$S_6 = \frac{1}{2}S_5 + ۸۰ = \boxed{۷۷/۵} + ۸۰ = \boxed{۱۵۷/۵}$

ب) با یک «رابطهٔ بازگشتی» میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.

حل:

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n + \boxed{۸۰} \quad , \quad S_1 = \boxed{۸۰}$$

پ) آیا می توانید میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه ای مشخص کنید؟(ضابطهٔ تابعی دنباله)

حل:

$$S_1 = A$$

$$S_2 = \frac{1}{2}S_1 + A = \frac{1}{2}A + A$$

$$S_3 = \frac{1}{2}S_2 + A = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}A + A) + A = (\frac{1}{2})^2 A + (\frac{1}{2})A + A$$

به همین صورت برای S_6 محاسبه می شود:

$$S_6 = (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^4 A + (\frac{1}{2})^3 A + (\frac{1}{2})^2 A + (\frac{1}{2})A + A$$

دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز — دکتر درس

پس برای محاسبهٔ مجموع آنتی بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف:

$$S_n = (\frac{۱}{۲})^{n-۱}A + \ldots + (\frac{۱}{۲})^۲A + (\frac{۱}{۲})A + A \qquad \text{رابطهٔ (۱)}$$

اگر طرفین رابطهٔ (۱) را در ضریب $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنیم:

$$\frac{۱}{۲}S_n = (\frac{۱}{۲})^n A + \ldots + (\frac{۱}{۲})^۳A + (\frac{۱}{۲})^۲A + (\frac{۱}{۲})A \qquad \text{رابطهٔ (۲)}$$

با تفاضل رابطهٔ (۱) از رابطهٔ (۲) رابطهٔ زیر به دست می آید:

$$S_n - \frac{۱}{۲}S_n = \left((\frac{۱}{۲})^{n-۱}A + \ldots + (\frac{۱}{۲})^۲A + (\frac{۱}{۲})A + A\right) - \left((\frac{۱}{۲})^n A + \ldots + (\frac{۱}{۲})^۳A + (\frac{۱}{۲})^۲A + A(\frac{۱}{۲})\right)$$

$$S_n - \frac{۱}{۲}S_n = A - (\frac{۱}{۲})^n A \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{۲}S_n = A\left(۱ - (\frac{۱}{۲})^n\right) \quad \Rightarrow \quad S_n = ۲A\left(۱ - (\frac{۱}{۲})^n\right)$$

ت) با جایگذاری مقادیر $n=۱$ تا $n=۶$ در رابطهٔ به دست آمده در قسمت پ، صحت اعداد به دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

حل:

$$S_n = ۲A\left(۱ - (\frac{۱}{۲})^n\right) \qquad A = ۸۰ \quad \Rightarrow \quad ۲A = ۱۶۰$$

$$S_n = ۱۶۰\left(۱ - (\frac{۱}{۲})^n\right)$$

$$S_۱ = ۱۶۰\left(۱ - (\frac{۱}{۲})^۱\right) = ۱۶۰ \times \frac{۱}{۲} = ۸۰$$

$$S_۲ = ۱۶۰\left(۱ - (\frac{۱}{۲})^۲\right) = ۱۶۰\left(۱ - \frac{۱}{۴}\right) = ۱۶۰ \times \frac{۳}{۴} = \boxed{۸۰}$$

$$S_۳ = ۱۶۰\left(۱ - (\frac{۱}{۲})^۳\right) = ۱۶۰\left(۱ - \frac{۱}{۸}\right) = ۱۶۰ \times \frac{۷}{۸} = \boxed{۱۴۰}$$

$$S_۴ = ۱۶۰\left(۱ - (\frac{۱}{۲})^۴\right) = ۱۶۰\left(۱ - \frac{۱}{۱۶}\right) = ۱۶۰ \times \frac{۱۵}{۱۶} = \boxed{۱۵۰}$$

$$S_۵ = ۱۶۰\left(۱ - (\frac{۱}{۲})^۵\right) = ۱۶۰\left(۱ - \frac{۱}{۳۲}\right) = ۱۶۰ \times \frac{۳۱}{۳۲} = \boxed{۱۵۵}$$

$$S_۶ = ۱۶۰\left(۱ - (\frac{۱}{۲})^۶\right) = ۱۶۰\left(۱ - \frac{۱}{۶۴}\right) = ۱۶۰ \times \frac{۶۳}{۶۴} = \boxed{۱۵۷/۵}$$

مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی

اگر جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی، به صورت $a_n = ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \qquad r \neq 1$$

از رابطهٔ روبرو به دست می آید: $S_n = \dfrac{a - a_n r}{1 - r}$ یا $S_n = a \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

تمرین ۲۲ : در تمرین قبل:

الف) مقادیر a و r را مشخص کنید.

حل: $a = 80 \quad , \quad r = \dfrac{1}{2}$

ب) ضابطه های دنباله های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنای a_3 و S_3 چیست؟

حل: $a_n = 80\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \quad , \quad S_n = 80\left(\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)$

S_3: مجموع میزان باقی مانده بعد از سه بار مصرف قرص یا ۲۴ ساعت.

a_3: میزان باقی مانده از قرص اول بعد از سه بار مصرف قرص یا ۲۴ ساعت

تمرین ۲۳ : در دنبالهٔ هندسی روبرو: $6, 12, 24, 48, \ldots$

الف) جملهٔ یازدهم را حساب کنید.

حل: $a_{11} = 6 \times (2)^{10} = 6 \times 1024 = 6144$

ب) مجموع ده جملهٔ اول را نیز حساب کنید.

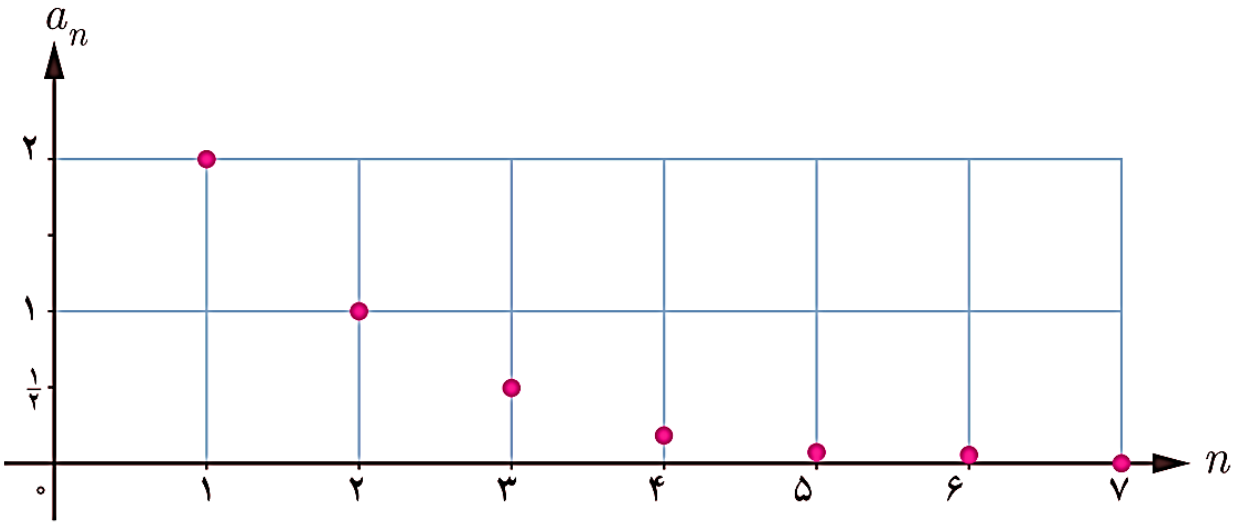
حل: $S_{10} = 6\left(\dfrac{1-(2)^{10}}{1-2}\right) = 6\left(\dfrac{1-1024}{-1}\right) = 6\left(\dfrac{-1023}{-1}\right) = 6 \times 1023 = 6138$

دکتر درس آزاده حاجی هاشمی
دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز

تمرین ۲۴ : جدول زیر را کامل کنید.

جملات دنباله	جملهٔ اول	نسبت مشترک	S_n مجموع n جملهٔ اول
$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۶}, \frac{۱}{۱۸}, \frac{۱}{۵۴}, \ldots$	$a_۱ = \frac{۱}{۲}$	$r = \frac{۱}{۳}$	$S_۵ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱-(\frac{۱}{۳})^۵}{۱-(\frac{۱}{۳})}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\frac{۲۴۲}{۲۴۳}}{\frac{۲}{۳}}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲۴۲}{۲۴۳}\times\frac{۳}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱۲۱}{۸۱} = \frac{۱۲۱}{۱۶۲}$
			$S_{۱۰} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱-(\frac{۱}{۳})^{۱۰}}{۱-(\frac{۱}{۳})}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\frac{۵۹۰۴۸}{۵۹۰۴۹}}{\frac{۲}{۳}}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۵۹۰۴۸}{۵۹۰۴۹}\times\frac{۳}{۲}\right) = \frac{۱۴۷۶۲}{۱۹۶۸۳}$
$\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۱۶}, \frac{۱}{۶۴}, \ldots$	$a = \frac{۱}{۴}$	$r = \frac{۱}{۴}$	$S_۴ = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱-(\frac{۱}{۴})^۴}{۱-(\frac{۱}{۴})}\right) = \frac{۱}{۴}\left(\frac{\frac{۲۵۵}{۲۵۶}}{\frac{۳}{۴}}\right) = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۲۵۵}{۲۵۶}\times\frac{۴}{۳}\right) = \frac{۸۵}{۲۵۶}$
			$S_۸ = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱-(\frac{۱}{۴})^۸}{۱-(\frac{۱}{۴})}\right) = \frac{۱}{۴}\left(\frac{\frac{۶۵۵۳۵}{۶۵۵۳۶}}{\frac{۳}{۴}}\right) = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۶۵۵۳۵}{۶۵۵۳۶}\times\frac{۴}{۳}\right) = \frac{۲۱۸۴۵}{۶۵۵۳۶}$
$\frac{۲}{۵}, \frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۱۰}, \ldots$	$a = \frac{۲}{۵}$	$r = \frac{۱}{۲}$	$S_۳ = \frac{۲}{۵}\left(\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^۳}{۱-(\frac{۱}{۲})}\right) = \frac{۲}{۵}\left(\frac{\frac{۷}{۸}}{\frac{۱}{۲}}\right) = \frac{۲}{۵}\left(\frac{۷}{۸}\times\frac{۲}{۱}\right) = \frac{۷}{۱۰}$
			$S_۹ = \frac{۲}{۵}\left(\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^۹}{۱-(\frac{۱}{۲})}\right) = \frac{۲}{۵}\left(\frac{\frac{۵۱۱}{۵۱۲}}{\frac{۱}{۲}}\right) = \frac{۲}{۵}\left(\frac{۵۱۱}{۵۱۲}\times\frac{۲}{۱}\right) = \frac{۵۱۱}{۶۴۰}$
$\frac{۲}{۵}, ۲, ۱۰, \ldots$	$a = \frac{۲}{۵}$	$r = ۵$	$S_۶ = \frac{۲}{۵}\left(\frac{۱-(۵)^۶}{۱-(۵)}\right) = \frac{۲}{۵}\left(\frac{۱-۱۵۶۲۵}{-۴}\right) = \frac{\not{۲}}{۵}\left(\frac{۱۵۶۲۴}{\not{۴}_{۲}}\right) = \frac{۱۵۶۲۴}{۱۰} = ۱۵۶۲/۴$
			$S_۳ = \frac{۲}{۵}\left(\frac{۱-(۵)^۳}{۱-(۵)}\right) = \frac{۲}{۵}\left(\frac{۱-۱۲۵}{-۴}\right) = \frac{\not{۲}}{۵}\left(\frac{۱۲۴}{\not{۴}_{۲}}\right) = \frac{۱۲۴}{۱۰} = ۱۲/۴$

تمرین ۲۵ : نمودار زیر یک دنبالهٔ هندسی را مشخص می کند. با نوشتن سه جملهٔ اول آن و محاسبهٔ نسبت مشترک دنبالهٔ هندسی:



الف) جملهٔ عمومی دنباله را مشخص کنید.

حل:

$$۲, ۱, \frac{۱}{۲}, \ldots \qquad r = \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad a_n = ۲ \times (\frac{۱}{۲})^{n-۱}$$

ب) حاصل $S_{۱۰}$ را به دست آورید.

حل:

$$S_{۱۰} = ۲\left(\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰}}{۱-(\frac{۱}{۲})}\right) = ۲\left(\frac{۱-\frac{۱}{۱۰۲۴}}{-\frac{۱}{۲}}\right) = ۲\left(\frac{-\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}}{-\frac{۱}{۲}}\right) = ۲\left(\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴} \times \frac{۲}{۱}\right) = \frac{۱۰۲۳}{۲۵۶}$$

تمرین ۲۶ : مجموع جملات دنبالهٔ هندسی $۷, ۲۱, ۶۳, ۱۸۹, \ldots, ۵۱۰۳$ را به دست آورید.

حل:

$$۷, ۲۱, ۶۳, ۱۸۹, \ldots, ۵۱۰۳$$

$$a_۱ = ۷ \quad , \quad r = \frac{۲۱}{۷} = ۳ \quad , \quad a_n = ۵۱۰۳$$

$$S_n = \frac{a - ra_n}{۱-r}$$

$$S_n = \frac{۷ - ۳ \times ۵۱۰۳}{۱-۳} = \frac{۷ - ۱۵۳۰۹}{-۲} = \frac{-۱۵۳۰۲}{-۲} = ۷۶۵۱$$

فصل ۳

دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز حاجی هاشمی دکتر درس

تمرین ۲۷ : مجموع جملات دنبالهٔ هندسی $۱۲۰, ۶۰, ۳۰, ۱۵, \ldots, \frac{۱۵}{۱۶}$ را به دست آورید.

حل:

$$a_n = \frac{۱۵}{۱۶} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{۶۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۲} \qquad ۱۲۰, ۶۰, ۳۰, ۱۵, \ldots, \frac{۱۵}{۱۶}$$

$$S_n = \frac{۱۲۰ - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۵}{۱۶}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = \frac{۱۲۰ - \frac{۱۵}{۳۲}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{۳۸۴۰ - ۱۵}{۳۲}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{۳۸۲۵}{۳۲}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۳۸۲۵}{۳۲} \times \frac{۲}{۱} = \frac{۳۸۲۵}{۱۶}$$

تمرین ۲۸ : در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ اول $\frac{۱۱}{۸}$ و نسبت مشترک این دنبالهٔ هندسی ۲ است:

الف) جملهٔ چندم این دنباله برابر ۱۷۶ است؟

حل:

$$a = \frac{۱۱}{۸} \quad , \quad r = ۲ \qquad a_n = \frac{۱۱}{۸} \times ۲^{n-۱}$$

$$\frac{۱۱}{۸} \times ۲^{n-۱} = ۱۷۶ \quad \Rightarrow \quad ۲^{n-۱} = ۱۷۶ \times \frac{۸}{۱۱} \quad \Rightarrow \quad ۲^{n-۱} = ۱۲۸ \quad \Rightarrow \quad ۲^{n-۱} = ۲^{۷}$$

$$\Rightarrow \quad n - ۱ = ۷ \quad \Rightarrow \quad n = ۸$$

ب) مجموع جملات این دنباله از $\frac{۱۱}{۸}$ تا ۱۷۶ را بدست آورید؟

حل:

$$S_n = \frac{\frac{۱۱}{۸} - ۲ \times ۱۷۶}{۱ - ۲} = \frac{\frac{۱۱}{۸} - ۳۵۲}{-۱} = \frac{\frac{۱۱ - ۲۸۱۶}{۸}}{-۱} = \frac{\frac{-۲۸۰۵}{۸}}{-۱} = \frac{۲۸۰۵}{۸}$$

تکلیف خانه : در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ اول ۷ و جملهٔ هفتم آن ۴۴۸ مجموع جملات این دنباله از ۷ تا ۴۴۸ را بدست آورید.

درس ۲ ریشهٔ nاُم و توان گویا

یادآوری: در سال های پیش خوانده ایم که :

$۶+۶+۶+۶=۴\times۶$ $\qquad$ $۵+۵+۵+۵+۵+۵+۵=۷\times۵$

نکته جمع عددهای مثل هم تبدیل به ..... می شود. به صورتی که یکی از آن عددها در تعدادشان ضرب می شود.

$۶\times۶\times۶\times۶=۶^{۴}$ $\qquad$ $۵\times۵\times۵\times۵\times۵\times۵\times۵=۵^{۷}$

نکته ضرب عددهای مثل هم تبدیل به ..... می شود. به صورتی که یکی از آن عددها را به عنوان پایه و تعدادشان را به عنوان توان نوشته می شود.

تاکنون با مفهوم توان های صحیح اعداد و نحوهٔ ریشه گیری دوم و سوم آنها آشنا شده اید.

۹ و -۹ ریشه های دوم عدد ۸۱ هستند. $\Rightarrow$ $(-۹)\times(-۹)=(-۹)^{۲}=۸۱$, $۹\times۹=۹^{۲}=۸۱$

۲ ریشهٔ سوم عدد ۸ است. $\Rightarrow$ $۲\times۲\times۲=۲^{۳}=۸$

در این درس ضمن مرور آنچه تا کنون دربارهٔ اعداد توان دار و ریشه های دوم و سوم اعداد یاد گرفته اید، با مفهوم ریشه های چهارم و پنجم و ... اعداد حقیقی و نحوهٔ محاسبه آنها آشنا خواهید شد.

تمرین ۲۹ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $۴^{۳}=۶۴$ $\qquad$ ب) $۲^{-۷}=\frac{۱}{۲^{۷}}=\frac{۱}{۱۲۸}$

پ) $\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۴}=\frac{۱۶}{۶۲۵}$ $\qquad$ ت) $۷۳^{۱}=۷۳$

ث) $(-۳)^{۶}=۷۲۹$ $\qquad$ ج) $-۳^{۶}=-۷۲۹$

چ) $(۰/۰۱)^{۵}=۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱$ $\qquad$ ح) $\left(۱\frac{۱}{۲}\right)^{۰}=۱$

تمرین ۳۰ : حاصل هر یک از عبارت های زیر را به صورت یک عدد تواندار بنویسید و در جدول در جای مناسب قرار دهید.

(m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفر هستند.)

الف) $(-۳۶)^۷ \div ۹^۷ = \left(\frac{-۳۶}{۹}\right)^۷ = (-۴)^۷$

ب) $(۲/۱)^۶ \times (\frac{۲۱}{۱۰}) \times (۲\frac{۱}{۱۰})^۴ = (۲/۱)^۶ \times (۲/۱) \times (۲/۱)^۴ = (۲/۱)^{۱۱}$

پ) $(-۴)^۳ \times (-۵)^۳ = (-۴ \times -۵)^۳ = ۲۰^۳$

ت) $(\frac{۴}{۷})^۵ \div (\frac{۴}{۷})^۸ = (\frac{۴}{۷})^{-۳} = (\frac{۷}{۴})^۳$

ث) $(۱۰^۶)^۸ = ۱۰^{۴۸}$

رابطه	مثال
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$(۲/۱)^۶ \times (\frac{۲۱}{۱۰}) \times (۲\frac{۱}{۱۰})^۴ = (۲/۱)^{۱۱}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(\frac{۴}{۷})^۵ \div (\frac{۴}{۷})^۸ = (\frac{۴}{۷})^{-۳} = (\frac{۷}{۴})^۳$
$a^m \times b^m = (ab)^m$	$(-۴)^۳ \times (-۵)^۳ = (-۴ \times -۵)^۳ = ۲۰^۳$
$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	$(-۳۶)^۷ \div ۹^۷ = \left(\frac{-۳۶}{۹}\right)^۷ = (-۴)^۷$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(۱۰^۶)^۸ = ۱۰^{۴۸}$

تمرین ۳۱ : مانند نمونه برای هر یک از رابطه ها یا مثال های زیر مثال یا رابطه متناظر بنویسید.

رابطه	مثال
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$۵^۷ \times ۵^۸ = ۵^{۷+۸} = ۵^{۱۵}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$۹^{۱۰} \div ۹^۶ = ۹^{۱۰-۶} = ۹^۴$
$a^m \times b^m = (ab)^m$	$۳^۷ \times ۴^۷ = ۱۲^۷$
$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	$۳۰^۴ \div ۳^۴ = ۱۰^۴$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(۲^۳)^۴ = ۲^{۳\times۴} = ۲^{۱۲}$

همان طور که می دانید، اگر a یک عدد حقیقی باشد $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر ریشه های دوم عدد a همان ریشه های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 = a$ هستند. همچنین ریشهٔ سوم عدد حقیقی مانند a ریشهٔ معادلهٔ $x^3 = a$ هستند.

مثال: ریشه های دوم عدد ۱۶ همان ریشه های معادلهٔ $x^2 = ۱۶$ می باشند و چون $(-۴)^2 = ۱۶$, $۴^2 = ۱۶$ پس ۴ و -۴ یا $\sqrt{۱۶}$ و $-\sqrt{۱۶}$ ریشه های دوم عدد ۱۶ هستند.

مثال: ریشهٔ سوم عدد ۲۷ همان ریشهٔ معادلهٔ $x^3 = ۲۷$ می باشند که برابر عدد ۳ است.

و با همین استدلال

ریشه های چهارم عدد ۱۶ همان ریشه های معادلهٔ $x^4 = ۱۶$ می باشند. پس $\boxed{۲}$ و $\boxed{-۲}$ ریشه های چهارم عدد ۱۶ هستند.

ریشهٔ پنجم عدد -۳۲ همان ریشهٔ معادلهٔ $x^5 = -۳۲$ می باشند که برابر عدد $\boxed{-۲}$ است.

ریشه های ششم عدد ۶۴ همان ریشه های معادلهٔ $\boxed{۶۴} = x^6$ می باشند. پس $\boxed{۲}$ و $\boxed{-۲}$ ریشه های ششم عدد ۶۴ هستند.

عدد (a)	۶۴	-۶۴
ریشه های چهارم	$\sqrt[4]{۶۴}$ و $-\sqrt[4]{۶۴}$	وجود ندارد
$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[4]{۶۴}$	وجود ندارد
ریشهٔ پنجم	$\sqrt[5]{۶۴}$	$\sqrt[5]{-۶۴}$
$\sqrt[5]{a}$	$\sqrt[5]{۶۴}$	$\sqrt[5]{-۶۴}$
ریشه های ششم	$\sqrt[6]{۶۴} = ۲$ و $-\sqrt[6]{۶۴} = -۲$	وجود ندارد
$\sqrt[6]{a}$	$\sqrt[6]{۶۴} = ۲$	وجود ندارد
ریشهٔ هفتم	$\sqrt[7]{۶۴}$	$\sqrt[7]{-۶۴}$
$\sqrt[7]{a}$	$\sqrt[7]{۶۴}$	$\sqrt[7]{-۶۴}$

اگر $n \geq ۲$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشهٔ nاُم عدد a می نامیم. هرگاه: $b^n = a$

همچنین $\sqrt[n]{a}$ ، وقتی n زوج است ریشهٔ nاُم مثبت عدد a است.

دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز حاجی هاشمی دکتر درس

$\sqrt[8]{25}$ و $-\sqrt[8]{25}$ ریشه های هشتم عدد ۲۵	$a=25$ $n=8$	دو ریشهٔ nاُم عدد a و $\sqrt[n]{a}$ $-\sqrt[n]{a}$	زوج n	$a>0$
$\sqrt[3]{5}$ ریشهٔ سوم عدد ۵	$a=5$ $n=3$	ریشهٔ nاُم عدد a $\sqrt[n]{a}$	فرد n	
۶۴− ریشه ششم ندارد.	$a=-64$ $n=6$	ریشهٔ nاُم ندارد. a	زوج n	$a<0$
$-2=\sqrt[5]{-32}$ ریشهٔ پنجم عدد ۳۲−	$a=-32$ $n=5$	ریشهٔ nاُم عدد a $\sqrt[n]{a}$	فرد n	

با توجه به اینکه $\sqrt{a^2}=|a|$ و $\sqrt[3]{a^3}$ ، این رابطه در حالت کلی نیز :

برای هر $n\geq 2$ برقرار است؛ یعنی: $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a| & \text{ج } n\\ a & n.\end{cases}$

مثال: $\sqrt[10]{(-15)^{10}}=|-15|=15$ ، $\sqrt[5]{(-\frac{8}{3})^5}=-\frac{8}{3}$ ، همچنین $\sqrt[4]{(-3)^4}=|-3|=3$ و $\sqrt[12]{5^{12}}=5$

توان های گویا

سهام داران یک شرکت تولید کنندهٔ محصولات فرهنگی از مدیر عامل این شرکت خواستند که جهت برنامه ریزی برای توسعهٔ شرکت گزارش عملکرد شرکت طی سال های قبل را ارائ کند. مدیر عامل در جلسهٔ ارائهٔ گزارش اعلام کرد که طی سال های قبل، سود سالانهٔ شرکت ۲۰ درصد بوده است و پیش بینی کرد که این سود در سال های آینده نیز محقق شود.اگر سرمایهٔ شرکت را ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانهٔ آن را ۲۰٪ و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهام داران شرکت می توانند با استفاده از فرمول زیر ، سرمایهٔ شرکت را طی سال های آینده برآورد کنند.

$t=$ زمان برحسب سال $\qquad$ سرمایهٔ شرکت (برحسب میلیون تومان)$=100\times(1/2)^t$

برای مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می توان سرمایهٔ شرکت را به صورت زیر حساب کرد:

سرمایهٔ شرکت (برحسب میلیون تومان)پس از گذشت یک سال $=100\times(1/2)^1=100\times(1/2)=120$

سرمایهٔ شرکت (برحسب میلیون تومان)پس از گذشت دو سال $=100\times(1/2)^2=100\times(1/44)=144$

حال اگر سهام داران این شرکت می خواستند سرمایهٔ شرکت را مدتی کمتر از یک سال، برای مثال ۶ ماه بعد (نیم سال) یا ۲۰۰ روز بعد محاسبه کنند چگونه می توانستند این کار را انجام دهند؟

حل: سرمایهٔ شرکت (برحسب میلیون تومان)پس از گذشت نیم سال $= ۱۰۰ \times (۱/۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۱۰۰ \times (۱/۰۹) = ۱۰۹$

تا اینجا شما با توان های صحیح و نحوهٔ کاربرد آنها در محاسبات آشنا شدید اما در حل و مدل سازی بسیاری از مسائل واقعی نیاز به استفاده از توان های غیر صحیح همانند توان های گویاست. در ادامه، با مفهوم توان های گویا و نحوهٔ استفاده از آنها در محاسبات آشنا می شوید.

تمرین ۳۲ : پدر محمد زیست شناس است و در آزمایشگاه روی باکترها کار می کند. روزی او محمد را با خود به محل کارش برد و نوعی باکتری را در زیر میکروسکوپ، نشانش داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیهٔ باکتری را یک گرم در نظر بگیرد.

الف) جدول زیر را کامل کند.

زمان(ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	t
جرم(گرم)	$۲^۱ = ۲$	$۲^۲ = ۴$	$۲^۳ = ۸$	$۲^۴ = ۱۶$	$۲^۵ = ۳۲$	$۲^۶ = ۶۴$	$۲^۷ = ۱۲۸$	$۲^۸ = ۲۵۶$	۲^t

ب) محمد پس از کامل کردن جدول، از پدرش پرسید: آیا حتماً باید تا پایان ساعت منتظر شویم و نمی توانیم جرم باکتری را در کمتر از یک ساعت به دست آوریم؟ برایمثال جرم باکتری بعد از نیم ساعت چقدر می شود؟

پدر محمد: نظر خودت دربارهٔ جرم باکتری پس از نیم ساعت چیست؟

محمد: مطمئن نیستم ولی حدس می زنم که کرم شود، اما مقدار را نمی دانم چقدر می شود؛ چون تمام توان هایی که ما تاکنون یادگرفته ایم، توان های صحیح بوده اند.

پدر محمد: به صورت زیر به او نشان داد که جرم باکتری ها پس از نیم ساعت چقدر می شود و او را با توان های گویا آشنا کرد:

اگر فرض کنیم جرم باکتری ها در هر نیم ساعت a برابر شود، بعد از یک ساعت برابر $a \times a = a^۲$ می شود.

با توجه به جدولی که کامل کردی، $a^۲ = ۲$ یعنی $a = \sqrt{۲}$. (زیرا a مثبت است.) بنابراین پس از نیم ساعت جرم باکتری ها $\sqrt{۲}$ گرم خواهد شد.

حالا می خواهیم بدانیم آیا می توانیم $\sqrt{۲}$ را به صورت توانی از ۲ بنویسیم.معادلهٔ $\sqrt{۲} = ۲^b$ را در نظر می گیریم و سعی می کنیم مقدار b را به دست آوریم.

$$\sqrt{۲} = ۲^b \Rightarrow \left(\sqrt{۲}\right)^۲ = \left(۲^b\right)^۲ \Rightarrow ۲ = ۲^{۲b} \Rightarrow ۲^۱ = ۲^{۲b} \Rightarrow ۱ = ۲b \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز — دکتر درس

بنابراین داریم: $\sqrt{۲}=۲^{\frac{۱}{۲}}$

پ) بعد از پانزده دقیقه جرم باکتری چند گرم خواهد شد؟

محمد: چون پانزده دقیقه، $\frac{۱}{۴}$ ساعت است پس گرم $۲^{\frac{۱}{۴}}$ یا $\sqrt[۴]{۲}$ گرم خواهد بود.

ت) شما مانند محمد جرم باکتری ها را در زمان های داده شده به دست آورید.

پس از ۲۰ دقیقه ($\frac{۱}{۳}$ ساعت) $=۲^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۲}$ پس از ۱۰ دقیقه ($\frac{۱}{۶}$ ساعت) $=۲^{\frac{۱}{۶}}=\sqrt[۶]{۲}$

برای هر $n\geq ۲$ توان $\frac{۱}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را چنین تعریف می کنیم: $a^{\frac{۱}{n}}=\sqrt[n]{a}$

نکته در این کتاب اگر $a<۰$ و $a^{\frac{۱}{n}}$ را تعریف نمی کنیم. عبارت هایی مانند $(-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ و $(-۲)^{\frac{۱}{۲}}$ را تعریف نمی کنیم.

تمام روابطی که برای توان های صحیح اعداد بیان شد، برای توان های گویای و حقیقی اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار است.

مثال: $۳^{\frac{۲}{۳}}=۳^{۲\times\frac{۱}{۳}}=(۳^{۲})^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۳^{۲}}$ و $۷^{\frac{۵}{۴}}=۷^{۵\times\frac{۱}{۴}}=(۷^{۵})^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۷^{۵}}$

اگر $a>۰$ برای هر دو عدد طبیعی m و n باشد، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می کنیم: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{m\times\frac{۱}{n}}=(a^{m})^{\frac{۱}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$$

$$a^{\frac{m}{n}}=(a^{m})^{\frac{۱}{n}}=(a^{\frac{۱}{n}})^{m} \quad \Leftrightarrow \quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}=(\sqrt[n]{a})^{m}$$

همچنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به این صورت تعریف می شود: $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{۱}{a^{\frac{m}{n}}}$

اگر m و n دو عدد اعداد حقیقی و $b>0$ و $a>0$ اعداد حقیقی باشند.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m \times b^m = (ab)^m \qquad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

تمرین ۳۳ : اعداد تواندار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

الف) $۵^{\frac{۳}{۴}} = \sqrt[۴]{۵^۳}$

ب) $۶^{\frac{۷}{۹}} = \sqrt[۹]{۶^۷}$

پ) $۱۲^{-\frac{۲}{۱۱}} = \frac{۱}{\sqrt[۱۱]{۱۲^۲}}$

ت) $۳^{-\frac{۵}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳^۵}}$

ث) $\left(۲\frac{۱}{۳}\right)^{-\frac{۸}{۳}} = \left(\frac{۷}{۳}\right)^{-\frac{۸}{۳}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{(\frac{۷}{۳})^۸}}$

ج) $(۰/۰۰۱)^{\frac{۱۴}{۴}} = \sqrt[۴]{(۰/۰۰۱)^{۱۴}}$

تمرین ۳۴ : هر یک از عبارت های توانی را به صورت رادیکالی و عبارت های رادیکالی را به صورت تواندار بنویسید.

الف) $۳^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۳^۱}$

ب) $۷^{\frac{۱}{۸}} = \sqrt[۸]{۷^۱}$

پ) $\sqrt[۳]{۲۵} = ۲۵^{\frac{۱}{۳}}$

ت) $\sqrt[۱۲]{۱۲/۷} = (۱۲/۷)^{\frac{۱}{۱۲}}$

ث) $(۰/۳۱)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۰/۳۱^۱}$

ج) $\sqrt[۱۰]{۱} = ۱^{\frac{۱}{۱۰}}$

تمرین ۳۵ : سهام داران یک شرکت با استفاده از فرمول $۱۰۰\times(۱/۲)^{t}$ (t زمان برحسب سال) ، سرمایهٔ شرکت را طی سال های آینده برآورد می کنند.سرمایهٔ شرکت را در هریک از زمان های خواسته شده به دست آورید.

الف) ۶ ماه بعد ($\frac{۱}{۲}$ سال)

حل : $\text{سرمایه شرکت پس از شش ماه}=۱۰۰\times(۱/۲)^{\frac{۱}{۲}}=۱۰۰\sqrt{۱/۲}$

ب) ۳سال و ۶ ماه بعد

حل : $\text{سرمایه شرکت پس از ۳ سال و شش ماه }(۳\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۲})=۱۰۰\times(۱/۲)^{\frac{۷}{۲}}=۱۰۰\sqrt{(۱/۲)^{۷}}$

پ) ۱سال و ۲ ماه بعد

حل : $\text{سرمایه شرکت پس از یک سال و دو ماه }(۱\frac{۱}{۶}=\frac{۷}{۶})=۱۰۰\times(۱/۲)^{\frac{۷}{۶}}=۱۰۰\sqrt[۶]{(۱/۲)^{۷}}$

ت) ۲۰۰ روز بعد

حل : $\text{سرمایه شرکت پس از ۲۰۰ روز }(\frac{۲۰۰}{۳۶۵})=۱۰۰\times(۱/۲)^{\frac{۲۰۰}{۳۶۵}}=۱۰۰\sqrt[۳۶۵]{(۱/۲)^{۲۰۰}}$

تمرین ۳۶ : مانند الف ، هر یک از اعداد تواندار را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $۴^{\frac{۱}{۲}}=(۲^{۲})^{\frac{۱}{۲}}=۲^{۲\times\frac{۱}{۲}}=۲^{۱}=۲$

ب) $۱۲۵^{-\frac{۱}{۳}}=(۵^{۳})^{-\frac{۱}{۳}}=۵^{۳\times(-\frac{۱}{۳})}=۵^{-۱}=\frac{۱}{۵}$

پ) $۱۰۰^{\frac{۱}{۲}}=(۱۰^{۲})^{\frac{۱}{۲}}=۱۰^{۲\times\frac{۱}{۲}}=۱۰^{۱}=۱۰$

ت) $۳۲^{\frac{۱}{۵}}=(۲^{۵})^{\frac{۱}{۵}}=۲^{۵\times\frac{۱}{۵}}=۲^{۱}=۲$

تمرین ۳۷ : هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $(۲\times ۸)^{\frac{۱}{۴}}=(۱۶)^{\frac{۱}{۴}}=(۲^{۴})^{\frac{۱}{۴}}=۲^{۴\times\frac{۱}{۴}}=۲^{۱}=۲$

ب) $-۴(۱۰۰۰)^{\frac{۱}{۳}}=-۴(۱۰^{۳})^{\frac{۱}{۳}}=-۴\times(۱۰^{۳\times\frac{۱}{۳}})=-۴\times ۱۰^{۱}=-۴۰$

پ) $۳^{\frac{۱}{۳}}\times ۳^{\frac{۲}{۳}}=(۳)^{\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳}}=۳^{\frac{۳}{۳}}=۳^{۱}=۳$

ت) $۷^{\frac{۳}{۴}}\times ۷^{\frac{۵}{۴}}=(۷)^{\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۴}}=۷^{\frac{۸}{۴}}=۷^{۲}=۴۹$

ث) $۱۲۵^{\frac{۲}{۳}}\div ۱۲۵^{\frac{۱}{۴}}=(۱۲۵)^{\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۴}}=(۱۲۵)^{\frac{۸}{۱۲}-\frac{۳}{۱۲}}=(۵^{۳})^{\frac{۵}{۱۲}}=(۵)^{۳\times\frac{۵}{۱۲}}=۵^{\frac{۵}{۴}}=\sqrt[۴]{۵^{۵}}=\sqrt[۴]{۵^{۴}\times ۵^{۱}}=۵\sqrt[۴]{۵^{۱}}$

ج) $۸^{\frac{۲}{۷}}\times(۱/۵)^{\frac{۲}{۷}}=(۸\times ۱/۵)^{\frac{۲}{۷}}=(۱۲)^{\frac{۲}{۷}}=\sqrt[۷]{۱۲^{۲}}=\sqrt[۷]{۱۴۴}$

فصل ۲

تمرین ۳۸ : دانش آموزی $\sqrt[۳]{-۸}$ را به صورت $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ به صورت $\sqrt[۳]{-۸}$ نادرست است.

حل: $\sqrt[۳]{-۸}=\sqrt[۳]{(-۲)^{۳}}=-۲$ در صورتی که $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ در کتاب گفته شده تعریف نشده است زیرا از دو روش مختلف دو جواب متفاوت برای آن بدست می آید.

روش اول: $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}=(-۸)^{\frac{۲}{۶}}=\sqrt[۶]{(-۸)^{۲}}=\sqrt[۶]{۶۴}=۲$

روش دوم: $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}=\left((-۲)^{۳}\right)^{\frac{۱}{۳}}=(-۲)^{۳\times\frac{۱}{۳}}=(-۲)^{۱}=-۲$

تمرین ۳۹ : در هریک از تساوی های زیر مقدار x را به دست آورید.

الف) $۵^{x}\times ۳^{۴}=۱۵^{۴}$

حل: $۵^{x}\times ۳^{۴}=۱۵^{۴}\Rightarrow ۵^{x}\times \cancel{۳^{۴}}=۵^{۴}\times \cancel{۳^{۴}}\Rightarrow ۵^{x}=۵^{۴}\Rightarrow x=۴$

دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز — دکتر درس

ب) $۵^{۴} \times ۵^{-۷} \times ۵^{x} = ۲۵$

حل:

$$۵^{۴} \times ۵^{-۷} \times ۵^{x} = ۲۵ \Rightarrow ۵^{-۳+x} = ۵^{۲} \Rightarrow -۳+x = ۲ \Rightarrow x = ۲+۳ \Rightarrow x = ۵$$

پ) $(۶^{۳})^{x} = \frac{۱}{۶^{۵}}$

حل:

$$(۶^{۳})^{x} = \frac{۱}{۶^{۵}} \Rightarrow ۶^{۳x} = ۶^{-۵} \Rightarrow ۳x = -۵ \Rightarrow x = \frac{-۵}{۳}$$

ت) $\frac{x^{۶} \times ۲۱^{۵}}{۷^{۳} \times ۷^{۲} \times ۷^{۶}} = ۳^{۱۱}$

حل:

$$\frac{x^{۶} \times ۲۱^{۵}}{۷^{۳} \times ۷^{۲} \times ۷^{۶}} = ۳^{۱۱} \Rightarrow \frac{x^{۶} \times ۲۱^{۵}}{۷^{۱۱}} = \frac{۳^{۱۱}}{۱} \Rightarrow x^{۶} \times ۲۱^{۵} = ۲۱^{۱۱}$$

$$\Rightarrow x^{۶} = \frac{۲۱^{۱۱}}{۲۱^{۵}} \Rightarrow x^{۶} = ۲۱^{۶} \Rightarrow x = ۲۱$$

درس ۳ تابع نمایی

«بنیاد ملی بازی های رایانه ای» با هدف تبیین، تقویت و ترویج مبانی فرهنگ و هویت ایرانی - اسلامی و حمایت کامل از ظرفیت های موجود صنعت بازی های رایانه ای، از سال ۱۳۸۵ شروع به کار کرده و تا کنون تولیدات خوبی داشته است.

یکی از تولیدات این بنیاد، «مجموعهٔ بازی های سبز» است که قرار است دانش آموز را در قالب بازی، به آموزش و نگهداری از منابع و ترویج فرهنگ درخت کاری هدایت کند. بازی به این صورت است که در شروع بازی یک امتیاز به بازیکن داده می شود. اگر بازیکن بتواند در طول بازی در مرحلهٔ اوّل، یکی از عوامل آلوده کنندهٔ محیط زیست را شناسایی و نابود کند، ۳ امتیاز می گیرد. در مرحلهٔ دوم، اگر بازیکن بتواند عامل دیگری را که باعث تخریب محیط زیست می شود شناسایی و نابود کند، ۹ امتیاز می گیرد و به همین ترتیب در مرحلهٔ بعد، ۲۷ امتیاز ، در مرحلهٔ بعد از آن ۸۱ امتیاز و ... خواهد گرفت.بازی زمانی تمام می شود که بازیکن به امتیاز ۴۳۰۴۶۷۲۱ برسد.

تمرین ۴۰ : براساس «مجموعهٔ بازی های سبز» به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

میزان امتیازهای کسب شده	تعداد مراحل بازی
$۳^{۰}=۱$	۰
$۳^{۱}=۳$	۱
$۳^{۲}=۹$	۲
$۳^{۳}=۲۷$	۳
$۳^{۴}=۸۱$	۴
۲۴۳	۵
$۳^{۶}=۷۲۹$	۶
$۳^{۷}=۲۱۸۷$	۷
$۳^{۸}=۶۵۶۱$	۸
$۳^{۹}=۱۹۶۸۳$	۹
$۳^{۱۰}=۵۹۰۴۹$	۱۰

ب) در کدام مرحله، میزان امتیاز کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟

حل: مرحلهٔ هشتم

پ) آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیاز کسب شده، رابطه ای به دست آورید.

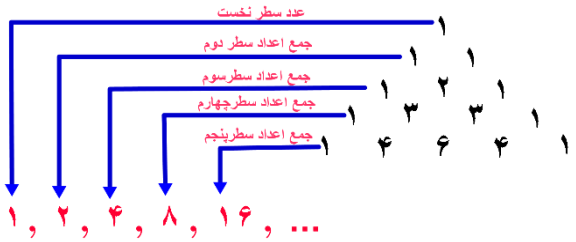
حل: میزان امتیاز کسب شده $=۳^{\text{(تعداد مراحل بازی)}}$

ت) با توجه به رابطهٔ به دست آمده در قسمت قبل، آیا می توانید امتیازات کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحلهٔ n اُم را به دست آورید؟

حل: بله – $۳^{۱۰}=۵۹۰۴۹$ – $۳^{۲۰}=۳۴۸۶۷۸۴۴۰۱$ – مرحلهٔ n اُم $=۳^{n}$

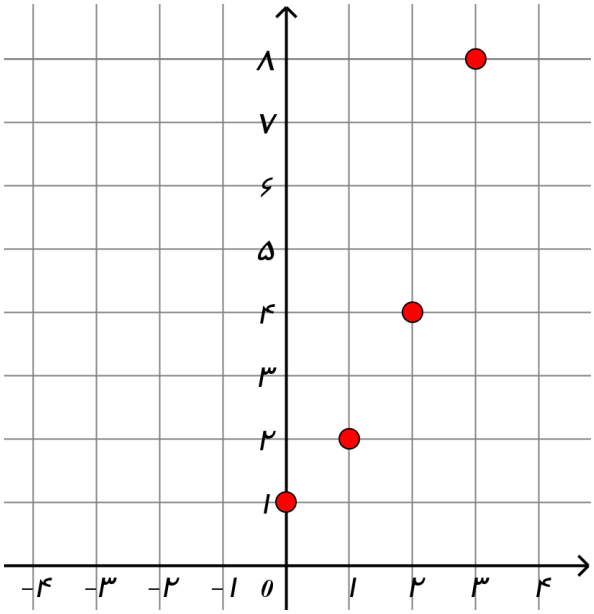
دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز — حاجی هاشمی — دکتر درس

تمرین ۴۱ : دربخش دنباله ها، با توجه به مثلث خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به دست آوردیم که به عنوان تابع از ضابطهٔ $f(n)=۲^n$ پیروی می کرد.



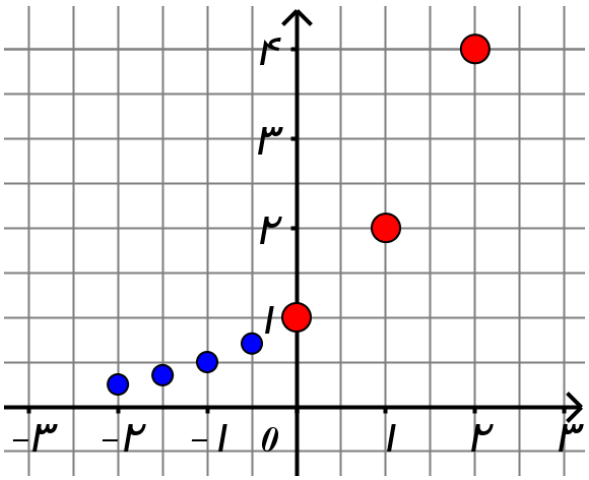
الف) مقادیر به دست آمده مثلث خیام را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به دست آمده را روی دستگاه مختصات زیر نمایش دهید.

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۲	۴	۸	۱۶

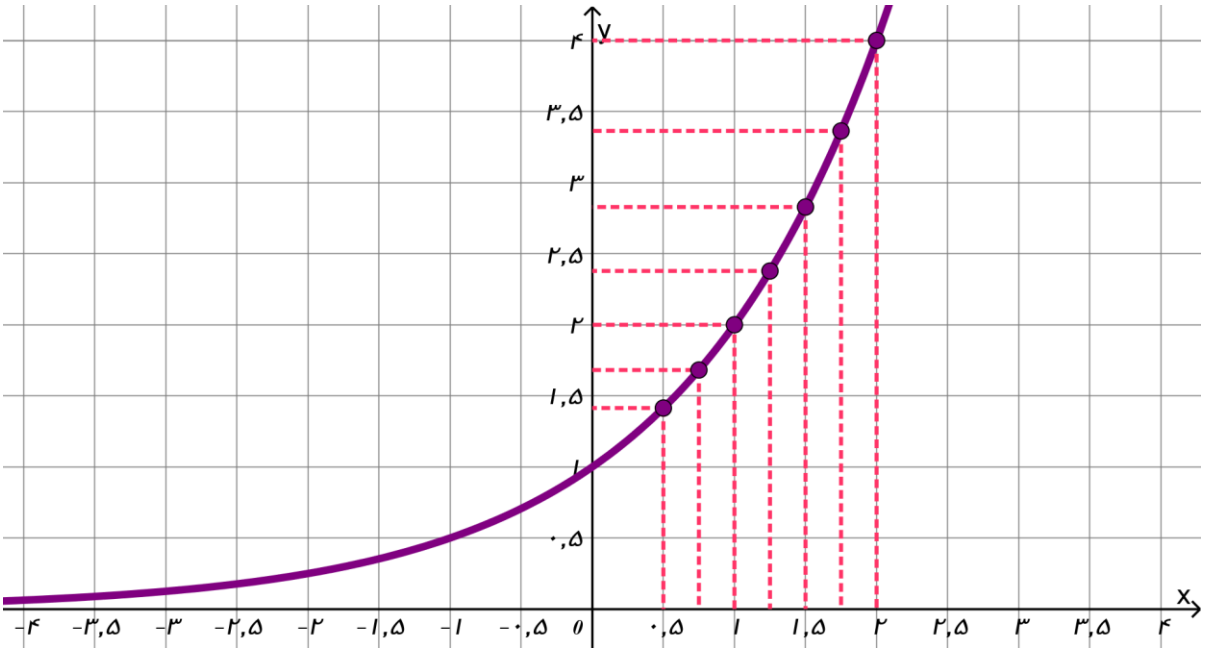


ب) جدول زیر را با ماشین حساب کامل کرده ایم. این نقاط را نیز در دستگاه مختصات بالا نشان دهید.

x	۰	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	$-\frac{۳}{۲}$	-۲
۲^x	۱	۰/۷۰۷	۰/۵۰۰	۰/۳۵۳	۰/۲۵۰



پ) اگر مقادیر تابع $f(x)=۲^x$ را برای x های دیگر نیز به دست آوریم، نمودار تابع $f(x)=۲^x$ به صورت زیر خواهد بود:



هر تابع به صورت $y=a^x$، که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی نامیده می شود.

تذکر: حرف a معرفِ پایه و حرف x معرفِ نما یا توان است. با نمادهای تعریف شده در سال دهم برای یک تابع، می توان تابع نمایی f را به صورت زیر تعریف کرد:

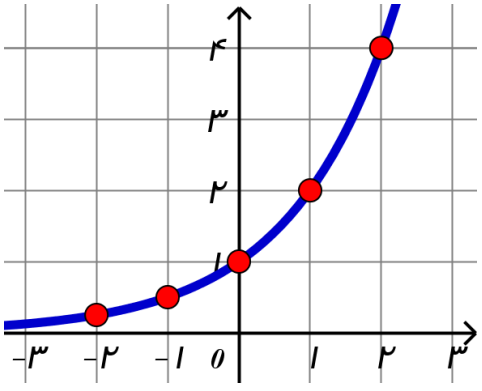
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$$

$$f(x)=a^x \qquad (a>۰\ ,\ a\neq ۱)$$

منظور از $\mathbb{R}^+$ ، مجموعهٔ $\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x>۰\}$ است.

تمرین ۴۲ : تابع نمایی $y=۲^x$ را رسم کنید.

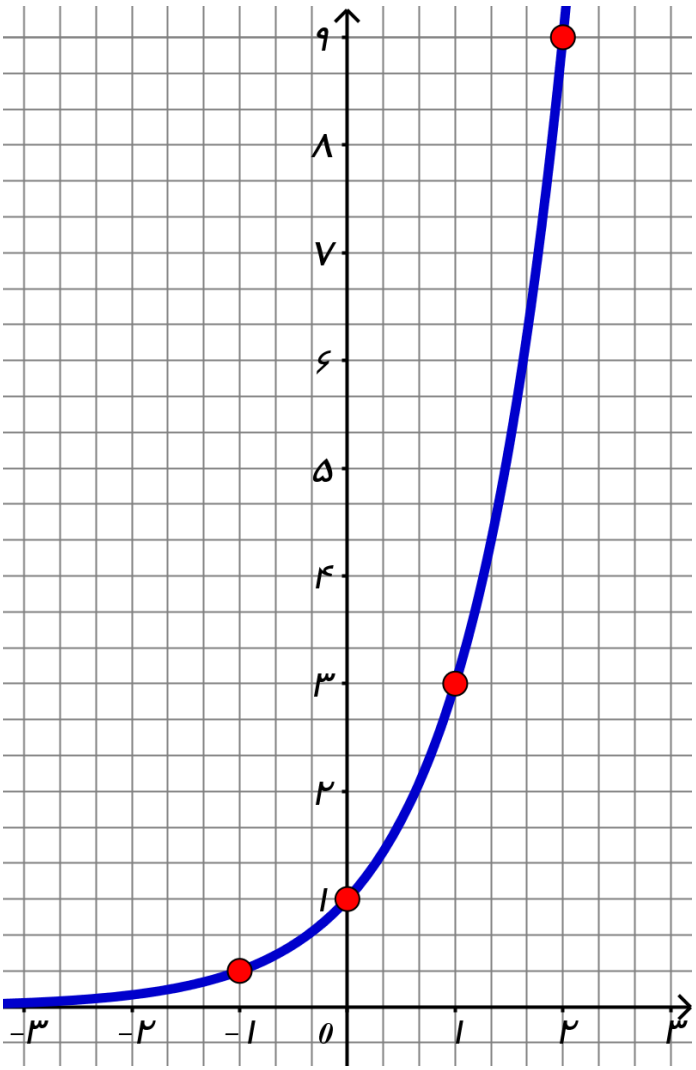
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴



دکتر درس
دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز

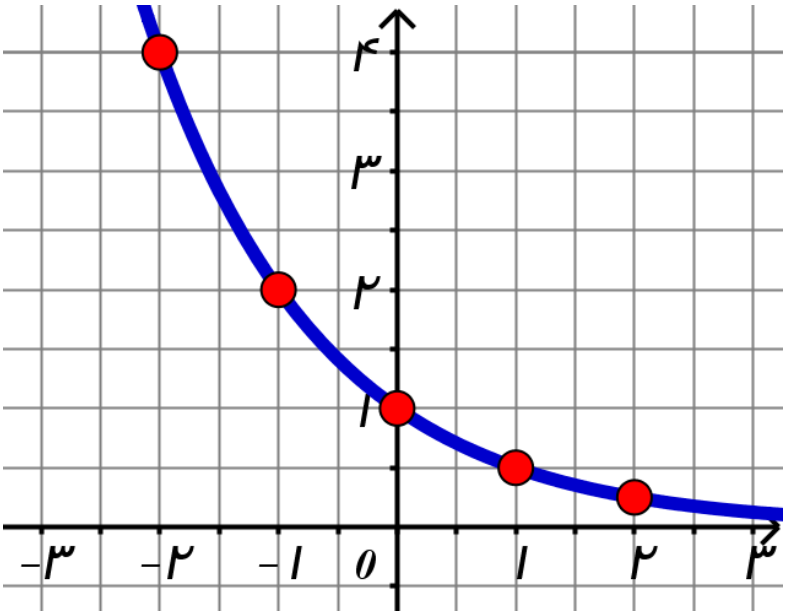
تمرین ۴۳ : تابع نمایی $y=3^x$ را رسم کنید.

x	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{3}$	1	3	9



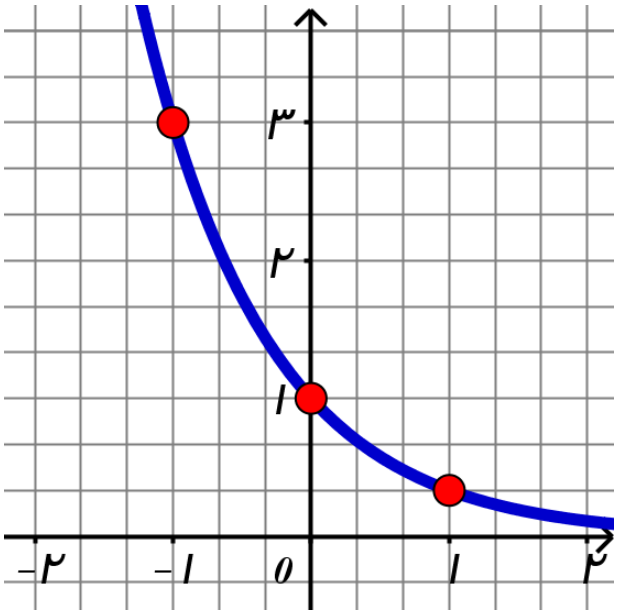
تمرین ۴۴ : تابع نمایی $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



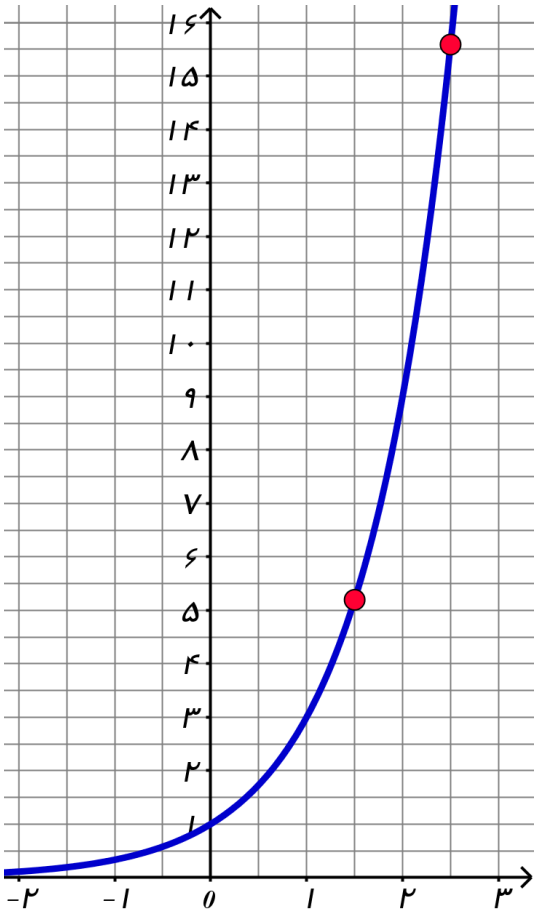
تمرین ۴۵ : تابع نمایی $y=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ را رسم کنید.

x	-۱	۰	۱
y	۳	۱	$\frac{۱}{۳}$



فصل ۳

تمرین ۴۶ : با توجه به نمودار تابع نمایی $y=۳^x$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) نمودار این تابع محور yها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

حل: نمودار محور yها در نقطه $(۰,۱)$ قطع می کند.

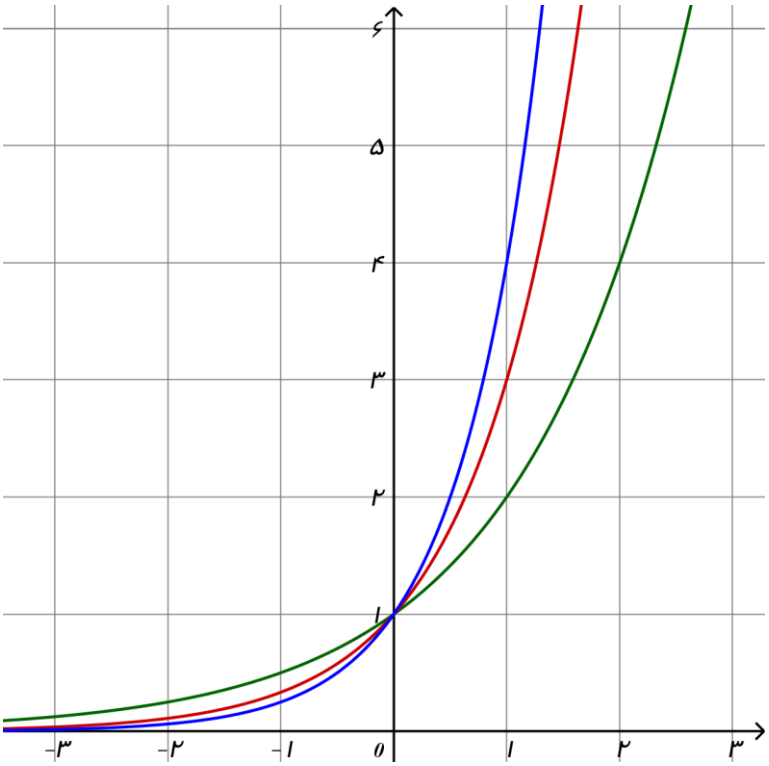
ب) آیا نمودار این تابع محور xها را قطع می کند؟ چرا؟

حل: نمودار محور xها را قطع نمی کند. زیرا عدد سه به هر توانی که برسد صفر نمی شود.

پ) با استفاده از نمودار این تابع مقدار تقریبی عدد $۳^{\frac{۳}{۲}}$ و $۳^{\frac{۵}{۲}}$ را به دست آورید.

حل: $۳^{\frac{۳}{۲}} \approx ۵/۲۵$ و $۳^{\frac{۵}{۲}} \approx ۱۵/۵$

دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز حاجی هاشمی دکتر درس



تمرین ۴۷ : نمودار توابع نمایی $y=۲^x$ ، $y=۳^x$ و $y=۴^x$ را در یک دستگاه رسم کرده ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است.

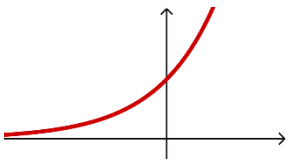
سپس، تفاوت ها و شباهت های بین این سه تابع را بیان کنید.

شباهت ها: هر سه نمودار محور yها در نقطه $(۰,۱)$ قطع می کنند. — هر سه نمودار محور xها را قطع نمی کنند. — در هر سه نمودار با افزایش مقدار x، مقدار y نیز افزایش می یابد. دامنه هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است و برد هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. ($\mathbb{R}^+$)

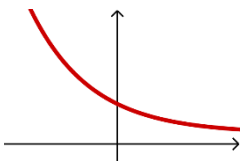
تفاوت ها: سرعت افزایش مقدار yهایشان برابر نیست.

تمرین ۴۸ : جاهای خالی را پر کنید:

الف) در تابع $y=a^x$، اگر $a>۱$ ، با افزایش مقدار x، مقادیر y *افزایش* می یابند.



ب) در تابع $y=a^x$، اگر $۰<a<۱$ ، با افزایش مقدار x، مقادیر y *کاهش* می یابند.



تمرین ۴۹ : یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تا زدن، دو ناحیه به وجود می آید که مساحت هر یک نصف مساحت اولیه است. اکنون کاغذ تا شده را یک بار دیگر تا بزنید. در دومین تا زدن ، چهار ناحیه ایجاد می شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی مساحت اولیه است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

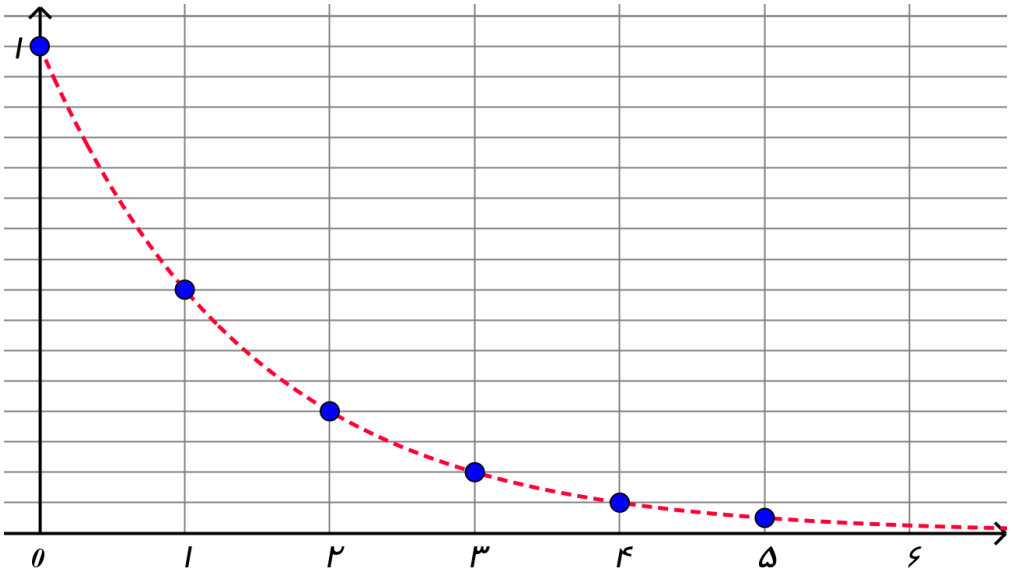
میزان مساحت هر یک از ناحیه ها	تعداد تا زدن ها
۱	۰
$\frac{۱}{۲}$	۱
$\frac{۱}{۴}$	۲
$\frac{۱}{۸}$	۳
$\frac{۱}{۱۶}$	۴
$\frac{۱}{۳۲}$	۵
⋮	⋮
$\frac{۱}{۲۵۶}$	۸
$\frac{۱}{۱۰۲۴}$	۱۰

ب) با توجه به جدول چه الگویی را می توانید پیشنهاد کنید؟

حل: میزان مساحت هر ناحیه $=\frac{۱}{۲}^{(\text{تعداد تا زدن ها})}$ یعنی :

$$a_n=\left(\frac{۱}{۲}\right)^n$$

پ) در نمودار زیر رابطهٔ تعداد تا زدن ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه ها نمایش داده شده است. نقطهٔ تقاطع منحنی با محور yها چیست؟



حل: منحنی محور yها در نقطه (۰,۱) قطع می کند.

در تابع نمایی $y=a^x$، اگر $0<a<1$ باشد، وقتی مقدار x بزرگ می شود، مقدار y کوچک می شود و وقتی مقدار x کوچک می شود، مقدار y بزرگ می شود.

دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز حاجی هاشمی دکتر درس

رشد و زوال نمایی

منظور از مسائل رشد یا زوال مسائلی است که به متغیرهایی اشاره دارد که با گذشت زمان، افزایش یا کاهش می یابند.

مانند: افزایش یا افت قیمت اجناس ، رشد جمعیت ، رشد تورم ، افزایش تعداد باکتری ها در یک کِشتِ باکتری ، کاهش وزن یک پنجره آهنی بر اثر زنگ زدگی ، کاهش مواد غذایی بر اثر جمعیت ، کاهش وزن مواد رادیو اکتیو و ...

تمرین ۵۰ : احسان هفده ساله است. پدرش قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان برای او سرمایه گذاری کند. او تصمیم گرفته که این مبلغ را در یک شرکت تولید کنندهٔ کالای ایرانی سرمایه گذاری کند که در پایان هر سال ۱۴ درصد سود علی الحساب به آنان پرداخت خواهد کرد.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

سن احسان	۱۷	۱۸	۱۹	...	۲۳
مبلغ سرمایه گذاری شده در شرکت تولیدی	۱۰۰۰۰۰۰۰ تومان			...	

مبلغ سرمایه گذاری در ۱۸ سالگی احسان $۱۰۰۰۰۰۰۰+\left(۱۰۰۰۰۰۰۰\times\frac{۱۴}{۱۰۰}\right)=۱۰۰۰۰۰۰۰+۱۴۰۰۰۰۰=۱۱۴۰۰۰۰۰$

$۱۰۰۰۰۰۰۰+\left(۱۰۰۰۰۰۰۰\times\frac{۱۴}{۱۰۰}\right)=۱۰۰۰۰۰۰۰\left(۱+\frac{۱۴}{۱۰۰}\right)=۱۰۰۰۰۰۰۰\times(۱/۱۴)=۱۱۴۰۰۰۰۰$

مبلغ سرمایه گذاری در ۱۹ سالگی احسان $۱۰۰۰۰۰۰۰\times(۱/۱۴)^{۲}=۱۲۹۹۶۰۰۰$ یا $۱۱۴۰۰۰۰۰\times(۱/۱۴)=۱۲۹۹۶۰۰۰$

بنابراین:

$۲۳-۱۷=۶$ مبلغ سرمایه گذاری در ۲۳ سالگی احسان $۱۰۰۰۰۰۰۰\times(۱/۱۴)^{۶}\approx۲۱۹۴۹۷۲۶/۲۳$

معادلهٔ کلی رشد نمایی، به صورت $f(t)=c(۱+r)^t$ است.

$f(t)$: بیانگر مقدار نهایی

c : بیانگر مقدار اولیه

r : بیانگر میزان رشد (تغییرات برحسب اعشار)

t : بیانگر زمان

تمرین ۵۱ : ایران در سال ۱۳۵۹ دارای ۳۶ میلیون نفر جمعیت بوده است. اگر آهنگ رشد سالانهٔ جمعیت ایران برابر ۰/۰۲ باشد، حساب کنید پس از ۴۰ سال جمعیت کشور چقدر می شود؟ $(۱/۰۲)^{۴۰} \simeq ۲/۲۱$

حل:

$$f(۴۰) = ۳۶(۱+۰/۰۲)^{۴۰} = ۳۶(۱/۰۲)^{۴۰} \simeq ۳۶(۲/۲۱) = ۷۹/۵۶$$

تمرین ۵۲ : در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کرهٔ زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر آهنگ رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد.

الف) پس از ۳۰ سال جمعیت کرهٔ زمین به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ $(۱/۰۲)^{۳۰} \simeq ۱/۸۱$

حل:

$$f(۳۰) = ۵/۲(۱+۰/۰۲)^{۳۰} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۳۰} \simeq ۵/۲(۱/۸۱) = ۹/۴۱۲$$

ب) پس از ۳۵ سال ، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کرهٔ زمین چه میزان خواهد شد؟

$(۱/۰۲)^{۳۵} \simeq ۱/۹۹$, $(۱/۰۲)^{۷۰} \simeq ۳/۹۹$, $(۱/۰۲)^{۱۰۵} \simeq ۷/۹۹$

حل:

$$f(۳۵) = ۵/۲(۱+۰/۰۲)^{۳۵} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۳۵} \simeq ۵/۲(۱/۹۹) = ۱۰/۳۴۸$$

$$f(۷۰) = ۵/۲(۱+۰/۰۲)^{۷۰} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۷۰} \simeq ۵/۲(۳/۹۹) = ۲۰/۷۴۸$$

$$f(۱۰۵) = ۵/۲(۱+۰/۰۲)^{۱۰۵} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۱۰۵} \simeq ۵/۲(۷/۹۹) = ۴۱/۵۴۸$$

پ) آیا می توانید وضع جمعیت کرهٔ زمین را در هر دورهٔ زمانی ۳۵ سال مقایسه کنید؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

حل: *تقریباً هر ۳۵ سال جمعیت کرهٔ زمین دو برابر می شود.*

معادلهٔ کلی زوال نمایی، به صورت $f(t) = c(۱-r)^t$ است.

$f(t)$: بیانگر مقدار نهایی — c : بیانگر مقدار اولیه

r : بیانگر میزان نزول (تغییرات برحسب اعشار) — t : بیانگر زمان

تمرین ۵۳ : جمعیت کشوری، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهل میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟ $(۰/۹۹)^{۱۸} \simeq ۰/۸۳$

حل:

$$f(۱۸) = ۴۰۰۰۰۰۰۰(۱-۰/۰۱)^{۱۸} = ۴۰۰۰۰۰۰۰(۰/۹۹)^{۱۸} \simeq ۴۰۰۰۰۰۰۰(۰/۸۳) = ۳۳۲۰۰۰۰$$

تمرین ۵۴ : وزن تیرآهن سایز ۱۴، ۱۵۵ کیلوگرم است. اگر وزن این تیر آهن بر اثر زنگ زدگی هر سال ۳ درصد وزن سال پیش آن باشد. بعد از گذشت ۱۰ سال وزن این تیرآهن چقدر می شود؟ $(۰/۹۷)^{۱۰} \simeq ۰/۷۳$

حل:

$$f(۱۰) = ۱۵۵(۱-۰/۰۳)^{۱۰} = ۱۵۵(۰/۹۷)^{۱۰} \simeq ۱۵۵(۰/۷۳) = ۱۱۳/۱۵$$

تمرین ۵۵ : شخصی یک دوچرخه به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینهٔ استهلاک این دوچرخه هر سال معادل ۵ درصد ارزش سال پیش آن باشد. بعد از گذشت ۱۵ ارزش این دوچرخه چقدر می شود؟ $(۰/۹۵)^{۱۵} \simeq ۰/۴۶$

حل:

$$f(۱۵) = ۹۶۰۰۰۰(۱-۰/۰۵)^{۱۵} = ۹۶۰۰۰۰۰(۰/۹۵)^{۱۵} \simeq ۹۶۰۰۰۰(۰/۴۶) = ۴۴۱۶۰۰$$

بارم بندی ریاضی و آمار ۳ (پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی علوم انسانی و معارف اسلامی)

فصل	عناوین	پایان نوبت اوّل تا آخر صفحه ۶۰	پایان نوبت دوّم تا آخر کتاب	شهریور و دی تا آخر کتاب
اوّل	کل فصل	۱۵	۵	۸
دوّم	درس۱ (تا صفحه‌ی۶۰)	۵	۲	۵/۵
	درس۲ (صفحه‌ی۶۰ به بعد)	–	۳/۵	
سوّم	کل فصل	–	۹/۵	۶/۵
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

حل تمرینات صفحات ۸۴ و ۸۵ و ۸۶

۱ – با نوشتن جملات رابطه های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنبالهٔ هندسی را تشکیل می دهد.

۱) $a_{n+۱}=(a_n)^۲ \qquad a_۱=\frac{۱}{۲}$

حل: $\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۱۶}, \frac{۱}{۲۵۶}, \ldots$ هندسی نیست. زیرا در یک عدد ثابت ضرب نشده اند.

۲) $a_{n+۱}=\frac{۲}{۳}a_n \qquad a_۱=\frac{۱}{۲}$

حل: $\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۶}, \frac{۴}{۱۸}, \frac{۸}{۵۴}, \ldots$ هندسی است. زیرا در یک عدد ثابت ضرب شده اند.

۳) $a_{n+۱}=\frac{۱}{۱+a_n} \qquad a_۱=۱$

حل: $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۵}, \ldots$ هندسی نیست. زیرا در یک عدد ثابت ضرب نشده اند.

$a_{۲+۱}=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲}{۳}$ و $a_{۳+۱}=\frac{۱}{۱+\frac{۲}{۳}}=\frac{۱}{\frac{۵}{۳}}=\frac{۳}{۵}$ و $a_{۱+۱}=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$

۴) $a_{n+۱}=۲a_n \qquad a_۱=۱$

حل: $۱, ۲, ۴, ۸, \ldots$ هندسی است. زیرا در یک عدد ثابت ضرب شده اند.

---

۲ – در جزوه به عنوان تمرین ۱۳ حل شده است.

---

۳ – اگر اعداد $x+۳$ و $x+۲$ و x سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند. مقدار x را به دست آورید.

حل: $(x+۲)^۲=x\times(x+۳) \Rightarrow x^۲+۴x+۴=x^۲+۳x \Rightarrow ۴x-۳x=-۴ \Rightarrow x=-۴$

دکتر درس
دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز

۴ – سرطان از تکثیر بیش از حد سلول ها در بدن ایجاد می شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول های سرطانی استفاده می شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجئیز می شود و هر بار درصدی از سلول های سرطانی از بین می رود.

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ٪۶۰ سلول های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر تودهٔ سرطانی او ابتدا $۱۰^{۱۲}$ سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می ماند؟

حل: *اگر داروی شیمی درمانی هر بار ٪۶۰ سلول های سرطانی فردی را از بین ببرد پس ٪۴۰ باقی می ماند.*

$$a_n = ۱۰^{۱۲} \times \left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{n-۱} \quad \Rightarrow \quad a_۳ = ۱۰^{۱۲} \times \left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۲} = ۱۶ \times ۱۰^{۱۰}$$

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی، رشد تودهٔ سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول های سرطانی اش به کمک شیمی درمانی کمتر از ۷×۱۰^{۶} سلول شود و سپس با کوچک شدن تودهٔ سرطانی به کمک جراحی، باقی ماندهٔ سلول های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی درمانی شود؟

حل: $\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{n-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow \left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{n-۱} < \frac{۷ \times ۱۰^{۶}}{۱۰^{۱۲}} \Rightarrow ۱۰^{۱۲} \times \left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{n-۱} < ۷ \times ۱۰^{۶} \Rightarrow a_n < ۷ \times ۱۰^{۶}$

$\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۸-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۰/۰۰۱۶۳۸۴ \not< ۰/۰۰۰۰۰۷$	$\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۱-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۱ \not< ۷ \times ۱۰^{-۶}$
$\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۹-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۰/۰۰۰۶۵۵۳۶ \not< ۰/۰۰۰۰۰۷$	$\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۲-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۰/۴ \not< ۰/۰۰۰۰۰۷$
$\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۱۰-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۰/۰۰۰۲۶۲۱۴۴ \not< ۰/۰۰۰۰۰۷$	$\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۳-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۰/۱۶ \not< ۰/۰۰۰۰۰۷$
$\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۱۱-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۰/۰۰۰۱۰۴۸۵۷۶ \not< ۰/۰۰۰۰۰۷$	$\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۴-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۰/۰۶۴ \not< ۰/۰۰۰۰۰۷$
$\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۱۲-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۰/۰۰۰۰۴۱۹۴۳ \not< ۰/۰۰۰۰۰۷$	$\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۵-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۰/۰۲۵۶ \not< ۰/۰۰۰۰۰۷$
$\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۱۳-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۰/۰۰۰۰۱۶۷۷۷۲ \not< ۰/۰۰۰۰۰۷$	$\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۶-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۰/۰۱۰۲۴ \not< ۰/۰۰۰۰۰۷$
$\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۱۴-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۰/۰۰۰۰۰۶۷۱۰۹ < ۰/۰۰۰۰۰۷$	$\left(\frac{۴}{۱۰}\right)^{۷-۱} < ۷ \times ۱۰^{-۶} \Rightarrow ۰/۰۰۴۰۹۶ \not< ۰/۰۰۰۰۰۷$

پس از ۱۴ بار شیمی درمانی تودهٔ سرطانی کوچک و سپس به کمک جراحی می توان باقی ماندهٔ سلول های سرطانی او را برداشت.

۵- در جزوه به عنوان تمرین ۱۶ حل شده است.

---

۶ – جملهٔ سوم یک دنبالهٔ هندسی ۲۷ و جملهٔ پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جملهٔ هفتم این دنبالهٔ هندسی را به دست آورید.

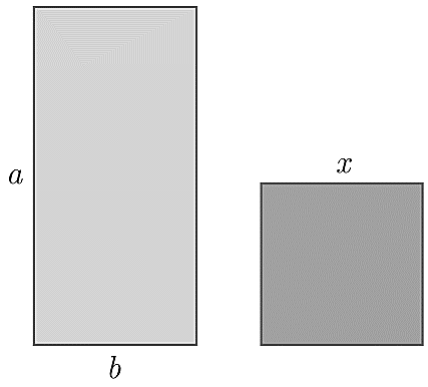
حل:

$$a_۳ = ۲۷ \ , \ a_۵ = ۲۴۳ \qquad r^{۵-۳} = \frac{۲۴۳}{۲۷} \Rightarrow r^۲ = ۹ \qquad \begin{cases} r = ۳ \\ r = -۳ \end{cases}$$

$$a_۷ = ar^۶ = ar^۴ \times r^۲ = a_۵ \times r^۲ = ۲۴۳ \times ۹ = ۲۱۸۷$$

---

۷ – مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله های زیر تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می دهند؟



الف) $a \ , b \ , x$

ب) $a \ , x \ , b$

پ) $b \ , a \ , x$

حل: $x^۲ =$ مساحت مربع و $a \times b =$ مساحت مستطیل

بنابراین باید $ab = x^۲$ یعنی واسطهٔ هندسی است. بنابراین گزینه ب درست است.

---

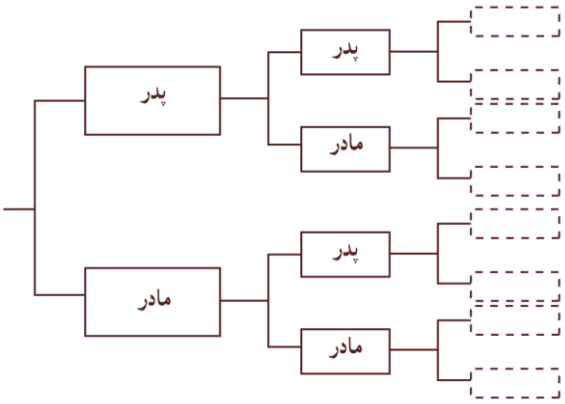
۸ – یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جوّ زمین، در هر دقیقه ٪ ۱۵ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می رود. پس از پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جوّ زمین، چقدر از وزن آن باقی می ماند؟

حل: اگر در هر دقیقه ٪ ۱۵ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می رود پس ٪ ۸۵ باقی می ماند.

$$a_n = ۱۵۰۰۰\left(\frac{۸۵}{۱۰۰}\right)^{n-۱} \Rightarrow a_۵ = ۱۵۰۰۰\left(\frac{۸۵}{۱۰۰}\right)^{۵-۱} \approx ۱۵۰۰۰ \times ۰/۵۲۲ = ۷۸۳۰ \text{ کیلوگرم}$$

دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز حاجی هاشمی دکتر درس

۹ –شخصی پدر و مادر ، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ ، چهار پدر پدر بزرگ و چهار مادر مادر بزرگ و .... دارد.



الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.)

حل: ۲ ,۴ , ۸ , ...

$$a_n = ۲(۲)^{n-۱} = ۲^n \quad \Rightarrow \quad a_{۱۰} = ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴ \text{ نفر}$$

ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص چند نفرند؟

حل:
$$S_{۱۰} = ۲ \times \frac{۱ - ۲^{۱۰}}{۱ - ۲} = ۲ \times \frac{۱ - ۱۰۲۴}{-۱} = ۲ \times \frac{-۱۰۲۳}{-۱} = ۲۰۴۶ \text{ نفر}$$

---

۱۰ – مجموع های زیر را به دست آورید.

الف) $۱ + ۴ + ۱۶ + ... + ۴۰۹۶$

حل:
$$a_۱ = ۱ \quad , \quad r = \frac{۴}{۱} = ۴ \quad , \quad a_n = ۴۰۹۶$$

$$S_n = \frac{a - ra_n}{۱ - r} \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{۱ - ۴ \times ۴۰۹۶}{۱ - ۴} = \frac{۱ - ۱۶۳۸۴}{-۳} = \frac{-۱۶۳۸۳}{-۳} = ۵۴۶۱$$

ب) $\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۲۰} + ... + \frac{۱}{۶۴۰}$

حل:
$$a_۱ = \frac{۱}{۵} \quad , \quad r = \frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۱}{۵}} = \frac{۱}{۲} \quad , \quad a_n = \frac{۱}{۶۴۰}$$

$$S_n = \frac{\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۶۴۰}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۶۴۰}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۱}{۲}} - \frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۶۴۰}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۲ \times ۱۲۸}{۵ \times ۱۲۸} - \frac{۱}{۶۴۰} = \frac{۲۵۶}{۶۴۰} - \frac{۱}{۶۴۰} = \frac{۲۵۵}{۶۴۰}$$

۱۱ – نخستین جملهٔ یک دنبالهٔ هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۲}$ است. کدام جملهٔ دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

حل:

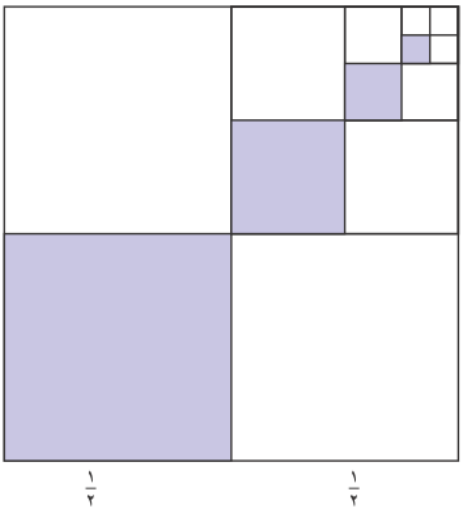
$$a_۱ = ۱۵۳۶ \quad , \quad r = \frac{۱}{۲} \quad , \quad a_n = ۶$$

$$۶ = ۱۵۳۶(\frac{۱}{۲})^{n-۱} \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{n-۱} = \frac{۶}{۱۵۳۶} \Rightarrow \frac{۱}{۲^{n-۱}} = \frac{۱}{۲۵۶} \Rightarrow ۲^{n-۱} = ۲۵۶ \Rightarrow ۲^{n-۱} = ۲^۸ \Rightarrow n-۱ = ۸ \Rightarrow n = ۹$$

$$S_n = \frac{۱۵۳۶ - \frac{۱}{۲} \times ۶}{۱ - \frac{۱}{۲}} = \frac{۱۵۳۶ - ۳}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱۵۳۳}{\frac{۱}{۲}} = ۳۰۶۶$$

---

۱۲ – پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می کنیم. از مربع های باقی مانده، مربعی را که با مربع رنگ آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ آمیزی می کنیم و همین روند را ادامه می دهیم.



الف) چرا دنبالهٔ مساحت های مربع های رنگی ، یک دنبالهٔ هندسی را تشکیل می دهد؟

حل: $\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۱۶}, \frac{۱}{۶۴}, \ldots$ زیرا مساحت هر قسمت از ضرب مساحت قبلی در $\frac{۱}{۴}$ بدست می آید.

ب) اگر روند رنگ آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت های مربع های رنگی از چه رابطه ای به دست می آید؟

حل:

$$S_n = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱ - (\frac{۱}{۴})^n}{۱ - (\frac{۱}{۴})}$$

پ) پس از شش مرحله رنگ آمیزی مربه به روش بالا چه مساحتی از مربع رنگ می شود؟

حل:

$$S_۶ = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱ - (\frac{۱}{۴})^۶}{۱ - (\frac{۱}{۴})} = \frac{۱}{۴} \times \frac{\frac{۱ \times ۴۰۹۶}{۱ \times ۴۰۹۶} - \frac{۱}{۴۰۹۶}}{\frac{۳}{۴}} = \frac{\frac{۴۰۹۶ - ۱}{۴۰۹۶}}{\frac{۳}{۴} \times ۴} = \frac{۴۰۹۵}{۴۰۹۶} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱۳۶۵}{۴۰۹۶}$$

دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز
دکتر درس

حل تمرینات صفحات ۹۴ و ۹۵

۱ – با استفاده از تعریف توان های گویا نشان دهید که $\sqrt{۵}$ ، $\sqrt[۴]{۵^۲}$ ، $\sqrt[۶]{۵^۳}$ با هم برابرند.

حل:

$$\sqrt{۵}=۵^{\frac{۱}{۲}} \qquad \sqrt[۴]{۵^۲}=۵^{\frac{۲}{۴}}=۵^{\frac{۱}{۲}} \qquad \sqrt[۶]{۵^۳}=۵^{\frac{۳}{۶}}=۵^{\frac{۱}{۲}}$$

---

۲ – حاصل هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. (a ، m و n اعداد حقیقی مثبت اند.)

الف) $۳^{\frac{۱}{۳}}\times ۳^{\frac{۱}{۴}}$

حل: $۳^{\frac{۱}{۳}}\times ۳^{\frac{۱}{۴}}=۳^{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}}=۳^{\frac{۴}{۱۲}+\frac{۳}{۱۲}}=۳^{\frac{۷}{۱۲}}=\sqrt[۱۲]{۳^۷}$

ب) $۵^{\frac{۱}{۴}}\times ۵^{(-\frac{۱}{۴})}$

حل: $۵^{\frac{۱}{۴}}\times ۵^{(-\frac{۱}{۴})}=۵^{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}}=۵^{۰}=۱$

پ) $۸^{\frac{۱}{۲}}\times ۲^{\frac{۱}{۲}}$

حل: $۸^{\frac{۱}{۲}}\times ۲^{\frac{۱}{۲}}=۱۶^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۱۶}=۴$

ت) $(۲^۶)^{\frac{۱}{۳}}$

حل: $(۲^۶)^{\frac{۱}{۳}}=۲^{۶\times\frac{۱}{۳}}=۲^{\frac{۶}{۳}}=۲^۲=۴$

ث) $\left(\frac{۳^۴}{۲^۶}\right)^{\frac{۱}{۲}}$

حل: $\left(\frac{۳^۴}{۲^۶}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۳^{۴\times\frac{۱}{۲}}}{۲^{۶\times\frac{۱}{۲}}}=\frac{۳^{\frac{۴}{۲}}}{۲^{\frac{۶}{۲}}}=\frac{۳^۲}{۲^۳}=\frac{۹}{۸}$

ج) $\left(\frac{a^{-\frac{۱}{۲}}}{a^{-\frac{۱}{۴}}}\right)^{-۴}$

حل: $\left(\frac{a^{-\frac{۱}{۲}}}{a^{-\frac{۱}{۴}}}\right)^{-۴}=\frac{a^{-\frac{۱}{۲}\times(-۴)}}{a^{-\frac{۱}{۴}\times(-۴)}}=\frac{a^{\frac{۴}{۲}}}{a^{\frac{۴}{۴}}}=\frac{a^۲}{a^۱}=a$

چ) $۳^{۰/۲۶}\times ۳^{۰/۷۴}$

حل: $۳^{۰/۲۶}\times ۳^{۰/۷۴}=۳^{۰/۲۶+۰/۷۴}=۳^۱=۳$

ح) $(m^{\frac{۳}{۴}}\cdot n^{\frac{۱}{۲}})^۲(m^۲\cdot n^۳)^{\frac{۱}{۲}}$

حل: $(m^{\frac{۳}{۴}}\cdot n^{\frac{۱}{۲}})^۲(m^۲\cdot n^۳)^{\frac{۱}{۲}}=m^{\frac{۳}{۴}\times ۲}\cdot n^{\frac{۱}{۲}\times ۲}\cdot m^{۲\times\frac{۱}{۲}}\cdot n^{۳\times\frac{۱}{۲}}=m^{\frac{۳}{۲}}\cdot n^۱\cdot m^۱\cdot n^{\frac{۳}{۲}}=m^{\frac{۳}{۲}+۱}\cdot n^{\frac{۳}{۲}+۱}=(mn)^{\frac{۵}{۲}}$

۳ – در هریک از تساوی های زیر مقدار x را به دست آورید.

الف) $۸^{x} \times ۹^{۵} = ۷۲^{۵}$

حل: $۸^{x} \times ۹^{۵} = ۷۲^{۵} \Rightarrow ۸^{x} \times ۹^{۵} = ۸^{۵} \times ۹^{۵} \Rightarrow ۸^{x} = ۸^{۵} \Rightarrow x = ۵$

ب) $(۰/۳۶)^{۴} \times (۰/۳۶)^{x} \times (۰/۳۶)^{-۶} = (۰/۳۶)^{۷}$

حل: $(۰/۳۶)^{۴} \times (۰/۳۶)^{x} \times (۰/۳۶)^{-۶} = (۰/۳۶)^{۷} \Rightarrow (۰/۳۶)^{-۲+x} = (۰/۳۶)^{۷} \Rightarrow -۲ + x = ۷ \Rightarrow x = ۹$

پ) $(۳^{x})^{۶} = \frac{۱}{۳^{۲}}$

حل: $(۳^{x})^{۶} = \frac{۱}{۳^{۲}} \Rightarrow ۳^{۶x} = ۳^{-۲} \Rightarrow ۶x = -۲ \Rightarrow x = \frac{-۲}{۶} \Rightarrow x = \frac{-۱}{۳}$

ت) $\frac{x^{۵} \times ۱۵^{۳}}{۳^{۲} \times ۳^{۵} \times ۳} = ۵^{۸}$

حل: $\frac{x^{۵} \times ۱۵^{۳}}{۳^{۲} \times ۳^{۵} \times ۳} = ۵^{۸} \Rightarrow \frac{x^{۵} \times ۱۵^{۳}}{۳^{۸}} = \frac{۵^{۸}}{۱} \Rightarrow x^{۵} \times ۱۵^{۳} = ۱۵^{۸} \Rightarrow x^{۵} = \frac{۱۵^{۸}}{۱۵^{۳}} \Rightarrow x^{۵} = ۱۵^{۵} \Rightarrow x = ۱۵$

فصل ۳

۴ – همان طور که می دانید، حجم کره ای به شعاع r با استفاده از فرمول $v = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ (v حجم کره) به دست می آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می توان با استفاده از مفهوم ریشه گیری و توان های گویا، شعاع کره ای به حجم v را از فرمول زیر به دست آورد. $r = \left(\frac{۳v}{۴\pi}\right)^{\frac{۱}{۳}}$

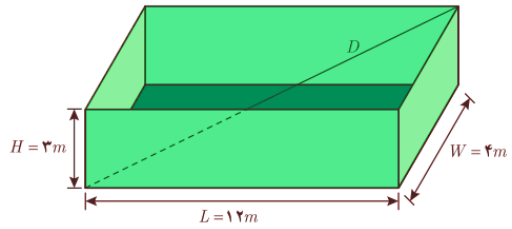
حل: $\left(\frac{۳v}{۴\pi}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \left(\frac{۳(\frac{۴}{۳}\pi r^{۳})}{۴\pi}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \left(\frac{۴\pi r^{۳}}{۴\pi}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \left(r^{۳}\right)^{\frac{۱}{۳}} = r^{۳ \times \frac{۱}{۳}} = r$

ب) شعاع این تانکر کره ای شکل را که حجم آن $\frac{۳۲\pi}{۳}$ است، به دست آورید.

حل: $r = \left(\frac{۳(\frac{۳۲\pi}{۳})}{۴\pi}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \left(\frac{۳۲\pi}{۴\pi}\right)^{\frac{۱}{۳}} = (۸)^{\frac{۱}{۳}} = \left(۲^{۳}\right)^{\frac{۱}{۳}} = ۲^{۳ \times \frac{۱}{۳}} = ۲$

دکتر درس
دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز

۵- اگر D قطر جعبهٔ زیر باشد، اندازهٔ آن از طریق تابع $D=(L^۲+W^۲+H^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ (L طول، W عرض و H ارتفاع جعبه) به دست می آید.



الف) با توجه به شکل، اندازهٔ D را به دست آورید.

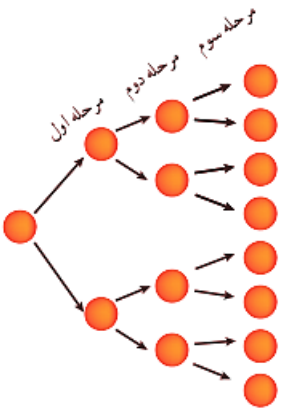
حل: $(۱۲^۲+۴^۲+۳^۲)^{\frac{۱}{۲}}=(۱۴۴+۱۶+۹)^{\frac{۱}{۲}}=(۱۶۹)^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$

ب) اگر اندازهٔ $L=W=H=۱\ m$ باشد، اندازهٔ D را به دست آورید.

حل: $(۱^۲+۱^۲+۱^۲)^{\frac{۱}{۲}}=(۱+۱+۱)^{\frac{۱}{۲}}=(۳)^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳}$

حل تمرینات صفحات ۱۰۲ و ۱۰۳

۱ – در پژوهشکدهٔ رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول های بنیادی جنین انسان تولید می شود. این سلول ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می توانند تمام انواع سلول های بدن نظیر عصب و ماهیچهٔ قلب را به وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.



اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند:

الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول های تکثیر شده ۲۰۴۸ سلول خواهد شد؟

حل: مرحلهٔ یازدهم $n=۱۱$ $\Rightarrow$ $۲^n=۲۰۴۸$ $\Rightarrow$ $۲^n=۲^{۱۱}$ $\Rightarrow$ $۲,۴,۸,۱۶,۳۲,۶۴,۱۲۸,۲۵۶,۵۱۲,۱۰۲۴,۲۰۴۸,...$

ب) در مرحلهٔ هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

حل: $a_۸=۲^۸=۲۵۶$

پ) آیا می توانید الگویی برای تکثیر سلول ها مشخص کنید؟

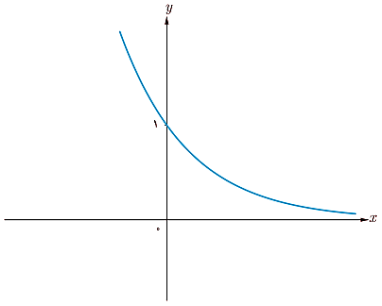
حل: تعداد سلول ها $=۲^{(\text{تعداد مراحل})}$ یعنی: $a_n=۲^n$

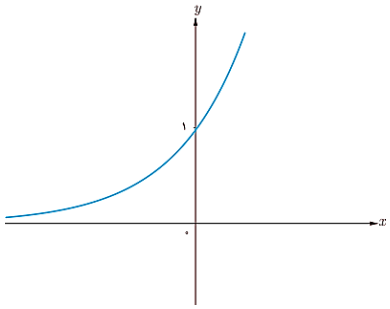
۲ – یک نمونهٔ واقعی (شبیه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

حل: مانند کاهش وزن یک پنجره آهنی بر اثر زنگ زدگی ، کاهش کربن ۱۴ در بدن ، کاهش وزن مواد رادیو اکتیو و ...

---

۳ – در شکل صفحه بعد، نمودار دو تابع $y=\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$ و $y=۴^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.



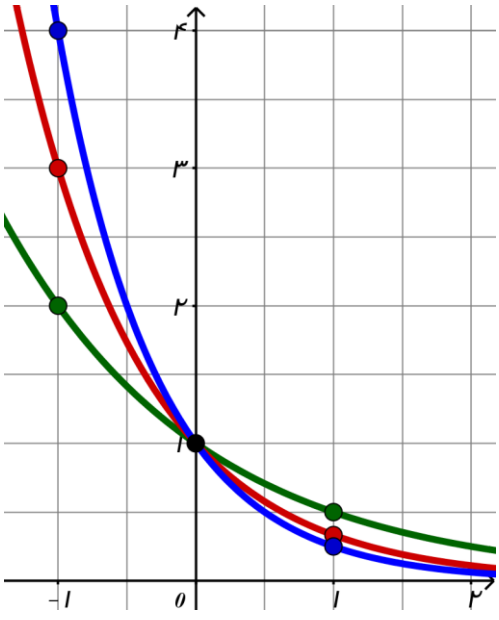


حل: $y=\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$ $\qquad$ $y=۴^x$

---

۴ – نمودار توابع $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ ، $y=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ و $y=\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$ را در یک دستگاه (صفحهٔ مختصات) رسم کنید و تفاوت ها و شباهت های آنها را برشمرید.

حل: شباهت ها: هر سه نمودار محور y ها در نقطه $(۰,۱)$ قطع می کنند. – هر سه نمودار محور x ها را قطع نمی کنند. – در هر سه نمودار با افزایش مقدار x، مقدار y نیز کاهش می یابد. دامنه هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است و برد هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. ($\mathbb{R}^+$) تفاوت ها: سرعت کاهش مقدار y هایشان برابر نیست.



x	۱	۰	-۱
$y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲

x	۱	۰	-۱
$y=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳

x	۱	۰	-۱
$y=\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$	$\frac{۱}{۴}$	۱	۴

دکتر درس آزاده حاجی هاشمی
دبیر ریاضی ناحیه ۲ اهواز

۵ – نمودار توابع $y=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ و $y=۳^x$ را در یک دستگاه (صفحهٔ مختصات) رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

حل: شباهت ها: هر دو نمودار محور yها در نقطه $(۰,۱)$ قطع می کنند. – هر دو نمودار محور xها را قطع نمی کنند. –دامنه هر دو تابع مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است و برد هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. ($\mathbb{R}^+$)

تفاوت ها: در نمودار با $y=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ افزایش مقدار x، مقدار y نیز کاهش می یابد. ولی در نمودار با $y=۳^x$ افزایش مقدار x، مقدار y نیز افزایش می یابد.

حل تمرینات صفحه ۱۰۵

۱ – در یکی از فعالیت های بخش اوّل این درس، به یک شرکت تولید کنندهٔ محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایهٔ این سهام دار اضافه خواهد شد؟

حل: $f(۱۰)=۴۰۰۰۰۰۰۰\times(۱+۰/۱۴)^{۱۰}=۴۰۰۰۰۰۰۰\times(۱/۱۴)^{۱۰}\approx ۴۰۰۰۰۰۰۰\times ۳/۷۰۷=۱۴۸۲۸۰۰۰۰$

---

۲ – جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

حل: $f(۱۰)=۱۰۰۰۰۰۰\times(۱+۰/۰۶)^{۱۰}=۱۰۰۰۰۰۰\times(۱/۰۶)^{۱۰}\approx ۱۰۰۰۰۰۰\times ۱/۷۹=۱۷۹۰۰۰۰$

---

۳ – جزیره ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه ها باموش ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید. $f(t)=۲۳۵۷۶\times(۱-۰/۰۲۵)^t=۲۳۵۷۶\times(۰/۹۷۵)^t$

$f(۱)=۲۳۵۷۶\times(۰/۹۷۵)^۱=۲۲۹۸۶/۶$
$f(۲)=۲۳۵۷۶\times(۰/۹۷۵)^۲\approx ۲۳۵۷۶\times(۰/۹۵)=۲۲۳۹۷/۲$
$f(۳)=۲۳۵۷۶\times(۰/۹۷۵)^۳\approx ۲۳۵۷۶\times(۰/۹۲)=۲۱۶۸۹/۹۲$
$f(۴)=۲۳۵۷۶\times(۰/۹۷۵)^۴\approx ۲۳۵۷۶\times(۰/۹۰)=۲۱۲۱۸/۴$

$f(۵)=۲۳۵۷۶\times(۰/۹۷۵)^{۵}\approx ۲۳۵۷۶\times(۰/۸۸)=۲۰۷۴۶/۸۸$
$f(۶)=۲۳۵۷۶\times(۰/۹۷۵)^{۶}\approx ۲۳۵۷۶\times(۰/۸۵)=۲۰۰۳۹/۶$
$f(۷)=۲۳۵۷۶\times(۰/۹۷۵)^{۷}\approx ۲۳۵۷۶\times(۰/۸۳)=۱۹۵۶۸/۰۸$
$f(۸)=۲۳۵۷۶\times(۰/۹۷۵)^{۸}\approx ۲۳۵۷۶\times(۰/۸۱)=۱۹۰۹۶/۵۶$
$f(۹)=۲۳۵۷۶\times(۰/۹۷۵)^{۹}\approx ۲۳۵۷۶\times(۰/۷۹)=۱۸۶۲۵/۰۴$
$f(۱۰)=۲۳۵۷۶\times(۰/۹۷۵)^{۱۰}\approx ۲۳۵۷۶\times(۰/۷۷)=۱۸۱۵۳/۵۲$

ب) همین کار را برای جمعیت گربه ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید. $g(t)=۱۵۷۸۶\times(۱+۰/۰۱۸)^{t}=۲۳۵۷۶\times(۱/۰۱۸)^{t}$

$g(۱)=۱۵۷۸۶\times(۱/۰۱۸)^{۱}=۱۶۰۷۰/۱۴۸$
$g(۲)=۱۵۷۸۶\times(۱/۰۱۸)^{۲}\approx ۱۵۷۸۶\times(۱/۰۳)=۱۶۲۵۹/۵۸$
$g(۳)=۱۵۷۸۶\times(۱/۰۱۸)^{۳}\approx ۱۵۷۸۶\times(۱/۰۵)=۱۶۵۷۵/۳$
$g(۴)=۱۵۷۸۶\times(۱/۰۱۸)^{۴}\approx ۱۵۷۸۶\times(۱/۰۷)=۱۶۸۹۱/۰۲$
$g(۵)=۱۵۷۸۶\times(۱/۰۱۸)^{۵}\approx ۱۵۷۸۶\times(۱/۰۹)=۱۷۲۰۶/۷۴$
$g(۶)=۱۵۷۸۶\times(۱/۰۱۸)^{۶}\approx ۱۵۷۸۶\times(۱/۱۱)=۱۷۵۲۲/۴۶$
$g(۷)=۱۵۷۸۶\times(۱/۰۱۸)^{۷}\approx ۱۵۷۸۶\times(۱/۱۳)=۱۷۸۳۸/۱۸$
$g(۸)=۱۵۷۸۶\times(۱/۰۱۸)^{۸}\approx ۱۵۷۸۶\times(۱/۱۵)=۱۸۱۵۳/۹$
$g(۹)=۱۵۷۸۶\times(۱/۰۱۸)^{۹}\approx ۱۵۷۸۶\times(۱/۱۷)=۱۸۴۶۹/۶۲$
$g(۱۰)=۱۵۷۸۶\times(۱/۰۱۸)^{۱۰}\approx ۱۵۷۸۶\times(۱/۱۹)=۱۸۷۸۵/۳۴$

پ) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه ها بیشتر از موش ها می شود؟

حل: $\underset{۱۸۷۸۵/۳۴}{g(۱۰)} > \underset{۱۸۱۵۳/۵۲}{f(۱۰)}$

ت) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش ها و گربه ها با یکدیگر برابر می شود؟

حل: بین سال نهم و دهم

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه ها و موش ها چه اتفاقی می افتد؟

حل: اگر طبق این توابع جمعیت موش ها و گربه ها را حساب کنیم تعداد موش ها کم و کمتر می شود و تعداد گربه ها زیاد و زیادتر می شود. اما در طبیعیت وقتی تعداد موش ها کم شود به دلیل نبود خوراک برای گربه ها گربه ها هم کم و کمتر می شود.