

ریاضی ۱

پایه می دهم « رشته های علوم تجربی و ریاضی و فیزیک »

فصل ۱ : مجموعه ، الگو و دنباله

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

مهر ۱۳۹۹

درس اول : مجموعه ها (یادآوری و تکمیل)

قسمت اول : یادآوری

در پایه های قبلی با مجموعه و مفهوم آن آشنا شده اید و می دانید که مجموعه ، دسته ای از اشیای کاملاً معین می باشد. همچنین می دانید یک مجموعه را با یک حرف بزرگ الفبای لاتین نامگذاری می کنند. هر یک از اشیاء تشکیل دهنده مجموعه را عضو آن مجموعه می نامند. اگر شیء a در مجموعه A باشد، می گوئیم a عضو مجموعه A است و می نویسیم $a \in A$ و اگر شیء a در مجموعه A نباشد، می گوئیم a عضو مجموعه A نیست و می نویسیم $a \notin A$.

تمرین ۱ : اگر A مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی مضرب ۳ باشد.

الف : مجموعه A را با عضوهایش بنویسید.

ب : در هر مورد جای خالی را با نماد عضویت یا عدم عضویت کامل کنید.

$$9 \square A$$

$$5 \square A$$

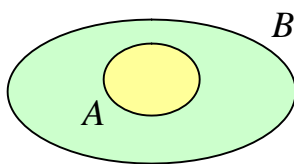
حل :

$$9 \in A$$

$$5 \notin A$$

$$A = \{3, 6, 9\}$$

اگر مجموعه ای دارای عضو نباشد، آنرا تهی می نامند. مانند مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی مضرب ۱۱ مجموعه تهی را با نماد Φ یا $\{ \}$ نمایش می دهند.



$$A \subseteq B$$

در سال قبل یادگرفتید که ، هرگاه تمام عضوهای مجموعه A متعلق به مجموعه B باشند، می گویند A زیر مجموعه B است و می

نویسند $A \subseteq B$ و اگر چنین نباشد می نویسند $A \not\subseteq B$

همچنین به یاد می آورید که هر مجموعه زیر مجموعه خود است و مجموعه تهی زیر مجموعه تمام مجموعه ها است.

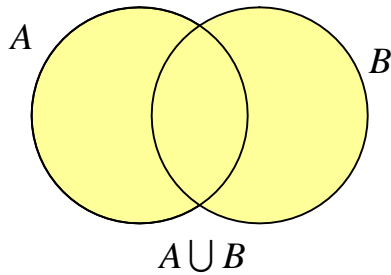
تمرین ۲ : مجموعه اعداد طبیعی و فرد کمتر از ۱۰ را با عضوهای آن نوشته. سپس زیر مجموعه ای از

آن بنویسید که عضوهای آن عدد اول باشند.

تمرین ۳ : تمام زیر مجموعه های مجموعه $A = \{5, 8, 3\}$ را بنویسید.

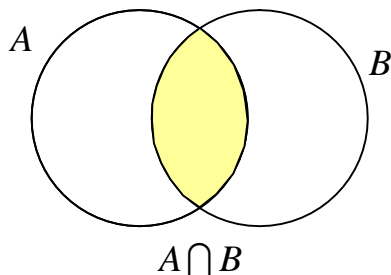
اعمالی که برای دو مجموعه A و B ، در سال گذشته، با آنها آشنا شده اید، عبارتند از:

الف: اجتماع دو مجموعه $(A \cup B)$



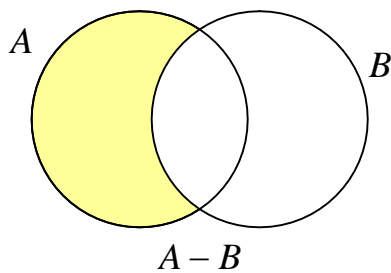
مجموعه ای است شامل عضو هایی که در A یا در B یا در هر دو می باشند.

ب: اشتراک دو مجموعه $(A \cap B)$



مجموعه ای است شامل عضو هایی که هم در A و هم در B (در هر دو) می باشند.

ج: تفاضل دو مجموعه $(A - B)$



مجموعه ای است شامل عضو هایی که در A باشند ولی در B نباشند.

تمرین ۴: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ مجموعه های زیر را بنویسید.

الف) $A \cup B$ ب) $A \cap B$ ج) $A - B$ د) $B - A$

تمرین ۵: اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{c, d, e, f, g\}$ مجموعه های زیر را بنویسید.

الف) $(A \cup B) - (A \cap B)$ ب) $(A - B) \cup (B - A)$

نتیجه: برای هر دو مجموعه A و B تساوی زیر برقرار می باشد.

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

تمرین ۶: برای دو مجموعه A و B ، اگر $A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ و $A \cap B = \{3, 7, 8\}$ در این

صورت مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ را با عضوهایش بنویسید.

قسمت دوم : آشنایی با مجموعه های خاص

برخی از مجموعه های مهم که در سال های گذشته نیز با آنها آشنا شده اید به شرح زیر می باشند.

۱ : اعداد طبیعی

اعدادی که برای شمارش بکار می روند را اعداد طبیعی می نامند. مانند شمارش صندلی ها، تعداد دانش آموزان، افراد خانواده، تعداد دفعاتی که از تلفن استفاده شده است و ... این اعداد عبارتند از :

..... ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰

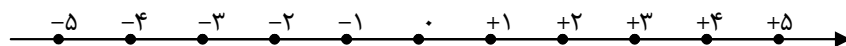
۲ : اعداد حسابی

اعداد طبیعی به همراه صفر اعداد حسابی گفته می شوند.

..... ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰

۳ : اعداد صحیح

می توان اعداد طبیعی را به کمک نقاط روی یک محور^۱ به شکل زیر نمایش داد. اعداد طبیعی را اعداد مثبت فرض می کنیم و در جهت مخالف محور نقاط متقارن آنها نسبت به مبدأ را معین می کنیم. در این صورت نقاط متناظر با اعداد منفی بدست می آیند. هر یک از این اعداد، قرینه ی یک عدد طبیعی می باشند. اعداد طبیعی و قرینه های آنها به همراه صفر را اعداد صحیح می نامند.



۴ : اعداد گویا (مُنطق)

واضح است که در بسیاری از اندازه گیری ها و محاسبات اعداد صحیح کافی نیستند. به عنوان مثال در اندازه گیری وزن، وزن بسیاری از اجسام را نمی توان با یک عدد صحیح نمایش داد. لذا برای رفع این مشکل می توان اعداد گویا را معرفی کرد.

^۱ - خطی که روی آن یک مبدأ، یک جهت و یک پاره خط واحد انتخاب شده باشد را یک محور اعداد می نامند. در محور اعداد جهت سمت راست را به عنوان جهت مثبت انتخاب می کنند. بدیهی است جهت مخالف آن جهت منفی است.

هر عدد را که بتوان آن را به شکل یک کسر طوری نوشت که صورت و مخرج آن عدد صحیح و مخرج آن غیر صفر باشد، را عدد گویا می نامند. اگر a و b دو عدد صحیح و $b \neq 0$ باشد، در این صورت عدد $\frac{a}{b}$ یک

عدد گویا است. نمایش یک عدد گویا به شکل یک کسر را **نمایش متعارفی** می نامند.

مثال: هر یک از اعداد زیر گویا هستند.

$$\frac{3}{5}, \frac{-5}{7}, 2\frac{3}{5}, -3/12, 5/7, 15, 1, -4, 0, -1$$

نتیجه:

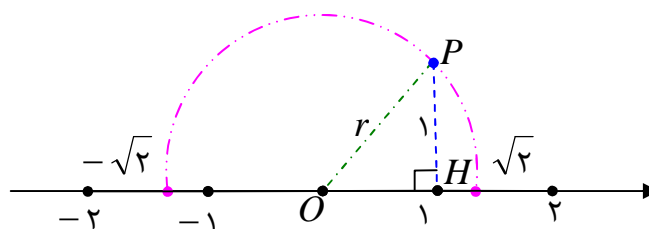
۱. تمام اعداد صحیح، گویا هستند.

۲. طبق تعریف مخرج هیچ کسری نمی تواند صفر باشد.

۵: اعداد گنگ(اصم)

زمانی تصور می شد که طول هر پاره خط یک عدد گویا است. روزی دانشمندان متوجه شدند که اگر طول دو ضلع زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه برابر یک باشند، طبق قضیه فیثاغورس طول وتر برابر $\sqrt{2}$ است. این عدد، گویا نیست ولی طول یک پاره خط است. آنها متوجه شدند که این تصور درست نیست و پاره خط هایی وجود دارند که طول آنها عدد گویا نمی باشد. بدین شکل آنها دسته دیگری از اعداد را کشف کردند. آنها این اعداد را اصم یا گنگ نامیدند.

مثال: نمایش عدد $\sqrt{2}$ را روی محور اعداد حقیقی به صورت زیر است.



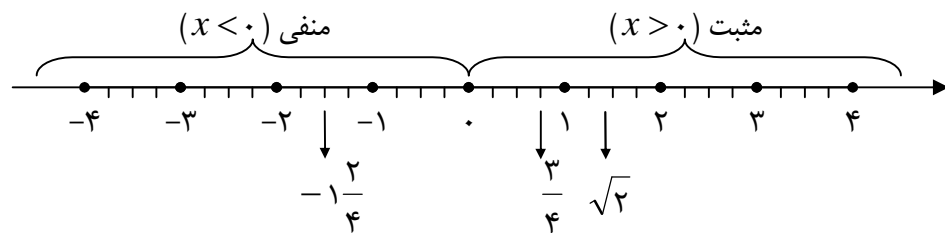
$$OP^2 = PH^2 + OH^2$$

$$\rightarrow r^2 = 1 + 1 \rightarrow r = \sqrt{2}$$

۶: اعداد حقیقی

واضح است که نظیر هر عدد گویا نقطه ای روی محور اعداد می توان یافت ولی نقاطی روی محور وجود دارد که نظیر اعداد گویا نیستند. این اعداد را **اعداد گنگ** نامیدیم. اعداد گویا و اعداد گنگ با هم را اعداد حقیقی می نامند.

لذا می توان گفت که هر نقطه روی محور نظیر یک عدد حقیقی است و هر عدد حقیقی نظیر یک نقطه روی محور است. به همین دلیل چنین محوری را محور اعداد حقیقی می نامند.



مجموعه هایی که معرفی شدند به طور اجمالی می توان به صورت زیر نیز بررسی کرد.

۱: مجموعه ی اعداد طبیعی^۲ $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

۲: مجموعه ی اعداد حسابی $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

۳: مجموعه ی اعداد صحیح $Z = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

۴: مجموعه ی اعداد گویا $Q = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0\}$

۵: مجموعه ی اعداد گنگ $Q' =$ اعدادی که نمی توان آنها را به صورت کسر متعارفی نوشت.

۶: مجموعه ی اعداد حقیقی $R = Q \cup Q'$

^۲ توجه داشته باشید که مجموعه ی اعداد طبیعی دارای چند زیر مجموعه ی خاص نیز می باشد. از جمله:

مجموعه ی اعداد طبیعی زوج $E = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} = \{x \mid x = 2k, k \in N\}$

مجموعه ی اعداد طبیعی فرد $O = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\} = \{x \mid x = 2k - 1, k \in N\}$

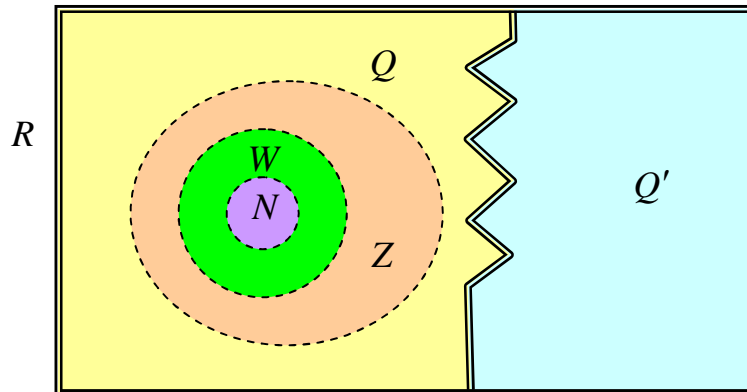
مجموعه ی اعداد اول $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$

تذکر: با توجه به مجموعه های فوق همواره داریم:

۱) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

۲) $Q' \subseteq R$

۳) $Q \cap Q' = \Phi$



تمرین ۷: اعداد $1\frac{2}{3}$ و $-\frac{0}{3}$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

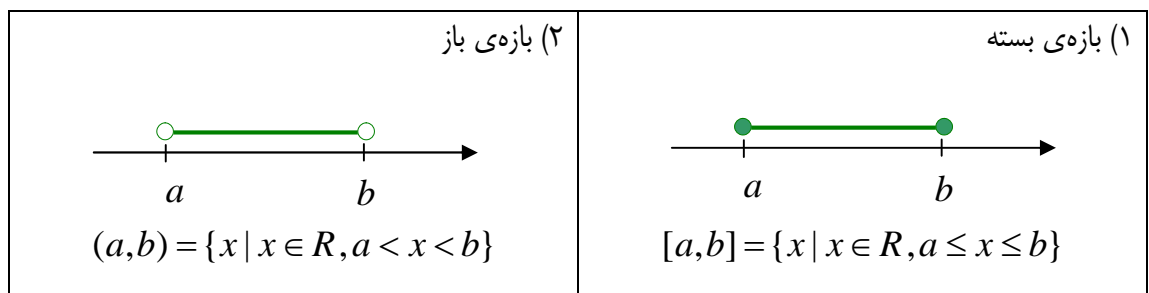
تمرین ۸: اعداد $-\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

قسمت سوم: مفهوم بازه ها

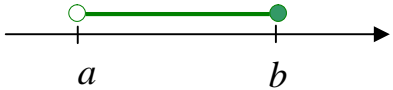
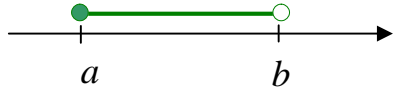
در بسیاری از مفاهیم ریاضی نیاز به زیر مجموعه هایی از اعداد حقیقی داریم. در این صورت می توان از مفهوم بازه ها استفاده کرد. هر قطعه از محور اعداد حقیقی را یک **بازه (فاصله)** می نامند. اگر a و b دو

عدد حقیقی و $a < b$ بازه های زیر را می توان معرفی کرد.


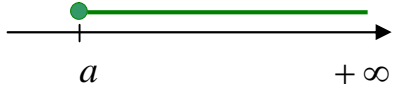
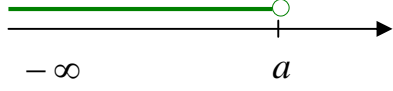
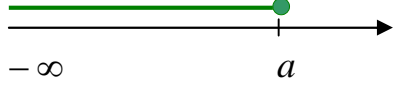
الف: بازه هایی که از دو طرف محدود می باشند.



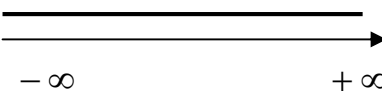
ب : بازه هایی که از یک طرف بسته و از طرف دیگر باز می باشند. (بازه های نیم باز)

(۴)	(۳)
	
$(a, b) = \{x \mid x \in R, a < x \leq b\}$	$[a, b) = \{x \mid x \in R, a \leq x < b\}$

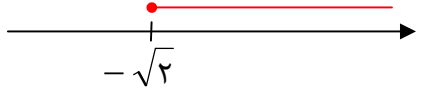
ج : بازه هایی که از یک طرف محدود و از طرف دیگر نامحدود می باشند.^۳

(۶)	(۵)
	
$(a, +\infty) = \{x \mid x \in R, x > a\}$	$[a, +\infty) = \{x \mid x \in R, x \geq a\}$
(۸)	(۷)
	
$(-\infty, a) = \{x \mid x \in R, x < a\}$	$(-\infty, a] = \{x \mid x \in R, x \leq a\}$

د : بازه هایی که از دو طرف نامحدود می باشند.

(۹)

$(-\infty, +\infty) = R$

تمرین ۹: در جدول زیر، خانه های خالی را با نماد خواسته شده، پر کنید.

نماد فاصله	نماد مجموعه	نمایش هندسی
$[-1, 3)$		
	$\{x \mid x \in R, 2 < x < 3\}$	
		

^۳ . بینهایت مفهومی است که در رشته های مختلف ریاضیات (با تعبیرات مختلف) به کار می رود و معمولاً به معنای « فراتر از هر مقدار » است. نشانه ی بینهایت در ریاضیات ∞ است. مفهوم بی نهایت زمانی بکار می رود که می خواهند بیان کنند چیزی پایان ندارد. لذا بی نهایت یک عدد واقعی نیست و نمی توان اعمال ریاضی را روی آن انجام داد.

تمرین ۱۰: هر یک از مجموعه های زیر را به صورت بازه بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

$$۱) A = \{x \in R \mid 0 < x < 1\} \quad ۳) C = \{x \in R \mid -2x + 6 > 0\}$$

$$۲) B = \{x \in R \mid x \geq \sqrt{2}\} \quad ۴) D = \{x \in R \mid x \neq 5\}$$

تمرین ۱۱: هر یک از بازه های زیر را به صورت مجموعه بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.

$$\text{الف) } A = [-2, 5] \quad \text{ب) } B = (3, 7] \quad \text{ج) } C = (-\infty, \sqrt{2})$$

تمرین ۱۲: به کمک نمایش هندسی دو بازه $A = (-1, 4]$ و $B = (2, +\infty)$ مجموعه های زیر را به صورت بازه بنویسید.

$$\text{الف) } A \cup B \quad \text{ب) } A \cap B \quad \text{ج) } A - B \quad \text{د) } B - A$$

تمرین ۱۳: نمایش هندسی دو مجموعه ی زیر را نوشته و سپس تعیین کنید که کدام یک بازه است؟

$$\text{الف) } A = \{x \in N \mid 3 < x \leq 6\} \quad \text{ب) } B = \{x \in R \mid 3 < x \leq 6\}$$

تمرین برای حل:

۱۴: نامعادله های زیر را حل کنید و مجموعه ی جواب آنها را به صورت فاصله بنویسید.

$$\text{الف) } 3x - 5 \geq 2x + 2 \quad \text{ب) } 5 < -3x - 1 \leq 8$$

۱۵: به کمک نمایش هندسی دو بازه $A = (-4, 2]$ و $B = [-1, 3]$ تساوی های زیر را کامل کنید.

$$\text{الف) } A \cup B \quad \text{ب) } A \cap B \quad \text{ج) } A - B \quad \text{د) } B - A$$

۱۶: طرف دوم تساوی های زیر را به صورت بازه بنویسید.

$$۱) A = (-5, 2] \cup [1, 7] = \quad ۴) D = (0, 1) \cap [3, 4) =$$

$$۲) B = (-3, 1) \cap (0, 3) = \quad ۵) E = [0, +\infty) - (4, +\infty) =$$

$$۳) C = [-2, 5) \cap [0, +\infty) = \quad ۶) F = [2, 7) - [3, 7) =$$

۱۷: مجموعه $R - \{3\}$ را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماعی از دو

بازه بنویسید.

تمرین برای حل :

۲۱: دو مجموعه‌ی نامتناهی نام ببرید.

۲۲: دو مجموعه‌ی نامتناهی بنویسید که یکی از آنها زیر مجموعه‌ی دیگری باشد.

۲۳: دو مجموعه‌ی نامتناهی مانند A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک عضوی باشد.

۲۴: دو مجموعه‌ی نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.

۲۵: اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه در مورد متناهی بودن یا نبودن A بحث کنید.

۲۶: درستی یا نادرستی هر یک از عبارات های زیر را مشخص کنید.

الف: زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ی متناهی، متناهی است.

ب: زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.

پ: اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی، متناهی است.

ت: اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.

۲۷: دو زیر مجموعه‌ی نامتناهی از اعداد طبیعی را نام ببرید که مجزا^۵ باشند.

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

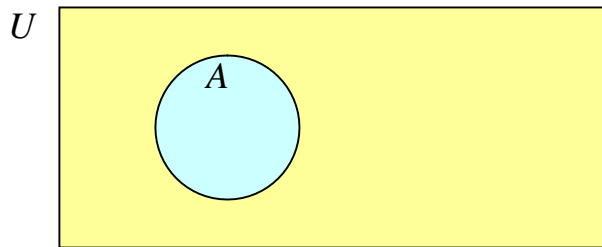
^۵ . دو مجموعه ناتهی که اشتراک آنها، تهی باشد، را جدا از هم (مجزا) می نامند. برای مثال دو مجموعه‌ی زیر جدا از هم هستند.

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad \text{و} \quad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

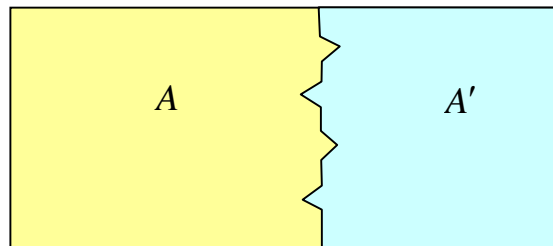
درس دوم: مجموعه‌ی مرجع و متمم یک مجموعه

قسمت اول: مجموعه‌ی مرجع و متمم یک مجموعه

در ریاضیات وقتی پیرامون موضوعی صحبت می‌شود، می‌توان با توجه به موضوع مورد بحث، مجموعه‌ای در نظر گرفت که مجموعه‌های دیگر زیر مجموعه‌ی آن باشند. چنین مجموعه‌ای را مجموعه‌ی مرجع می‌نامند^۱ و آن را با U یا M نمایش می‌دهند. معمولاً در نمایش مجموعه‌ی مرجع با استفاده از نمودار ون آن را با مستطیل نمایش می‌دهند.



هرگاه U مجموعه‌ی مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه‌ی $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' یا A^c نمایش می‌دهیم. به عبارتی دیگر A' شامل تمام عضوهای U است که در A نباشند.



$$A' = U - A$$

مثال: اگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر گرفته شود. در این صورت متمم مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد، مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج است.

تمرین ۱: اگر $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 3\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد، متمم مجموعه‌ی $A = \{-1, 0, 1\}$ را بنویسید.

تمرین ۲: اگر $U = [1, 5]$ مجموعه‌ی مرجع باشد، متمم مجموعه‌ی $A = (2, 3]$ را بنویسید.

^۱ . مجموعه‌ی مرجع به تناسب موضوع و عالم سخن تغییر می‌کند و بزرگترین مجموعه‌ی ممکن پیرامون موضوع مورد بحث است، گرچه اکثراً جهت سادگی آن را محدود می‌کنیم. گاهی ممکن است در مورد خاصیتی از اعداد طبیعی بحث می‌کنیم، در این صورت مجموعه‌ی مرجع تمام اعداد طبیعی است. همچنین ممکن است فقط در مورد اعداد حقیقی بحث کنیم که در اینصورت مجموعه‌ی مرجع را اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. ممکن است دانش آموزان یک مدرسه را مورد مطالعه قرار دهیم، در اینصورت مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی شامل تمام دانش آموزان آن مدرسه است.

نتیجه:

۱: متمم مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی تهی است. ($U' = \Phi$)

۲: متمم مجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ی مرجع است. ($\Phi' = U$)

۳: متمم متمم هر مجموعه برابر همان مجموعه است. ($(A')' = A$)

۴: اجتماع هر مجموعه و متمم آن برابر مجموعه‌ی مرجع است. ($A \cup A' = U$)

۵: اشتراک هر مجموعه و متمم آن برابر مجموعه‌ی تهی است. ($A \cap A' = \Phi$)

تمرین ۳: زیر مجموعه‌ای از اعداد حسابی بنویسید که متمم آن متناهی باشد.

تمرین ۴: مجموعه‌ی اعداد طبیعی سه رقمی بخش پذیر بر ۵ چند عضو دارد؟ آیا این مجموعه متناهی

است؟ چرا؟

توجه: برای تعیین تعداد اعداد طبیعی بخش پذیر بر عدد طبیعی k ابتدا اولین و آخرین عدد بخش پذیر بر k

را تعیین نموده و آنها را به ترتیب a و b می‌نامیم، سپس فرمول زیر را به کار می‌گیریم.

$$n = \frac{b - a}{k} + 1$$

تمرین ۵: اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$ آنها مجموعه

های زیر را با عضوها بنویسید.

۱) A'	۴) $A \cap B'$	۷) $(A \cap B)'$
۲) B'	۵) $(A \cup B)'$	۸) $A' \cup B'$
۳) $A - B$	۶) $A' \cap B'$	۹) $(A \cup B) - (A \cap B)$

نتیجه: تساوی های زیر برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B برقرار می‌باشند^۲.

۱) $A - B = A \cap B'$

۲) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

۳) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

^۲ نتیجه‌ی اول را قانون تبدیل و نتایج دوم و سوم را قوانین دمورگان می‌نامند.

توجه: اگر A یک زیر مجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشد. در این صورت:

$$۱) A \cup A' = U \qquad ۳) U \cup A = U \qquad ۵) U - A = A'$$

$$۲) A \cap A' = \Phi \qquad ۴) U \cap A = A$$

قسمت دوم: تعداد عضوهای اجتماع و تفاضل دو مجموعه‌ی متناهی

در سال گذشته دیدیم که اگر A یک مجموعه‌ی متناهی باشد، تعداد عضوهای آن را به صورت $n(A)$ نمایش می‌دهند.

برای مثال اگر $A = \{x, y, z, t, u\}$ در این صورت $n(A) = ۵$ می‌باشد.

اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند، در این صورت دو رابطه‌ی زیر همواره برقرار هستند.

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ب) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

تمرین ۶: اگر مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B تساوی‌های فوق را برای این دو مجموعه بررسی کنید.

تمرین ۷: برای دو مجموعه‌ی A و B اگر $n(A) = ۱۵$ و $n(A \cup B) = ۳۰$ و $n(A \cap B) = ۵$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

توجه: اگر دو مجموعه A و B جدا از هم هستند، در این صورت $A \cap B = \Phi$ و لذا

$$n(A \cap B) = n(\Phi) = ۰$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که:

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

ب) $n(A - B) = n(A)$

تمرین ۸: اگر U مجموعه‌ی مرجع و متناهی و A زیر مجموعه‌ی آن باشد. در این صورت ثابت کنید.

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

حل:

$$n(A') = n(U - A) = n(U) - n(U \cap A) = n(U) - n(A)$$

تمرین ۹: با توجه به روابط فوق ، روابطی مشابه، برای هر یک از موارد زیر بنویسید.

الف) $n(A \cap B')$ ب) $n(A' \cup B')$ ج) $n(A' \cap B')$

توجه : با استفاده از نمودار ون می توان مسائل مربوط به تعداد عضو های اجتماع و تفاضل دو مجموعه ی متناهی را به راحتی حل نمود.

تمرین ۱۰: در یک کلاس ۲۵ نفری ، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، تعیین کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.

تمرین ۱۱: در یک هتل، ۴۲ نفر وجود دارد. ۲۰ نفر آنان تاجر و ۱۷ نفر جهانگرد هستند. اگر ۷ نفر نه تاجر و نه جهانگرد باشند. تعیین کنید که

الف: در این هتل چند نفر هم تاجر و هم جهانگرد هستند.

ب : چند نفر فقط تاجر هستند.

ج : چند نفر فقط جهانگرد هستند.

تمرین برای حل :

۱۲: فرض کنیم برای دو مجموعه ی A و B زیر مجموعه هایی از مجموعه ی مرجع U باشند. بطوری که

$$n(U) = 100 \text{ و } n(A) = 60 \text{ و } n(B) = 50 \text{ و } n(A \cap B) = 15 . \text{ مطلوب است محاسبه :}$$

الف) $n(A \cup B)$

ب) $n(A \cap B')$

ج) $n(A' \cap B)$

د) $n(A' \cap B')$

هـ) $n(A' \cup B')$

۱۳: اگر A یک زیر مجموعه از مجموعه‌ی مرجع و متناهی U باشد و $n(A) = ۱۲$ و $n(A') = ۸$ باشد. $n(U)$ را تعیین کنید.

۱۴: در یک کلاس ۳۱ نفره، ۲۰ نفر در درس ریاضی و ۱۳ نفر در درس فیزیک قبول شده‌اند. اگر ۷ نفر در هر دو درس مردود شده باشند، تعیین کنید که چند نفر در هر دو درس قبول شده‌اند.

۱۵: در یک کلاس ۳۷ نفری ۱۷ نفر عضو کتابخانه و ۲۵ نفر عضو بسیج دانش آموزی هستند. اگر ۳ نفر عضو هیچ یک از این گروه‌ها نباشند، تعیین کنید چند نفر هم عضو کتابخانه و هم عضو بسیج هستند.

۱۶: در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاتر هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان عضو این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است؟

الف: تعداد دانش آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

ب: تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه سرود باشند.

ج: تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه تئاتر باشند.

۱۷: دانش آموزان رشته‌ی ریاضی یک دبیرستان که ۳۲ نفر هستند، برای المپیادهای کامپیوتر و ریاضی ثبت نام کرده‌اند. اگر ۱۲ نفر برای المپیاد ریاضی و ۴ نفر برای هر دو المپیاد ثبت نام کرده‌اند و ۹ نفر داوطلب ثبت نام در هیچ المپیادی نشده باشند، حساب کنید که چند نفر فقط برای المپیاد کامپیوتر ثبت نام شده‌اند؟

۱۸: تعداد اعداد طبیعی سه رقمی بخش پذیر بر ۷ را تعیین کنید.

۱۹: مجموعه‌ی $S = \{۱۱, ۱۲, ۱۳, \dots, ۹۹\}$ را در نظر بگیرید.

الف: تعداد اعضای مجموعه‌ی S که بر ۴ یا ۶ بخش پذیر باشند، را بیابید.

ب: تعداد اعضای مجموعه‌ی S که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۶ نباشند، را تعیین کنید.

تهیه کننده: جابر عامری عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

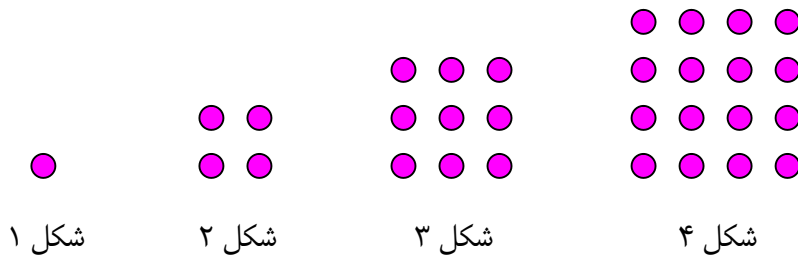
درس سوم : الگو و دنباله

قسمت اول : الگو و دنباله

هر ساختار منظم از اعداد ، اشکال یا تصاویر و را الگو می نامند. اگر تعدادی عدد بر اساس نظم خاصی پشت سرهم قرار گیرند، الگوی بدست آمده را الگوی عددی می نامند. هر یک از اعداد موجود در الگو را جمله می نامیم. جمله ها را با توجه به شماره ی آنها با استفاده از یک حرف اندیس دار نمایش می دهند. برای مثال جمله ی سوم را به صورت a_3 نمایش می دهند.

برای الگوهای عددی می توان یک رابطه ی ریاضی (که نشان دهنده ی ارتباط هر جمله با شماره ی آن، یا ارتباط هر جمله با جمله یا جمله های دیگر می باشد. ^۱) بیان نمود. هر رابطه ی ریاضی دنباله که نشان دهنده ی ارتباط هر جمله با شماره ی آن باشد را **جمله ی عمومی** الگو می نامند.

مثال : با توجه به شکل های زیر الگویی برای تعداد دایره های بکار رفته در هر شکل بنویسید.



شماره ی شکل	۱	۲	۳	۴	n
تعداد دایره ها						

تمرین ۱ : با توجه به پاسخ شما برای مثال فوق، اگر شکل ها را ادامه دهیم، تعداد دایره ها را در شکل دهم را تعیین کنید.

تمرین ۲ : با توجه به شکل های زیر الگویی برای تعداد چوب کبریت های بکار رفته در هر شکل بنویسید.

^۱ . هر رابطه ی ریاضی که نشان دهنده ی ارتباط هر جمله ی الگو با شماره ی آن جمله باشد را جمله ی عمومی و هر رابطه ی ریاضی که نشان دهنده ی ارتباط هر جمله ی الگو با جمله یا جملات دیگر آن الگو باشد را رابطه ی بازگشتی می نامند.



شماره ی شکل	۱	۲	۳	۴	n
تعداد چوب کبریت ها						

در دو تمرین قبل برای هر یک از موارد یک الگوی عددی به دست آوردیم. اگر جملات این الگوهای عددی

را به ترتیب شماره ، پشت سر هم بنویسیم گویند یک **دنباله** تشکیل شده است. مثلاً دنباله ی زیر

$$6 \text{ و } 9 \text{ و } 12 \text{ و } \dots$$

اگر جمله ی عمومی یک الگو معلوم باشد، با جایگزین کردن یک عدد طبیعی به جای n در آن ، می توان یک جمله از آن را بدست آورد.

مثال : جمله ی عمومی یک الگو به صورت $a_n = 2^n - 3n$ می باشد. جمله ی پنجم این الگو را به دست آورید.

حل :

$$a_5 = 2^5 - 3(5) = 32 - 15 = 17$$

تمرین ۳: جمله ی عمومی یک الگو به صورت $t_n = 3n + 2$ می باشد. جملات این الگو را بنویسید.

تمرین ۴: جمله ی عمومی یک الگو به صورت $t_n = \frac{n(n-1)}{2}$ می باشد. جملات این الگو را بنویسید.

قسمت دوم : الگوهای خطی

هر الگو که در آن ، اختلاف بین هر دو جمله‌ی متوالی عدد ثابتی باشد را الگوی خطی می نامند.

مانند الگوی زیر که اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن عدد ۳ می باشد.

$$\dots \text{ و } ۱۳ \text{ و } ۱۰ \text{ و } ۷ \text{ و } ۴$$

تمرین ۵ : آیا الگوی زیر، خطی است؟ چرا؟

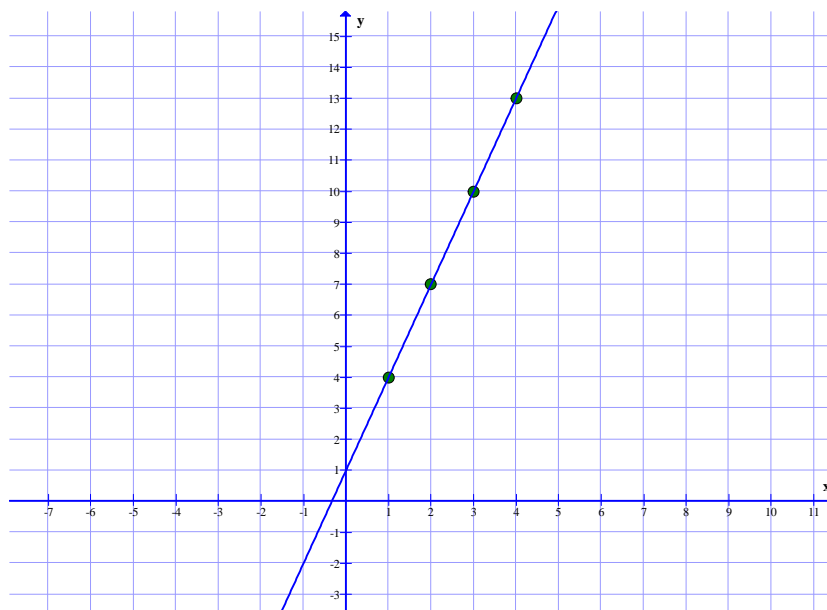
$$\dots \text{ و } ۱۶ \text{ و } ۱۱ \text{ و } ۷ \text{ و } ۴$$

دلیل نامگذاری الگوهایی که اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آنها عدد ثابت باشد، این است که اگر متناظر با هر جمله‌ی دنباله‌ی مربوط به الگوی خطی، یک نقطه در نظر بگیریم. نقاط به دست آمده در دستگاه مختصات در یک راستا قرار می گیرند. توجه کنید که در این حالت مختصات هر نقطه را به صورت (n, t_n) در نظر بگیرید. برای مثال در الگوی خطی فوق مختصات نقاط به صورت زیر می باشند.

$$\dots \text{ و } (۴, ۱۳) \text{ و } (۳, ۱۰) \text{ و } (۲, ۷) \text{ و } (۱, ۴)$$

تمرین ۶ : نقاط متناظر با جملات دنباله‌ی مربوط به الگوی فوق را در دستگاه مختصات مشخص کرده و راستای آنها را معلوم کنید.

حل : به راحتی می توان نقاط متناظر را منطبق بر یک خط راست^۲ مشاهده کرد.

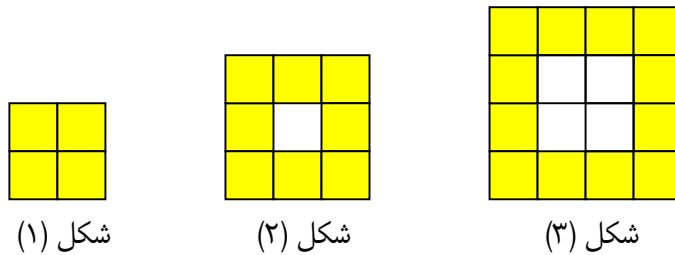


^۲ . معادله‌ی این خط $y = 3x + 1$ است.

نتیجه: جمله ی عمومی هر الگوی خطی به صورت زیر می باشد که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

$$t_n = an + b$$

تمرین ۷: الگوی مربوط به شکل زیر را با توجه به تعداد مربع های رنگی در هر شکل بنویسید.



شماره ی شکل	۱	۲	۳	۴	n
تعداد مربع های رنگی						

تمرین ۸: توضیح دهید که چرا الگوی مربوط به تمرین قبل، خطی است؟

تمرین ۹: جمله ی عمومی یک الگوی خطی به صورت $t_n = -3n + 5$ جمله ی دهم این الگو را تعیین کنید.

تمرین ۱۰: جمله ی عمومی الگوی خطی زیر را بنویسید.

.... ۱۱ و ۸ و ۵

حل: اختلاف هر دو جمله ی متوالی این الگو برابر ۳ است. پس جمله ی عمومی به صورت:

$$t_n = 3n + b$$

می باشد. و چون جمله ی اول الگو برابر ۵ است. پس می توان نوشت: $5 = 3(1) + b$ یعنی $b = 2$ در نهایت داریم.

$$t_n = 3n + 2$$

تمرین ۱۱: در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می باشند.

الف: جمله ی عمومی این الگو را بنویسید.

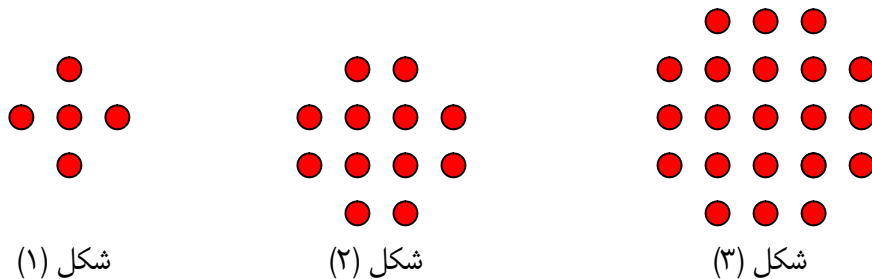
ب: پنج جمله ی اول این الگو را به دست آورید.

قسمت سوم : الگوهای غیرخطی

برخی از الگوهای عددی خطی نمی باشند، چنین الگوهایی را الگوهای غیرخطی می نامند. برای مثال الگوی مربوط به دنباله‌ی زیر غیر خطی است. (چرا؟)

... و ۳۲ و ۲۱ و ۱۲ و ۵

با رسم نمودار تصویری، به راحتی الگوی مربوط به چنین الگوهایی را می توان به دست آورد. برای مثال تعداد دایره های شکل زیر در هر مورد ، نشان دهنده‌ی الگوی فوق است.



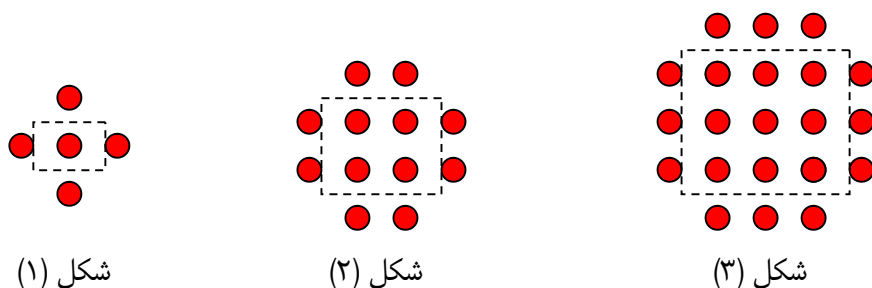
که جمله‌ی عمومی ، دنباله‌ی این الگو به صورت زیر است.

$$t_n = n^2 + 4n$$

تمرین ۱۲ : با نگاه مربعی به هر شکل ، الگوی فوق را به دست آورید.

حل :

روش اول : هر شکل از یک دایره‌ی درونی و چند دایره‌ی کناری تشکیل شده است.



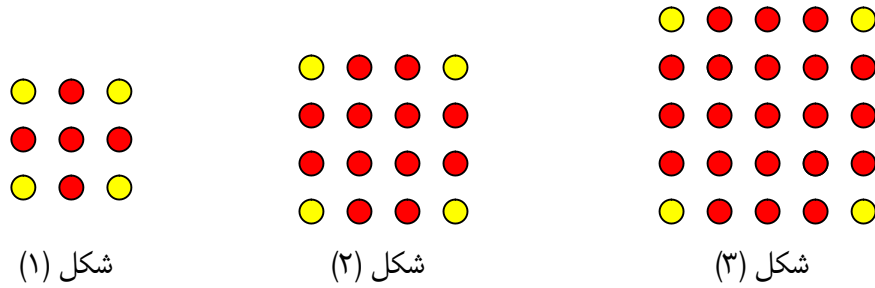
حال جدول زیر را تشکیل می دهیم.

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد کل دایره ها	$(1)^2 + 4(1) = 5$	$(2)^2 + 4(2) = 12$	$(3)^2 + 4(3) = 21$

لذا تعداد دایره ها را در برای شکل n ام می توان به صورت زیر بدست آورد.

$$t_n = (n)^2 + 4n$$

روش دوم: هر شکل را با اضافه کردن چهار دایره به یک مربع تبدیل می کنیم.



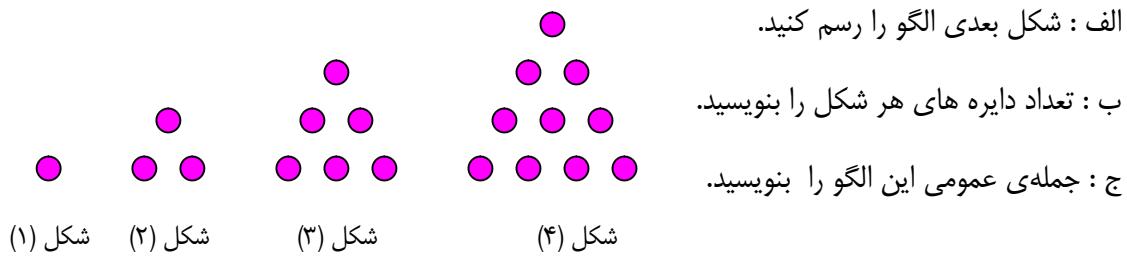
حال جدول زیر را تشکیل می دهیم.

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد کل دایره ها	$(1+2)^2 = 3^2 = 9$	$(2+2)^2 = 4^2 = 16$	$(3+2)^2 = 5^2 = 25$
تعداد دایره های اصلی	$9 - 4 = 5$	$16 - 4 = 12$	$25 - 4 = 21$

لذا تعداد دایره ها را در برای شکل n ام می توان به صورت زیر بدست آورد.

$$t_n = (n+2)^2 - 4 \rightarrow t_n = n^2 + 4n + 4 - 4 \rightarrow \boxed{t_n = n^2 + 4n}$$

تمرین ۱۳: الگوی هندسی زیر را در نظر بگیرید.

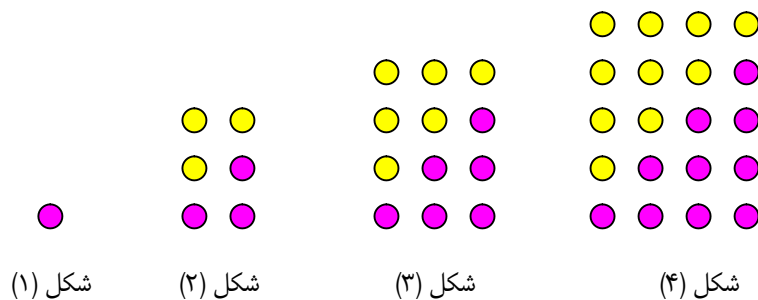


الف: شکل بعدی الگو را رسم کنید.

ب: تعداد دایره های هر شکل را بنویسید.

ج: جمله ی عمومی این الگو را بنویسید.

حل: می توانیم از شکل های دوم به بعد با دو برابر کردن نقاط متناظر با هر شکل یک مستطیل ساخت.



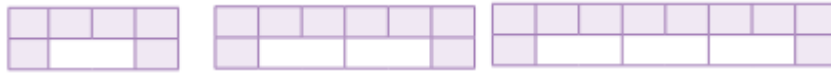
لذا تعداد واقعی دایره های هر الگو به صورت $t_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ است.

۳. هر دنباله به صورت ... و ۱۵ و ۱۰ و ۶ و ۳ و ۱ را یک دنباله ی مثلثی می نامند. جمله ی عمومی این دنباله به صورت

$$t_n = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ است.}$$

تمرین برای حل :

۱۴ : به الگوی هندسی زیر دقت کنید.



الف : شکل بعدی الگو را رسم کنید.

ب : تعداد کاشی های سفید و تیره را برای هر شکل بنویسید.

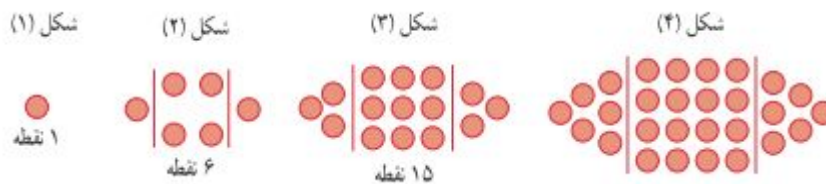
ج : جمله ی عمومی مربوط به هر یک از الگوهای کاشی های سفید و تیره را بنویسید.

د : حساب کنید که برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است.

هـ : آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ در صورت وجود تعداد کاشی های سفید

آن تعیین کنید.

۱۵ : الگوی زیر را در نظر بگیرید.



ب : تعداد نقاط هر شکل را بنویسید.

الف : شکل بعدی الگو را رسم کنید.

د : حساب کنید که شکل دهم این الگو چند نقطه دارد؟

ج : جمله ی عمومی این الگو را بنویسید.

۱۶ : بیست و یکمین جمله ی دنباله ی مثلثی را تعیین کنید.

قسمت چهارم : دنباله

اگر یک سری عدد به ترتیب پشت سر هم نوشته شوند، دنباله تشکیل می شود. هر دنباله هم می تواند دارای

الگوی خاصی باشد و هم می تواند بدون الگو باشد. هر یک از اعداد موجود در دنباله را جمله می نامیم. اگر

دنباله ای دارای الگوی خاصی باشد ، آنگاه رابطه ی موجود در آن را جمله ی عمومی دنباله می نامند.

مثال ۱ : اعداد زیر به همین ترتیب ، یک دنباله محسوب می شوند.

... و ۱۴ و ۱۱ و ۸ و ۵

که جمله ی عمومی آن می شود. $t_n = 3n + 2$

مثال ۲: جمله ی اول یک دنباله برابر ۵ است و برای جملات دوّم به بعد رابطه ی زیر برقرار است.

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

پنج جمله ی اول این دنباله را بنویسید.

حل: با توجه به رابطه ی فوق می توان نوشت:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 11$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 23$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 47$$

$$a_5 = 2a_4 + 1 = 95$$

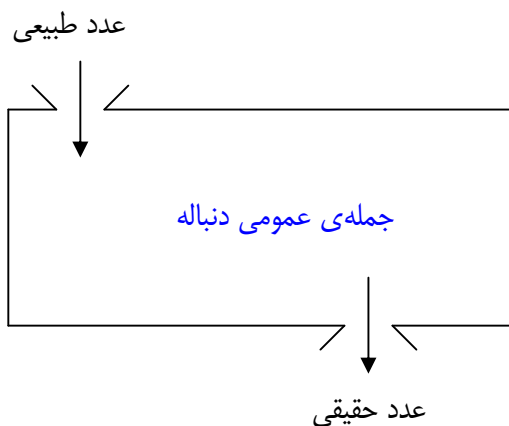
لذا این دنباله به صورت زیر است.

.... و ۹۵ و ۴۷ و ۲۳ و ۱۱ و ۵

توجه: برای درک بهتر مفهوم دنباله ی عددی دارای الگو به تعریف زیر دقت کنید.

هر عبارت جبری بر حسب یک حرف (مانند n) را یک **دنباله** می نامند. هرگاه عدد طبیعی می گیرد و عدد

حقیقی می دهد.



برای مثال عبارت $t_n = \frac{n}{2n+1}$ یک دنباله است.

زیرا با جایگزین کردن یک عدد طبیعی به جای n می

توان یک عدد حقیقی به دست آورد. هر کدام از اعداد

حاصل را یک **جمله** می نامند و این عبارت جبری را

جمله ی عمومی دنباله می گویند.

مثال: عبارت $t_n = \frac{3n+1}{n^2}$ یک دنباله است.

$$n=1 \rightarrow t_1 = \frac{3(1)+1}{(1)^2} = \frac{4}{1} = 4 \quad \text{جمله‌ی اوّل}$$

$$n=2 \rightarrow t_2 = \frac{3(2)+1}{(2)^2} = \frac{7}{4} \quad \text{جمله‌ی دوّم}$$

$$n=3 \rightarrow t_3 = \frac{3(3)+1}{(3)^2} = \frac{10}{9} \quad \text{جمله‌ی سوّم}$$

$$n=4 \rightarrow t_4 = \frac{3(4)+1}{(4)^2} = \frac{13}{16} \quad \text{جمله‌ی چهارم}$$

.....

$$t_n = \frac{3n+1}{n^2} \quad \text{جمله‌ی عمومی (جمله‌ی } n \text{ ام)}$$

جملات این دنباله را می توان به شکل زیر نیز نوشت :

$$4 \text{ و } \frac{7}{4} \text{ و } \frac{10}{9} \text{ و } \frac{13}{16} \text{ و } \dots$$

توجه : جمله‌ی عمومی یک دنباله می تواند یک عدد ثابت نیز باشد. مثلاً $t_n = 5$

در این صورت این دنباله را **دنباله‌ی ثابت** می نامند و می نویسند.

.... و ۵ و ۵ و ۵

تمرین ۱۷ : پنج جمله‌ی اوّل دنباله‌ی $t_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$ را تعیین کنید.

تمرین ۱۸ : جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $t_n = \frac{n+3}{2n+1}$ را به صورت جمله‌ی چهارم این دنباله را به

دست آورید.

تمرین ۱۹ : جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $a_n = (-1)^{n+1} n^2$ را به صورت جمله‌ی ششم این دنباله

را به دست آورید.

تمرین ۲۰ : جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $a_n = -3n + 5$ را به صورت جمله‌ی ششم این دنباله

را به دست آورید. آیا این دنباله برابر ۱۶- است؟

تمرین ۲۱: با استفاده از چوب کبریت شکل های زیر ساخته شده است.



الف: تعیین کنید که برای ساختن هر شکل چند چوب کبریت استفاده شده است؟

ب: برای ساختن شکل چهارم چند چوب کبریت نیاز است؟

ج: جمله ی n ام (جمله ی عمومی) دنباله ی مربوط به چوب کبریت ها را بنویسید.

تمرین ۲۲: جمله ی عمومی دنباله ی زیر را بنویسید.

.... و ۱۷ و ۱۲ و ۷ و ۲

تمرین ۲۳: جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = n^2 + 2$ می باشد. چهار جمله ی اول دنباله را

نوشته سپس برای آن الگوی هندسی رسم کنید.

حل:

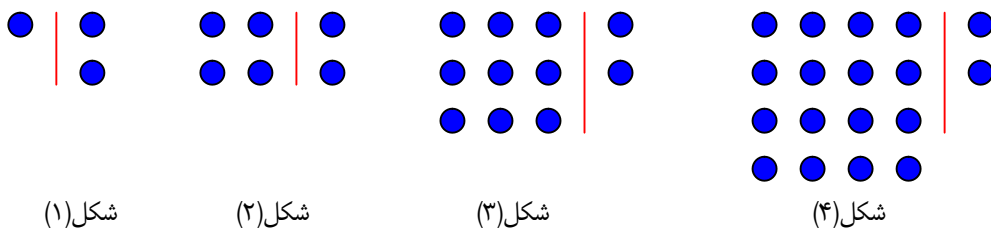
$$n = 1 \rightarrow a_1 = (1)^2 + 2 = 3$$

$$n = 2 \rightarrow a_2 = (2)^2 + 2 = 6$$

$$n = 3 \rightarrow a_3 = (3)^2 + 2 = 11$$

$$n = 4 \rightarrow a_4 = (4)^2 + 2 = 18$$

الگوی هندسی این دنباله به صورت زیر است.



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

شکل (۴)

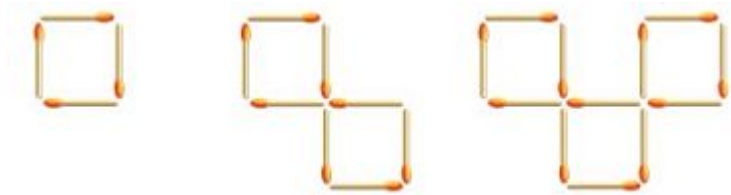
تمرین ۲۴: برای دنباله ی زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله ی عمومی دنباله را

بنویسید.

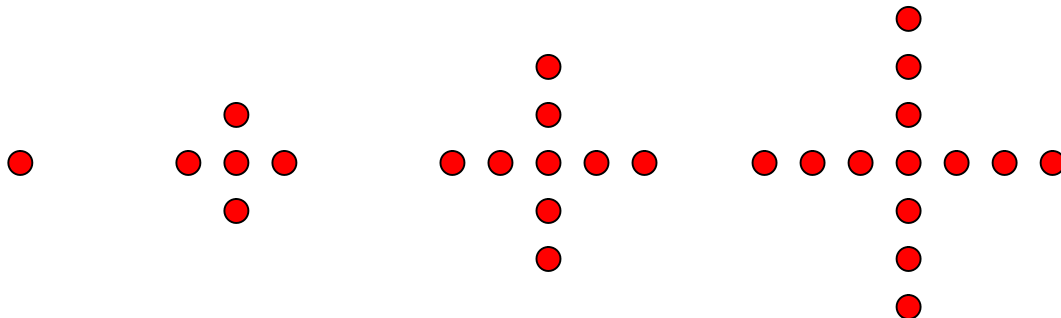
.... و ۲۹ و ۲۰ و ۱۳ و ۸ و ۵

تمرین برای حل :

۲۵: جمله‌ی عمومی دنباله‌ی مربوط به شکل های زیر که با چوب کبریت ساخته شده است، را بنویسید.



۲۶: جملات دنباله ای دارای الگوی زیر می باشند. جمله‌ی بیستم این دنباله را به دست آورید.



۲۷: جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله‌ی اول را بنویسید و سپس برای هر

یک الگوی هندسی رسم کنید.

الف) $a_n = 3n$ ب) $b_n = 4n - 1$ ج) $c_n = n^2 + n$

۲۸: برای دنباله‌ی زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید.

۵ و ۱۲ و ۲۲ و ۳۵ و ۵۱ و

حل : با قدری دقت می توان نوشت.

.... و $36 + 15$ و $25 + 10$ و $16 + 6$ و $9 + 3$ و $4 + 1$

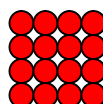
یعنی جملات یک دنباله‌ی مربعی و یک دنباله‌ی مثلثی جمع شده اند.



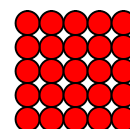
شکل (۱)



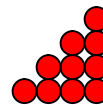
شکل (۲)



شکل (۳)



شکل (۴)



لذا جمله ی عمومی این دنباله می شود.

$$t_n = (n + 1)^2 + \frac{1}{2}n(n + 1)$$

۲۹: جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = n^2 + 2n - 3$ می باشد. کدام جمله ی این دنباله ۳۲ است؟

۳۰: جمله ی عمومی دنباله ای به صورت $a_n = 3^n - 1$ می باشد. حساب کنید که جمله ی چندم این

دنباله ۸۰ است؟

۳۱: در یک دنباله، جمله های اول و دوم برابر ۱ و برای تعیین هر جمله ی دیگر دنباله ، دو جمله ی قبل از

آن را جمع می کنند. (یعنی $n \geq 3$: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = a_2 = 1$) این دنباله را دنباله

فیوناتچی می نامند. هفت جمله ی اول این دنباله را بنویسید.

تهیه کننده: جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir کانال تلگرام : @mathameri

روش‌های تعیین جمله‌ی عمومی الگوهای خطی

برای مطالعه

فرض کنیم که دنباله‌ی زیر دارای الگوی خطی باشد.

$$t_1 \text{ و } t_2 \text{ و } t_3 \text{ و } t_4 \text{ و } t_5 \text{ و } \dots$$

در این صورت جمله‌ی عمومی آن به صورت زیر است.

$$t_n = an + b$$

با الگوگیری از معادله‌ی خط می توان این معادله را به صورت زیر نوشت:

$$t_n = (t_2 - t_1)n - (t_2 - 2t_1)$$

اثبات: واضح است که جملات این دنباله روی یک خط راست قرار دارند. دو نقطه از این خط عبارتند از

$$(1, t_1) \text{ و } (2, t_2)$$

لذا شیب و عرض از مبدأ این خط را می توان به زیر به دست آورد.

$$m = \frac{t_2 - t_1}{2 - 1} = t_2 - t_1$$

پس:

$$t_n = (t_2 - t_1)n + b$$

اکنون برای تعیین مقدار b نقطه‌ی $(1, t_1)$ را جایگزین می کنیم.

$$t_n = (t_2 - t_1)n + b \xrightarrow{(1, t_1)} t_1 = (t_2 - t_1)(1) + b$$

$$\rightarrow t_1 = t_2 - t_1 + b \rightarrow b = -t_2 + 2t_1 = -(t_2 - 2t_1)$$

لذا

$$t_n = (t_2 - t_1)n - (t_2 - 2t_1)$$

تمرین: الگوی زیر را در نظر بگیرید.

الف: نشان دهید که این الگو، یک الگوی خطی است.

ب: جمله‌ی عمومی این الگو را بنویسید.

$$3 \text{ و } 7 \text{ و } 11 \text{ و } 14 \text{ و } \dots$$

حل: چون تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی این الگو مقداری ثابت است. لذا این الگو، یک الگوی خطی است.

$$t_1 = 3 \text{ و } t_2 = 7$$

$$t_n = (t_2 - t_1)n - (t_2 - 2t_1)$$

$$\rightarrow t_n = (7 - 3)n - (7 - 6)$$

$$\rightarrow t_n = 4n - 1$$

روش هایی برای تعیین جمله ی عمومی الگو های غیر خطی درجه ی دوم برای مطالعه

برای دنباله ی زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله ی عمومی دنباله را بنویسید.

$$..... \text{ و } ۲۱ \text{ و } ۱۵ \text{ و } ۱۰ \text{ و } ۶ \text{ و } ۳$$

آیا این دنباله خطی است؟ با توجه به اختلاف جملات متوالی، معلوم است که این دنباله خطی نیست. یک

روش برای تعیین جمله ی عمومی این دنباله به شکل زیر است.

دنباله ی اصلی و ۲۱ و ۱۵ و ۱۰ و ۶ و ۳
دنباله ی اختلافات جملات متوالی (مرحله ۱) و ۶ و ۵ و ۴ و ۳
دنباله ی اختلافات جملات متوالی (مرحله ۲) و ۱ و ۱ و ۱

چون بعد از دو مرحله، دنباله ی اختلافات به یک دنباله ی ثابت تبدیل شد. پس جمله ی عمومی دنباله ی اصلی

یک دنباله ی چند جمله ای درجه ی دوم است^۴. پس :

$$t_n = an^2 + bn + c$$

$$(۱,۳) \rightarrow a + b + c = ۳ \quad (۱)$$

$$(۲,۶) \rightarrow ۴a + ۲b + c = ۶ \quad (۲)$$

$$(۳,۱۰) \rightarrow ۹a + ۳b + c = ۱۰ \quad (۳)$$

با تعیین تفاضل معادله های (۱) و (۲) داریم:

$$(۴a - a) + (۲b - b) + (c - c) = ۶ - ۳ \rightarrow ۳a + b = ۳ \quad (۴)$$

با تعیین تفاضل معادله های (۲) و (۳) داریم:

$$(۹a - ۴a) + (۳b - ۲b) + (c - c) = ۱۰ - ۶ \rightarrow ۵a + b = ۴ \quad (۵)$$

و در انتها با تعیین تفاضل معادله های (۴) و (۵) داریم:

$$(۵a - ۳a) + (b - b) = ۴ - ۳ \rightarrow ۲a = ۱ \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

در نهایت می توان نوشت:

^۴ به طور مشابه اگر بعد از سه مرحله، دنباله ی اختلافات به یک دنباله ی ثابت تبدیل شود، جمله ی عمومی دنباله ی اصلی چندجمله ای درجه ی سوم است.

$$(۴) \quad 3a + b = 3 \xrightarrow{a = \frac{1}{2}} b = \frac{3}{2}$$

$$(۱) \quad a + b + c = 3 \xrightarrow{a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}} c = 1$$

$$\rightarrow t_n = an^2 + bn + c \rightarrow t_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$

روش دیگر : با قدری دقت می توان نوشت.

$$4 - 1 \text{ و } 9 - 3 \text{ و } 16 - 6 \text{ و } 25 - 10 \text{ و } 36 - 15 \text{ و } \dots$$

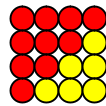
یعنی جملات یک دنباله ی مربعی و یک دنباله ی مثلثی از هم کم شده اند.



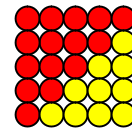
شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)



شکل (۴)

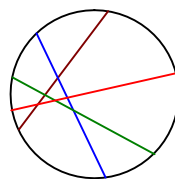
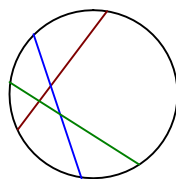
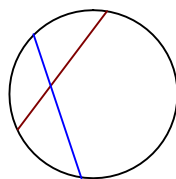
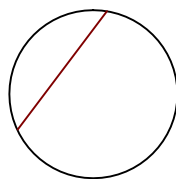
لذا جمله ی عمومی این دنباله می شود.

$$t_n = (n + 1)^2 - \frac{1}{2}n(n + 1)$$

تمرین : بیشترین تعداد قطعات پیتزا وقتی با n خط راست بریده می شود، چند است؟

توجه : فرض کنید پیتزا به شکل دایره و برش ها به شکل وتر دایره باشند.

حل : ابتدا تعداد قطعات را برای یک برش، دو برش، سه برش و ... را تعیین می کنیم.



اکنون جدول زیر را تعیین می کنیم.

شماره ی شکل	۱	۲	۳	۴	۵	...	n
تعداد قطعات	۲	۴	۷	۱۱		...	

با توجه به صورت مسأله معلوم است که هدف تعیین جمله ی عمومی دنباله است.

آیا این دنباله خطی است؟ با توجه به اختلاف جملات متوالی، معلوم است که این دنباله خطی نیست. یک روش برای تعیین جمله ی عمومی این دنباله به شکل زیر است.

دنباله ی اصلی و ۱۱ و ۷ و ۴ و ۲
دنباله ی اختلافات جملات متوالی (مرحله ۱) و ۴ و ۳ و ۲
دنباله ی اختلافات جملات متوالی (مرحله ۲) و ۱ و ۱

چون بعد از دو مرحله، دنباله ی اختلافات به یک دنباله ی ثابت تبدیل شد. پس جمله ی عمومی دنباله ی اصلی یک دنباله ی چند جمله ای درجه ی دوّم است. پس :

$$t_n = an^2 + bn + c$$

$$(1,2) \rightarrow a + b + c = 2 \quad (1)$$

$$(2,4) \rightarrow 4a + 2b + c = 4 \quad (2)$$

$$(3,7) \rightarrow 9a + 3b + c = 7 \quad (3)$$

با تعیین تفاضل معادله های (۱) و (۲) داریم:

$$(4a - a) + (2b - b) + (c - c) = 4 - 2 \rightarrow 3a + b = 2 \quad (4)$$

با تعیین تفاضل معادله های (۲) و (۳) داریم:

$$(9a - 4a) + (3b - 2b) + (c - c) = 7 - 4 \rightarrow 5a + b = 3 \quad (5)$$

و در انتها با تعیین تفاضل معادله های (۴) و (۵) داریم:

$$(5a - 3a) + (b - b) = 3 - 2 \rightarrow 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

در نهایت می توان نوشت:

$$(4) \quad 3a + b = 2 \xrightarrow{a = \frac{1}{2}} b = \frac{1}{2}$$

$$(1) \quad a + b + c = 2 \xrightarrow{a = b = \frac{1}{2}} c = 1$$

$$\rightarrow t_n = an^2 + bn + c \rightarrow t_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$$

روش دوّم: تعیین جمله ی عمومی

.... و ۱۱ و ۷ و ۴ و ۲

..... و $1+10$ و $1+6$ و $1+3$ و $1+1$

یعنی هر یک از جملات این دنباله، یک واحد بیشتر از جملات دنباله‌ی مثلثی است. لذا

$$t_n = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$$

البته به این شکل هم می‌توان نوشت:

$$2 = 1 + 1 \text{ جمله‌ی اول}$$

$$4 = 1 + (1 + 2) \text{ جمله‌ی دوم}$$

$$7 = 1 + (1 + 2 + 3) \text{ جمله‌ی سوم}$$

$$11 = 1 + (1 + 2 + 3 + 4) \text{ جمله‌ی چهارم}$$

.....

$$t_n = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) = 1 + \frac{1}{2}n(n+1) \text{ جمله‌ی } n\text{ام}$$

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

درس چهارم: دنباله های حسابی و هندسی

قسمت اول: دنباله ی حسابی (عددی)

هر دنباله که در آن با اضافه شدن مقداری ثابت به هر جمله، جمله ی بعدی به دست آید را دنباله ی حسابی می نامند. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله می نامند و آن را با d نمایش می دهند.

مثال: دنباله ی زیر یک دنباله ی حسابی است، زیرا با اضافه کردن عدد ۴ به هر جمله، جمله ی بعدی به دست می آید.

.... و ۱۷ و ۱۳ و ۹ و ۵

$$d = 4 \text{ قدر نسبت} \quad a = t_1 = 5 \text{ جمله ی اول}$$

نتیجه: در هر دنباله ی حسابی، تفاضل هر دو جمله ی متوالی، عدد ثابتی است. این عدد ثابت را اختلاف مشترک یا قدرنسبت می گویند و آن را با d نمایش می دهند^۱.

تمرین ۱: کدام یک از دنباله های زیر، یک دنباله ی حسابی است؟ چرا؟

.... و ۱ و ۳ و ۵ (ب) و ۱۴ و ۱۰ و ۷ و ۵ (الف)

جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

اگر a جمله ی اول و d قدرنسبت و n شماره ی جمله در دنباله ی حسابی باشند، در این صورت می توان نوشت:

$$t_1 = a \text{ جمله ی اول}$$

$$t_2 = t_1 + d = a + d \text{ جمله ی دوم}$$

$$t_3 = t_2 + d = (a + d) + d = a + 2d \text{ جمله ی سوم}$$

$$t_4 = t_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d \text{ جمله ی چهارم}$$

$$t_5 = t_4 + d = (a + 3d) + d = a + 4d \text{ جمله ی پنجم}$$

.....

$$t_n = a + (n - 1)d \text{ جمله ی عمومی (n ام)}$$

^۱. برای تعیین قدرنسبت در یک دنباله ی حسابی کافی است، از یک جمله، جمله ی قبل آن را کم کنیم.

تمرین ۲: دنباله‌ی حسابی زیر را در نظر بگیرید.

..... و ۱۱ و ۷ و ۳

الف : قدر نسبت این دنباله را به دست آورید.

ب : جمله‌ی عمومی دنباله را بنویسید.

ج : جمله‌ی بیست و یکم این دنباله را بدست آورید.

تمرین ۳: جمله‌ی پانزده ام دنباله‌ی حسابی زیر را تعیین کنید.

.... و ۲ و ۵ و ۸

تمرین ۴: در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی هفتم ۲۷ و جمله‌ی سوّم ۱۱ می باشد.

الف : قدر نسبت این دنباله را محاسبه کنید.

ب : جمله‌ی اوّل این دنباله را تعیین کنید.

ج : جمله‌ی عمومی این دنباله را بدست آورید.

تمرین ۵: اگر دو جمله‌ی غیر متوالی t_j و t_i از یک دنباله‌ی حسابی معلوم باشند. ثابت کنید که

$$d = \frac{t_i - t_j}{i - j}$$

تفاضل جملات ←
تفاضل شماره ها ←

اثبات : کافی است از جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی استفاده کنیم.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$t_i = a + (i - 1)d \rightarrow t_i = a + id - d$$

$$t_j = a + (j - 1)d \rightarrow t_j = a + jd - d$$

$$\rightarrow t_i - t_j = (a + id - d) - (a + jd - d)$$

$$\rightarrow t_i - t_j = a + id - d - a - jd + d \rightarrow a_i - a_j = id - jd$$

$$\rightarrow t_i - t_j = (i - j)d$$

$$\rightarrow d = \frac{t_i - t_j}{i - j}$$

تمرین ۶: در یک دنباله ی حسابی جمله ی پنجم ۱۷ و جمله ی دوازدهم ۵۲ می باشد. قدرنسبت این دنباله را تعیین کنید.

تمرین ۷: ثابت کنید که هر دنباله ی حسابی، دارای الگوی خطی است.

حل: کافی است که نشان دهیم اختلاف هر دو جمله ی متوالی آن عدد ثابتی است.

$$t_i - t_{i-1} = (a + (i - 1)d) - (a + (i - 1 - 1)d) = a + id - d - a - id + 2d = d$$

یعنی اختلاف هر دو جمله ی متوالی در هر دنباله ی حسابی برابر d می باشد و لذا دارای الگوی خطی است.

واسطه ی حسابی

یک یا چند عدد را واسطه ی حسابی می نامند، هرگاه بین دو جمله از یک دنباله قرار گیرند، تشکیل دنباله ی حسابی بدهند.

برای مثال، اعداد ۲۶ و ۲۰ و ۱۴ و ۸ چهار واسطه ی حسابی بین ۲ و ۳۲ می باشند، زیرا دنباله ی زیر یک دنباله ی حسابی است.

$$\underline{2}, \underline{8}, \underline{14}, \underline{20}, \underline{26}, \underline{32}, \dots$$

با معلوم بودن دو جمله از یک دنباله ی حسابی و تعداد واسطه ها می توان این واسطه ها را با محاسبه ی قدرنسبت، تعیین نمود. اگر a جمله ی اول و b جمله ی آخر و m تعداد واسطه ها باشد. در این صورت داریم:

$$d = \frac{b - a}{m + 1}$$

تمرین ۸: بین دو عدد ۲ و ۳۴ سه واسطه ی حسابی درج کنید.

حل: ابتدا قدرنسبت را تعیین کرده و سپس جملات دنباله را محاسبه می نماییم.

$$d = \frac{b - a}{m + 1} = \frac{34 - 2}{3 + 1} = \frac{32}{4} = 8$$

$$2, 10, 18, 26, 34, \dots$$

تمرین ۹: اگر z و y و x سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند، ثابت کنید که: $2y = x + z$

اثبات : می دانیم که در هر دنباله‌ی حسابی تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی عدد ثابتی است. این عدد ثابت را قدرنسبت می نامند و آن را با d نمایش می دهند.

$$\begin{aligned} d &= y - x \\ d &= z - y \end{aligned} \rightarrow y - x = z - y \rightarrow 2y = x + z$$

تمرین ۱۰ : در دنباله‌ی حسابی زیر مقدار t را به دست آورید.

..... و 23 و t و 7

تمرین ۱۱ : در دنباله‌ی حسابی زیر مقدار x را تعیین کنید.

..... و $2x + 1$ و $x + 2$ و $1 - x$

تمرین ۱۲ : بین 4 و 10 یک واسطه‌ی حسابی درج کنید.

حل:

$$2x = a + b \rightarrow 2x = (4) + (10) \rightarrow 2x = 14 \rightarrow x = 7$$

$$\Rightarrow 4, 7, 10, \dots$$

تمرین ۱۳ : اگر زاویه‌های مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و یک دنباله‌ی حسابی تشکیل شود.

نشان دهید که یکی از زاویه‌های این مثلث 60 درجه است.

روش تعیین تعداد جملات دنباله‌ی حسابی

اگر در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی اول (a)، جمله‌ی آخر (b) و قدرنسبت (d) معلوم باشند، می توان تعداد

جملات را از رابطه‌ی زیر محاسبه نمود.

$$n = \frac{b - a}{d} + 1$$

تمرین ۱۴ : با توجه به دنباله‌ی حسابی زیر، تعداد جملات را تعیین کنید.

....., 11 , 7 , 3

حل: واضح است که $a = 3$ و $b = 51$ و $d = 4$ در این صورت داریم:

$$n = \frac{b-a}{d} + 1 = \frac{51-3}{4} + 1 = \frac{48}{4} + 1 = 12 + 1 = 13$$

تمرین ۱۵: تعداد اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۷ را به دست آورید.

حل: به سادگی می توان اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۷ را به صورت زیر نوشت :

$$14, 21, \dots, 98$$

این اعداد تشکیل یک دنباله ی حسابی با قدر نسبت ۷ می دهند. همچنین جمله ی اول این دنباله ۱۴ و جمله-

ی آخر آن ۹۸ است. لذا تعداد جملات دنباله برابر است با:

$$n = \frac{b-a}{d} + 1 = \frac{98-14}{7} + 1 = \frac{84}{7} + 1 = 12 + 1 = 13$$

تمرین ۱۶: تعداد اعداد دو رقمی بخش پذیر بر ۳ را تعیین کنید.

حل:

$$12, 15, \dots, 99$$

$$\text{تعداد جملات} \quad n = \frac{b-a}{d} + 1 = \frac{99-12}{3} + 1 = \frac{87}{3} + 1 = 29 + 1 = 30$$

قسمت دوم : دنباله ی هندسی

هر دنباله که در آن با ضرب هر جمله ی آن در مقداری ثابت و غیر صفر ، جمله ی بعدی به دست آید را

دنباله ی هندسی می نامند. این مقدار ثابت را قدرنسبت دنباله می نامند و آن را با r یا q نمایش می دهند.

مثال : دنباله ی زیر یک دنباله ی هندسی است، زیرا از ضرب هر جمله در عدد ۲- جمله ی بعدی به دست می

آید.

$$\dots \text{ و } -24 \text{ و } 12 \text{ و } -6 \text{ و } 3$$

$$a = t_1 = 3 \text{ جمله ی اول}$$

$$r = -2 \text{ قدر نسبت}$$

نتیجه : در هر دنباله‌ی هندسی، خارج قسمت هر دو جمله‌ی متوالی آن عدد ثابتی است. این عدد ثابت را نسبت مشترک یا قدرنسبت می‌گویند و آن را با r یا q نمایش می‌دهند.^۲

تمرین ۱۷ : کدام یک از دنباله‌های زیر، یک دنباله‌ی حسابی و کدام یک هندسی است؟ چرا؟

..... و ۱۸ و $6\sqrt{3}$ و ۶ و $2\sqrt{3}$ و ۲ (ه)

..... و -13 و -5 و ۳ (الف)

..... و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ و ۱ و ۲ (و)

..... و ۱۳۵ و ۴۵ و ۱۵ و ۵ (ب)

..... و ۳ و ۳ و ۳ و ۳ (ز)

..... و ۳۲ و ۱۶ و ۱۴ و ۷ و ۵ (ج)

..... و $4\sqrt{5}$ و $3\sqrt{5}$ و $2\sqrt{5}$ و $\sqrt{5}$ (د)

تمرین ۱۸ : دو دنباله‌ی هندسی بنویسید که قدرنسبت آنها $\frac{4}{5}$ باشد. به نظر شما چند دنباله‌ی هندسی با

این ویژگی می‌توان نوشت؟ چرا؟

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی

اگر a جمله‌ی اول و r قدرنسبت و n شماره‌ی جمله در دنباله‌ی هندسی باشند، در این صورت می‌توان نوشت :

$$t_1 = a \text{ جمله‌ی اول}$$

$$t_2 = t_1 r = ar \text{ جمله‌ی دوم}$$

$$t_3 = t_2 r = (ar)r = ar^2 \text{ جمله‌ی سوم}$$

$$t_4 = t_3 r = (ar^2)r = ar^3 \text{ جمله‌ی چهارم}$$

$$t_5 = t_4 r = (ar^3)r = ar^4 \text{ جمله‌ی پنجم}$$

.....

$$t_n = ar^{n-1} \text{ جمله‌ی عمومی (n ام)}$$

^۲ در هر دنباله‌ی هندسی جمله‌ی اول و قدرنسبت، نباید صفر باشند. همچنین برای تعیین قدرنسبت در یک دنباله‌ی هندسی کافی است، یک جمله را بر جمله‌ی قبل از آن تقسیم کنیم.

تمرین ۱۹: دنباله ی هندسی زیر را در نظر بگیرید.

..... و ۱۲ و ۶ و ۳

الف : قدر نسبت این دنباله را به دست آورید.

ب : جمله ی عمومی دنباله را بنویسید.

ج : جمله ی پنجم این دنباله را محاسبه کنید.

تمرین ۲۰: جمله ی پانزده ام دنباله ی هندسی زیر را تعیین کنید.

..... و ۲ و ۴ و ۸

تمرین ۲۱: در یک دنباله ی هندسی جمله ی پنجم ۱۶۲ و جمله ی دوم ۶ می باشد.

الف : قدر نسبت این دنباله را محاسبه کنید.

ب : جمله ی اول این دنباله را تعیین کنید.

ج : جمله ی عمومی این دنباله را بنویسید.

تمرین ۲۲: اگر دو جمله ی غیر متوالی a و a_i از یک دنباله ی هندسی معلوم باشند. ثابت کنید که

$$\left. \begin{array}{l} r = i - j \sqrt{\frac{t_i}{t_j}} \\ \text{تفاضل شماره ها} \end{array} \right\} \text{تقسیم جملات}$$

اثبات : کافی است از جمله ی عمومی دنباله ی هندسی استفاده کنیم.

$$t_n = ar^{n-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} t_i = ar^{i-1} \\ t_j = ar^{j-1} \end{array} \right\} \xrightarrow{\div} \frac{t_i}{t_j} = \frac{ar^{i-1}}{ar^{j-1}} \rightarrow \frac{t_i}{t_j} = \frac{r^{i-1}}{r^{j-1}} \rightarrow \frac{t_i}{t_j} = r^{i-1-j+1} \rightarrow \frac{t_i}{t_j} = r^{i-j}$$

تمرین ۲۳: در یک دنباله ی هندسی جمله ی هفتم ۸۱ و جمله ی چهارم ۳ می باشد. قدر نسبت این دنباله را

تعیین کنید.

واسطه‌ی هندسی

یک یا چند عدد را واسطه‌ی هندسی می‌نامند، هرگاه بین دو جمله از یک دنباله قرار گیرند، تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند.

برای مثال، اعداد ۵۴ و ۱۸ و ۶ سه واسطه‌ی هندسی بین ۲ و ۱۶۲ می‌باشند، زیرا دنباله‌ی زیر یک دنباله‌ی هندسی است.

$$\underline{2}, \underline{6}, \underline{18}, \underline{54}, \underline{162}, \dots$$

با معلوم بودن دو جمله از یک دنباله‌ی هندسی و تعداد واسطه‌ها می‌توان این واسطه‌ها را با محاسبه‌ی قدر نسبت، تعیین نمود. اگر a جمله‌ی اول و b جمله‌ی آخر و m تعداد واسطه‌ها باشد. در این صورت داریم:

$$r = m+1 \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$$

تمرین ۲۴: بین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه واسطه‌ی هندسی درج کنید.

حل: ابتدا قدر نسبت را تعیین کرده و سپس جملات دنباله را محاسبه می‌نماییم.

$$r = m+1 \sqrt[m]{\frac{b}{a}} = 3+1 \sqrt[3]{\frac{324}{4}} = 4 \sqrt[3]{81} = 3$$

$$4, 12, 36, 108, 324, \dots$$

تمرین ۲۵: اگر z و y و x سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، ثابت کنید که $y^2 = xz$

اثبات: می‌دانیم که در هر دنباله‌ی هندسی خارج قسمت هر دو جمله‌ی متوالی عدد ثابتی است. این عدد ثابت را قدرنسبت می‌نامند و آن را با r نمایش می‌دهند.

$$\begin{aligned} r &= \frac{y}{x} \\ r &= \frac{z}{y} \end{aligned} \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{z}{y} \rightarrow y^2 = xz$$

تمرین ۲۶: در دنباله‌ی هندسی زیر، مقدار t را به دست آورید.

$$7 \text{ و } t \text{ و } 63 \text{ و } \dots$$

تمرین ۲۷: در دنباله ی هندسی زیر ، مقدار x را تعیین کنید.

..... و $9x$ و 6 و x

تمرین ۲۸: بین 4 و 9 یک واسطه ی هندسی درج کنید.

حل:

$$x^2 = ab \rightarrow x^2 = (4)(9) \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4, 6, 9, \dots \\ 4, -6, 9, \dots \end{cases}$$

تمرین برای حل :

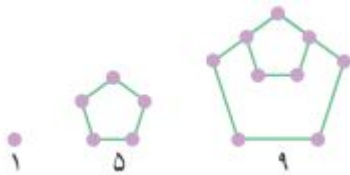
۲۹: الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

الف : دو جمله ی بعدی الگو را با رسم شکل بیابید.

ب : نوع دنباله ی بدست آمده را با ذکر دلیل بیان کنید.

ج : جمله ی عمومی دنباله را بنویسید.

د : حساب کنید که جمله ی چندم این دنباله 397 است؟



۳۰: در یک دنباله ی حسابی مجموع جملات نهم و سیزدهم و بیستم برابر 78 است. جمله ی چهاردهم این

دنباله را به دست آورید.

۳۱: در یک دنباله ی حسابی ، مجموع سه جمله ی اول 3 و مجموع سه جمله ی بعدی آن 39 است. این

دنباله را مشخص کنید.

۳۲: اگر $4m - 11$ و $3m + 2$ و $m - 1$ سه جمله ی متوالی از یک دنباله حسابی باشند، مقدار m را به

دست آورید.

۳۳: جملات سوّم و ششم یک دنباله ی هندسی به ترتیب 12 و 96 می باشند. این دنباله را مشخص کنید.

۳۴: عددی بین 5 و 80 قرار دهید به طوری که این سه عدد تشکیل یک دنباله ی هندسی بدهند. مسئله

چند جواب دارد؟

۳۵: اگر 9^c و 81^b و 3^a سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، ثابت کنید که $ab = a + 2c$.

۳۶: در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی پنجم برابر ۶ و جمله هشتم برابر ۴۸ است. قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید.

۳۷: بین دو عدد $2^5 \times 3^9$ و $2^3 \times 3^7$ عددی قرار دهید که دنباله‌ی هندسی تشکیل شود.

۳۸: در یک دنباله‌ی هندسی قدرنسبت ۲ و $t_5 - t_3 = 48$. این دنباله را مشخص کنید.

روش برای محاسبه‌ی مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی ابتدا از یک

معلم در کلاس درس گفت، بچه‌ها حاصل جمع اعداد طبیعی متوالی از یک تا صد را به دست آورید. بر خلاف انتظار معلم، یکی از شاگردان به نام گاوس^۳ سریع پاسخ را نوشت. معلم روش کار او را پرسید، او گفت من این روش را برای حاصل جمع اعداد از ۱ تا ۵ توضیح می‌دهم. حاصل جمع از یک تا صد نیز به همین شکل بدست می‌آید.

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$S = 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$\rightarrow 2S = (1 + 5) + (2 + 4) + (3 + 3) + (4 + 2) + (5 + 1)$$

$$2S = 5 \times 6 \rightarrow S = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

تمرین ۳۹: مجموع اعداد طبیعی متوالی از یک تا ۱۰ را به روش گاوس به دست آورید.

نتیجه :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

^۳ گاوس، نام یک ریاضی دان آلمانی است. گفته می‌شود که او وقتی آموزگارش، در دبستان، برای سرگرم کردن شاگردان به آنان گفت شماره‌های ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع کنند. گاوس پاسخ درست را در چند ثانیه با به کارگیری یک بینش ریاضیاتی چشمگیر به دست آورد.

تمرین برای حل :

۴۰ : مجموع اعداد طبیعی متوالی از یک تا ۱۰۰ را به دست آورید.

۴۱ : حاصل جمع زیر را به دست آورید.

$$A = ۱۳x^2 + ۱۴x^2 + ۱۵x^2 + \dots + ۳۹x^2$$

۴۲ : حاصل ضرب بیست جمله ی اول دنباله ی هندسی زیر را محاسبه کنید.

..... و ۸ و ۴ و ۲

۴۳ : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = ۱۰۰^2 - ۹۹^2 + ۹۸^2 - ۹۷^2 + \dots + ۲^2 - ۱^2$$

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان