

ریاضی ۲

پایه یازدهم « رشته ی علوم تجربی »

فصل ۱ : جبر و معادله

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

مهر ۱۳۹۹

درس اول : هندسه تحلیلی

بحث هندسه‌ی تحلیلی یکی از بحث های مهم و کاربردی در ریاضیات است. به کمک این بحث است که می توان معادلات جبری برای اشکال هندسی بیان نمود و سپس آنها را بررسی و حل کرد.

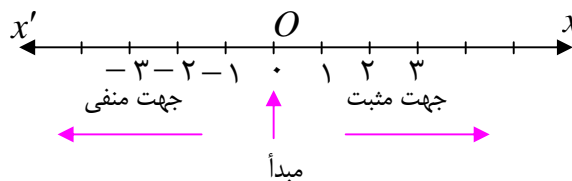
قسمت اول : محور اعداد حقیقی

محور اعداد حقیقی خط راستی است که روی آن

الف : نقطه ای به عنوان مبدأ

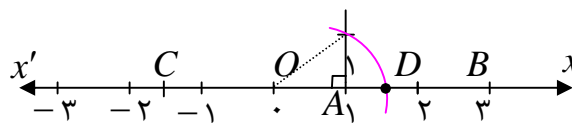
ب : واحدی برای اندازه گیری طول ها

ج : جهتی به عنوان جهت مثبت، اختیار شده باشد. مانند محور $x'Ox$ در شکل زیر



بدیهی است که هر نقطه روی محور را می توان با یک عدد حقیقی نشان داد و هر عدد حقیقی متناظر با یک نقطه روی محور است. به عبارتی دیگر بین مجموعه ای اعداد حقیقی و مجموعه ی نقاط روی محور تناظر یک به یک قرار دارد.

عدد حقیقی متناظر با هر نقطه روی محور را **طول آن نقطه** می نامند. به عبارت دیگر طول هر نقطه روی یک محور عددی است جبری که قدرمطلق آن برابر با فاصله ی آن نقطه تا مبدأ محور است.



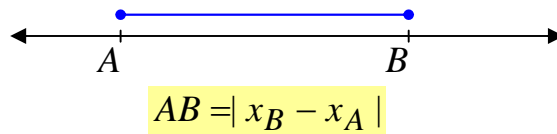
طول هر نقطه مانند A روی محور اعداد حقیقی را با x_A نمایش می دهند.

$$x_A = OA$$

در شکل فوق داریم:

$$x_O = 0 \text{ و } x_A = 1 \text{ و } x_B = 3 \text{ و } x_C = -\frac{3}{2} \text{ و } x_D = \sqrt{2}$$

اگر A و B دو نقطه روی محور باشند، بدیهی است که **طول یا اندازهی پاره خط AB** برابر قدر مطلق تفاضل طول های این دو نقطه است.

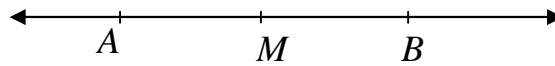


در صورتی که نقطه M **وسط** پاره خط AB باشد. می توان نوشت :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

استدلالی که برای اثبات درستی این تساوی ارائه می شود به صورت زیر است.

$$AM = MB$$



$$\rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \rightarrow 2x_M = x_A + x_B \rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

تمرین ۱ : اگر دو نقطه A و B روی یک محور باشند و $x_A = 5$ و $x_B = -3$ در این صورت:

الف : اندازهی پاره خط AB را تعیین کنید.

ب : طول نقطه M وسط پاره خط AB را به دست آورید.

تمرین ۲ : اگر سه نقطه A و B و C روی یک محور چنان قرار دارند که نقطه B وسط پاره خط AC

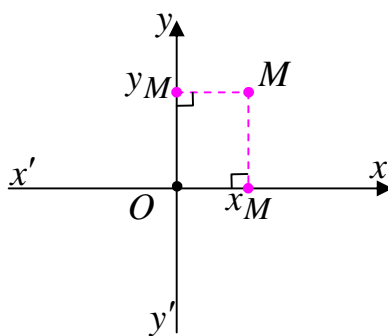
بوده و $x_A = 2$ و $x_B = 3m + 2$ و $x_C = m + 1$ باشد، مقدار m را تعیین کنید.

قسمت دوم : دستگاه محور های مختصات (دستگاه دکارتی)

دو محور $x'Ox$ و $y'Oy$ که در یک صفحه قرار دارند، یک دستگاه مختصات به وجود می آورند، هرگاه این

دو محور بر هم عمود باشند و در نقطه O (مبدأ مشترک)

متقاطع باشند.



محور افقی ($x'Ox$) را محور طول ها و محور قائم ($y'Oy$) را

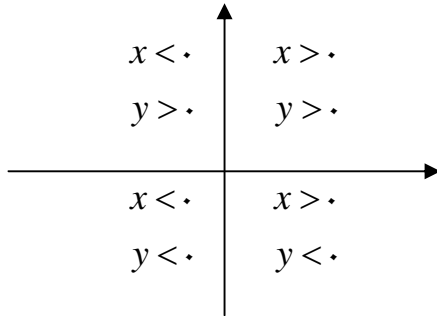
محور عرض ها می نامند.

بدیهی است که هر نقطه روی صفحه ، مانند M با دو عدد حقیقی

مشخص می شود. تصویر نقطه ی M روی محور طول ها را طول (x_M) و تصویر نقطه ی M روی محور عرض ها را عرض (y_M) می نامند.

$$M \begin{matrix} x_M \\ y_M \end{matrix} \quad \text{یا} \quad M(x_M, y_M)$$

طول و عرض نقطه را مختصات نقطه می نامند.



نتیجه : دستگاه مختصات قائم صفحه را به چهار ناحیه

(ربع) تبدیل می کند. علامت مختصات هر نقطه با توجه به

ربعی که در آن قرار دارد، به صورت زیر است.

همچنین:

الف : هر نقطه که روی محور طول ها قرار دارد، عرض آن صفر است و برعکس

ب : هر نقطه که روی محور عرض ها قرار دارد، طول آن صفر است و برعکس

ج : نقطه ی تقاطع دو محور که مبدأ مختصات نام دارد، طول و عرض آن صفر است.

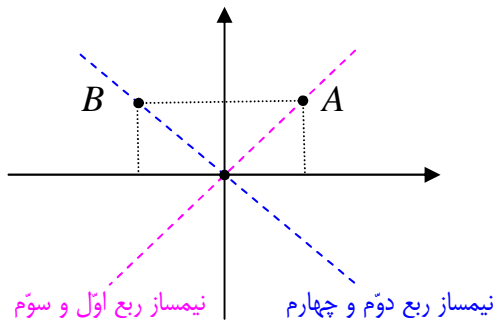
تمرین ۳ : نقطه ی $P(2m - 1, m + 3)$ داده شده است. مقدار m را چنان بیابید که :

الف : نقطه ی P روی محور طولها قرار گیرد.

ب : نقطه ی P روی محور عرض ها قرار گیرد.

تمرین ۴ : نقطه ی $P(2k - 1, k + 1)$ در ناحیه ی دوّم دستگاه مختصات قرار دارد. حدود k را تعیین کنید.

توجه :



۱ : تمام نقاطی که روی نیمساز ربع اوّل و سوّم دستگاه

مختصات واقعند، دارای طول و عرض مساوی هستند.

۲ : تمام نقاطی که روی نیمساز ربع دوّم و چهارم دستگاه

مختصات واقعند، دارای طول و عرض قرینه هستند.

تمرین ۵ : نقطه ی $P(2m - 6, m + 4)$ داده شده است. مقدار m را چنان بیابید که :

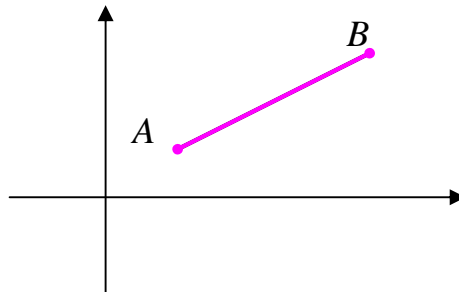
الف : نقطه ی P روی نیمساز ربع اوّل و سوّم قرار گیرد.

ب : نقطه ی P روی نیمساز ربع دوّم و چهارم قرار گیرد.

اندازه‌ی پاره خط در دستگاه محورهای مختصات

اگر A و B دو نقطه روی صفحه باشند، در این صورت اندازه‌ی (طول) پاره خط AB به صورت زیر است.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



برای مطالعه: برای اثبات درستی این موضوع از رابطه‌ی فیثاغورس استفاده می‌شود.

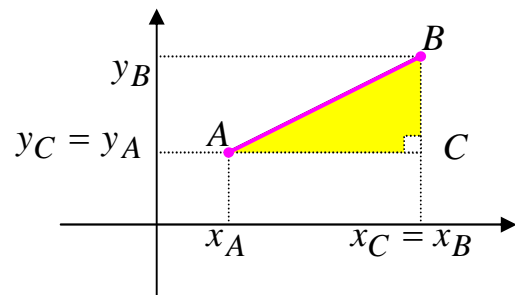
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AC = |x_C - x_A| = |x_B - x_A|$$

$$BC = |y_B - y_C| = |y_B - y_A|$$

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

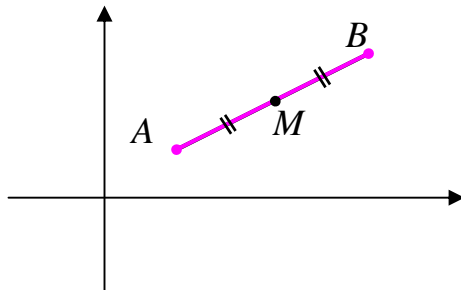
$$\rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط

اگر A و B دو نقطه روی صفحه باشند و نقطه‌ی M نقطه‌ی وسط (میانی) پاره خط AB باشد، در این

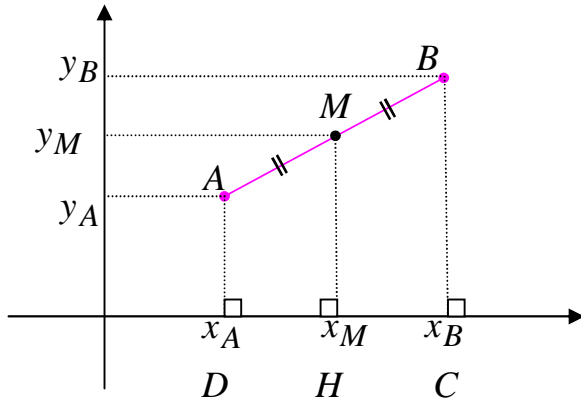
صورت مختصات نقطه‌ی M به شکل زیر است.



$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

برای مطالعه : برای اثبات این موضوع می توان به شکل زیر استدلال کرد.

اگر A و B دو نقطه روی صفحه باشند و نقطه ی M نقطه ی وسط (میانی) پاره خط AB در نظر گرفته



شود. در این صورت می توان گفت که چون

نقطه ی M وسط پاره خط AB از متوازی

الاضلاع $ABCD$ می باشد و MH موازی

دو قاعده رسم شده است (هر سه بر محور x

عمودند). پس بنابر قضیه ی خطوط موازی

(تالس) می توان نوشت :

$$\frac{DH}{HC} = \frac{AM}{MB} \xrightarrow{AM=MB} \frac{DH}{HC} = 1 \rightarrow DH = HC$$

$$\rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \rightarrow 2x_M = x_A + x_B \rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

و به همین ترتیب ثابت می شود.

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

تمرین ۶ : دو نقطه ی $A(3, -7)$ و $B(-1, -4)$ داده شده اند.

الف) طول پاره خط AB را تعیین کنید.

ب) مختصات نقطه ی M وسط پاره خط AB را به دست آورید.

تمرین برای حل :

۷ : اگر $A(1, 0)$ و $B(-2, 3)$ دو رأس مقابل مربعی باشند. مساحت مربع را محاسبه کنید

۸ : نقاط $A(-3, 0)$ و $B(6, 10)$ و $C(0, 6)$ سه رأس یک مثلث می باشند. اندازه ی میانه ^۱ی وارد بر

ضلع BC را تعیین کنید.

۹ : اگر $A(-1, 2)$ و $B(3, -1)$ و $C(2, -2)$ سه رأس مثلثی باشند، نوع مثلث را تعیین کنید.

^۱. در هر مثلث، میانه، پاره خطی است که وسط یک ضلع را به رأس مقابل آن وصل می کند.

۱۰: اگر $A(4,0)$ و $B(2,-2\sqrt{3})$ و مبدأ مختصات سه رأس مثلثی باشند، ابتدا نوع مثلث را تعیین کنید و سپس مساحت و محیط آن را تعیین کنید.

یادآوری: مساحت هر مثلث

متساوی الاضلاع به ضلع a

$$\text{برابر } \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ است.}$$

۱۱: اگر $A(2,3)$ و $B(-1,0)$ و $C(-5,4)$ سه رأس مثلثی باشند، ابتدا

نوع مثلث را تعیین کنید و سپس مساحت آن را تعیین کنید.

۱۲: دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای، نقاط $A(2,-2)$ و $B(6,4)$

هستند.

الف) اندازه‌ی شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطه‌ی $P(7,3)$ بر روی محیط دایره قرار دارد؟ چرا؟

رابطه‌ی بین مختصات رئوس متوازی الاضلاع

در هر متوازی الاضلاع مجموع طول‌های دو رأس روبرو با مجموع طول‌های دو رأس روبروی دیگر برابر است.

$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

به همین ترتیب مجموع عرض‌های دو رأس روبرو با مجموع عرض‌های دو رأس روبروی دیگر برابر است.

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

برای مطالعه: برای اثبات این مطلب می‌توان از موضوع هندسی زیر استفاده کرد.

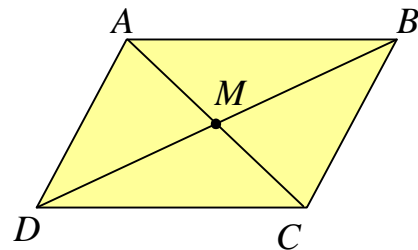
با توجه به اینکه در متوازی الاضلاع قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند. لذا می‌توان نوشت:

$$AC \text{ وسط پاره خط } \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_C}{2}$$

$$BD \text{ وسط پاره خط } \Rightarrow x_M = \frac{x_B + x_D}{2}$$

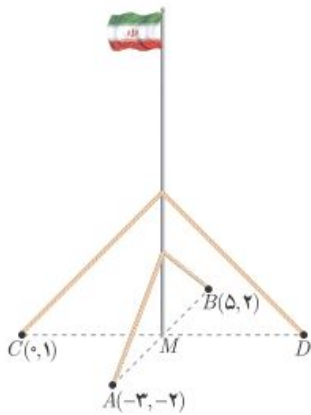
$$\Rightarrow x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$\Rightarrow y_A + y_C = y_B + y_D$$



و به همین ترتیب داریم:

تمرین ۱۳: اگر $A(-۱,۲)$ و $B(۳,۴)$ و $C(۲,۰)$ مختصات سه رأس متوالی از متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، مختصات رأس D را تعیین کنید.



تمرین ۱۴: یک میله ی پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است، به طوری فاصله ی هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصله ی نقطه ی مقابل آن تا پای میله می باشد، مختصات نقطه ی D را به دست آورید.

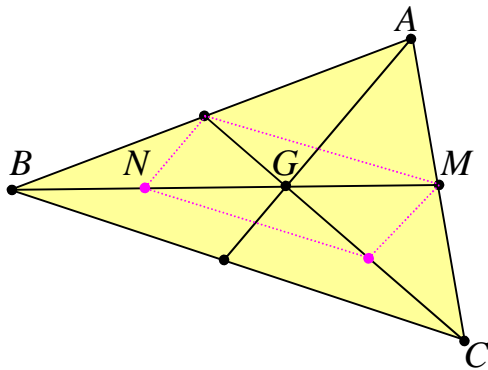
تمرین ۱۵: مقادیر m و n را طوری تعیین کنید که نقاط زیر به همین ترتیب رئوس متوازی الاضلاع باشند.

$$A(۱, n + ۳) \text{ و } B(n - ۱, ۲m) \text{ و } C(۳, ۱) \text{ و } D(۳m, -۱)$$

مختصات مرکز ثقل مثلث (نقطه ی برخورد میانه های مثلث)

اگر نقطه ی G محل تقاطع میانه های مثلث ABC باشد. در این صورت می توان نوشت:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \text{و} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$



برای مطالعه: اگر G نقطه ی برخورد میانه های

مثلث ABC باشد. ثابت می شود که نقطه ی برخورد

میانه های مثلث به فاصله ی $\frac{1}{3}$ طول هر میانه از وسط

ضلع مقابل و به فاصله ی $\frac{2}{3}$ طول هر میانه از رأس

نظیر آن میانه است.

$$BG \text{ پاره خط } N \text{ نقطه ی } \Rightarrow x_N = \frac{x_B + x_G}{2}$$

$$MN \text{ پاره خط } G \text{ نقطه ی } \Rightarrow x_G = \frac{x_N + x_M}{2}$$

$$AC \text{ پاره خط } M \text{ نقطه ی } \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_C}{2}$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{\frac{x_B + x_G}{2} + \frac{x_A + x_C}{2}}{2} \Rightarrow 2x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_G}{2}$$

$$\Rightarrow 4x_G = x_A + x_B + x_C + x_G \Rightarrow 3x_G = x_A + x_B + x_C$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

و به همین ترتیب ثابت می شود.

$$\Rightarrow y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

تمرین ۱۶: اگر $A(-2, 3)$ و $B(4, -1)$ و $C(-8, 4)$ سه رأس مثلثی باشند. مختصات محل تلاقی میانه

های مثلث را به دست آورید.

² محل تقاطع میانه های هر مثلث را مرکز ثقل مثلث نیز می نامند.

شیب خط

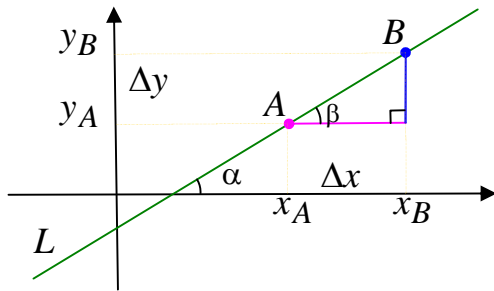
اگر A و B دو نقطه از خط L باشند. شیب (ضریب زاویه) خط L به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$m_L = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

بنابر قضیه‌ی خطوط موازی واضح است که $\angle \alpha = \angle \beta$. همچنین بنابر بر تعریف تانژانت زاویه‌ی حاده در مثلث قائم‌الزاویه می‌توان نوشت.

$$m_L = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan(\beta) = \tan(\alpha)$$

لذا شیب هر خط، تانژانت زاویه‌ی ای است که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.



نتیجه: با این تعریف واضح است که

الف: شیب محور طولها و هر خط موازی آن، برابر صفر است.

ب: شیب محور عرضها و هر خط موازی آن، تعریف نشده است.

ج: شیب نیمساز ربع اول و سوم برابر ۱ و شیب نیمساز ربع دوم و چهارم برابر -۱ است.

تمرین ۱۷: شیب خط گذرا از دو نقطه‌ی $A(5, -4)$ و $B(3, 0)$ را به دست آورید.

تمرین ۱۸: خطی با محور طولها در جهت مثبت زاویه‌ی 30° درجه تشکیل می‌دهد. شیب این خط را

بنویسید.

تمرین ۱۹: ثابت کنید که سه نقطه‌ی $A(-4, 2)$ و $B(-2, 0)$ و $C(1, -3)$ روی یک خط راست واقع اند.

معادله‌ی خط

هر رابطه‌ی خطی بین طول و عرض تمام نقاط خط را معادله‌ی خط می نامند.

مثال : دو نقطه‌ی $A(3,7)$ و $B(1,3)$ را در نظر بگیرید. به کمک تعیین رابطه‌ی طول و عرض این دو نقطه، معادله‌ی خط AB را بنویسید.

حل : با کمی دقت معلوم می شود که اگر ابتدا طول هر کدام از این دو نقطه را دو برابر و سپس با عدد یک جمع کنیم، عرض نقطه به دست می آید. لذا رابطه‌ی موجود (معادله‌ی خط) به صورت زیر است.

$$y = 2x + 1$$

تمرین ۲۰ : نمودار خط مثال قبل را رسم کنید.

تذکر : به طور کلی معادله‌ی هر خط به صورت زیر است.

$$y = mx + n$$

در این معادله که آن را **معادله‌ی استاندارد خط** نیز می نامند، عدد m (ضریب x) را شیب و عدد n را عرض از مبدأ^۳ می نامند.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $(2,7)$ و $(5,3)$ می گذرد.

حل :

روش اول: ابتدا شیب خط را تعیین می کنیم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 3}{2 - 5} = \frac{4}{-3}$$

و چون معادله‌ی خط به صورت $y = mx + n$ می باشد، پس :

$$y = \frac{-4}{3}x + n$$

اکنون برای تعیین مقدار n مختصات یکی از نقاط داده شده را در این معادله جایگزین می کنیم.

$$(2,7) \rightarrow \frac{-4}{3}x + n \rightarrow 7 = \frac{-4}{3}(2) + n \rightarrow n = \frac{29}{3}$$

در نهایت معادله‌ی خط را به صورت زیر به دست می آوریم.

³. محل تلاقی هر خط با محور عرض ها را عرض از مبدأ می نامند.

$$y = mx + n \rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3}$$

روش دوّم: چون معادله‌ی خط به صورت $y = mx + n$ می باشد. مختصات دو نقطه‌ی داده شده را در این معادله جایگزین می کنیم.

$$\begin{cases} 5m + n = 3 \\ 2m + n = 7 \end{cases} \xrightarrow{(-1) \times} \begin{cases} 5m + n = 3 \\ 2m + n = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5m - n = -3 \\ 2m + n = 7 \end{cases}$$

$$\rightarrow -3m = 4 \rightarrow m = \frac{4}{-3}, n = \frac{29}{3}$$

لذا معادله‌ی خط مطلوب به شکل زیر است.

$$y = mx + n \rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3}$$

نتیجه: معادله‌ی هر خط که گذرا از مبدأ مختصات به صورت $y = mx$ است.

تمرین ۲۱: معادله‌ی خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و شیب آن -3 باشد.

روش های تعیین معادله‌ی خط

واضح است که از هر نقطه بی شمار خط می گذرد، ولی فقط یک خط با شیب معین از هر نقطه می گذرد. اگر خطی با شیب m گذرا از نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ در نظر گرفته شود. می توان معادله‌ی خط را به صورت زیر نوشت:

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

تمرین ۲۲: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $P(-2, 1)$ بگذرد و شیب -5 آن باشد.

تمرین ۲۳: معادله‌ی خط را بنویسید که از نقطه‌ی $P(3, -1)$ بگذرد و با محور طول ها در جهت مثبت

زاویه‌ی 60° درجه تشکیل دهد.

تمرین ۲۴: معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی (۲,۷) و (۵,۳) می‌گذرد.

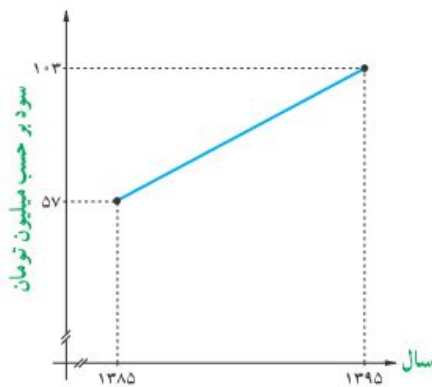
حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 3}{2 - 5} = \frac{4}{-3}$$

$$y = m(x - x_1) + y_1 \rightarrow y = -\frac{4}{3}(x - 5) + 3 \rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} + 3 = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3}$$

توجه: از هر دو نقطه فقط یک خط می‌گذرد. لذا برای رسم نمودار خط کافی است، دو نقطه از نمودار آن خط را تعیین کنیم.

تمرین ۲۵: نمودار خط $y = -\frac{1}{2}x + 3$ را رسم کنید.



تمرین ۲۶: سود سالانه‌ی یک کارگاه کوچک تولیدی از

سال ۱۳۸۵ الی ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است.

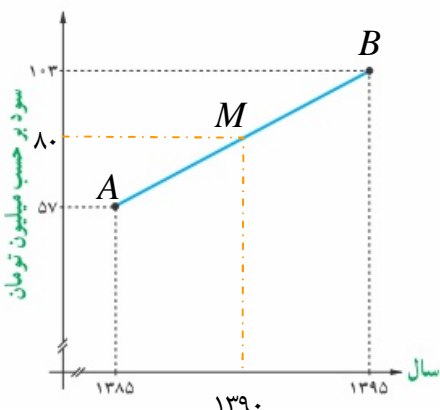
الف: میانگین سود سالانه‌ی این شرکت در دهه‌ی مورد نظر چقدر بوده است؟

ب: در کدام سال، مقدار سود سالانه، با میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ: اگر سود سالانه در طول یک دهه‌ی آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه‌ی شرکت چقدر باشد؟

حل:

الف:



$$x_M = \frac{1385 + 1395}{2} = 1390$$

و

$$y_M = \frac{57 + 103}{2} = 80 \text{ (سود متوسط)}$$

ب: ابتدا معادله ی خط AB را می نویسیم.

$$m_{AB} = \frac{۱۰۳ - ۵۷}{۱۳۹۵ - ۱۳۸۵} = \frac{۲۳}{۵}$$

$$y = \frac{۲۳}{۵}(x - ۱۳۸۵) + ۵۷$$

$$y = ۸۰ \xrightarrow{y = \frac{۲۳}{۵}(x - ۱۳۸۵) + ۵۷} ۸۰ = \frac{۲۳}{۵}(x - ۱۳۸۵) + ۵۷ \rightarrow ۲۳ = \frac{۲۳}{۵}x - ۶۳۷۱$$

$$\rightarrow ۶۳۹۴ = \frac{۲۳}{۵}x \rightarrow ۳۱۹۷۰ = ۲۳x \rightarrow x = \frac{۳۱۹۷۰}{۲۳} = ۱۳۹۰$$

پ :

$$y = \frac{۲۳}{۵}(x - ۱۳۸۵) + ۵۷ \xrightarrow{x=۱۴۰۵} y = \frac{۲۳}{۵}(۱۴۰۵ - ۱۳۸۵) + ۵۷ = ۱۴۹$$

معادله‌ی کلی خط

برای هر خط می توان معادله ای به صورت زیر نوشت:

$$ax + by + c = 0$$

واضح است که این معادله را می توان به صورت زیر نیز نوشت :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

پس شیب خط برابر $m = \frac{-a}{b}$ و عرض از مبدأ آن $n = -\frac{c}{b}$ است. توجه داشته باشید که عرض نقطه

تلاقی خط با محور عرض ها را عرض از مبدأ می نامند.

نتیجه: معادله‌ی برخی از خطوط مهم به صورت زیر است.

ردیف	عنوان	معادله	شیب
۱	محور طول ها	$y = 0$	$m = 0$
۲	محور عرض ها	$x = 0$	تعریف نمی شود.
۳	نیمساز ربع اول و سوم	$y = x$	$m = 1$
۴	نیمساز ربع دوم و چهارم	$y = -x$	$m = -1$

تمرین ۲۷: معادله‌ی خطی به صورت $6x + 2y - 4 = 0$ است.

الف: شیب و عرض از مبدأ این خط را به دست آورید.

ب: محل تقاطع این خط با محورهای مختصات را تعیین کنید.

ج: نمودار خط را رسم کنید.

تمرین ۲۸: نمودار هر یک از خطوط زیر را رسم کنید.

الف) $y = -2x + 1$

پ) $y = -2$

ث) $y = \frac{1}{3}x$

ب) $2x + 3y = 6$

ت) $x = \frac{3}{2}$

تمرین ۲۹: مقدار k را طوری تعیین کنید که شیب خط به معادله‌ی زیر برابر -2 باشد.

$$kx + (k - 2)y = -3k$$

تمرین برای حل :

۳۰: مقدار k را طوری تعیین کنید که سه نقطه‌ی $A(-3,0)$ و $B(k+1,-2)$ و $C(3,2)$ روی یک خط راست واقع باشند.

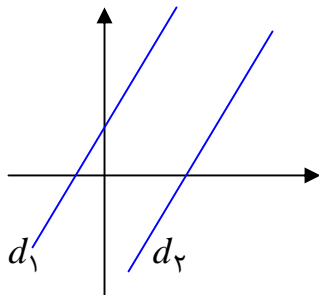
۳۱: معادله‌ی خط گذرا از دو نقطه‌ی $A(2,-1)$ و $B(3,2)$ را بنویسید.

۳۲: معادله‌ی خطی را بنویسید که محور طولها را در نقطه‌ای به طول ۳ و محور عرض ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند.

۳۳: نقاط $A(1,2)$ و $B(-3,2)$ و $C(0,-1)$ سه رأس یک مثلث هستند. معادله‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع BC را بنویسید.

رابطه‌ی بین شیب های خطوط موازی

دو خط موازیند، اگر و تنها اگر شیب های مساوی داشته باشند.



$$m_1 = m_2 \leftrightarrow d_1 \parallel d_2$$

تمرین ۳۴: نشان دهید که دو خط به معادلات زیر موازیند.

$$y = -2x + 3 \quad \text{و} \quad 6x + 3y = 5$$

تمرین ۳۵: معادلات دو خط زیر را در نظر بگیرید.

$$x - 4y = -2 \quad \text{و} \quad 2x + y = 5$$

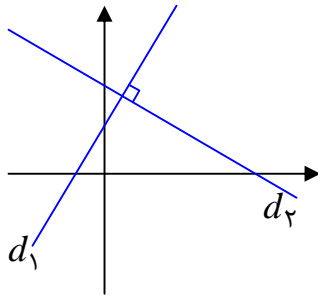
الف) ثابت کنید که این دو خط متقاطع هستند.

ب) مختصات نقطه‌ی تقاطع این دو خط را تعیین کنید.

ج) نمودار هر دو خط را رسم کنید و نقطه‌ی تقاطع آنها را تعیین کنید.

تمرین ۳۶: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $P(-1,3)$ بگذرد و موازی با خط به معادله‌ی $2x + y = 3$ باشد.

رابطه‌ی بین شیب های دو خط عمود بر هم



دو خط بر هم عمودند، اگر و تنها اگر حاصل ضرب شیب های آنها برابر ۱- باشد. به عبارتی دیگر اگر شیب خطی عکس و قرینه ی شیب دیگری باشد، آن دو خط بر هم عمودند.

$$m_1 \times m_2 = -1 \leftrightarrow d_1 \perp d_2$$

تمرین ۳۷: نشان دهید که دو خط به معادلات زیر بر هم عمودند.

$$3x - 4y = -2 \quad \text{و} \quad y = -\frac{4}{3}x + 1$$

تمرین ۳۸: معادله‌ی خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و بر خط به معادله‌ی $x + 3y = 4$ عمود باشد.

تمرین برای حل :

۳۹: نقاط $A(4,0)$ و $B(1,3)$ و $C(0,-2)$ سه رأس یک مثلث هستند. معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC را بنویسید.

۴۰: معادله‌ی خطی را بنویسید که محور طول ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند و موازی خط به معادله‌ی $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ باشد.

۴۱: معادله‌ی خطی را بنویسید که محور عرض ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند و عمود بر خط به معادله‌ی $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ باشد.

۴۲: نقاط $A(5,1)$ و $B(10,4)$ و $C(7,9)$ سه رأس از مربع $ABCD$ می باشند.

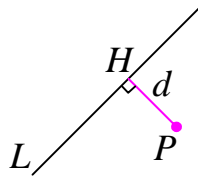
الف: معادله‌ی اضلاع AB و DC و BC را بنویسید.

ب : مختصات نقطه‌ی D را تعیین کنید.

ج : مربع را رسم کنید.

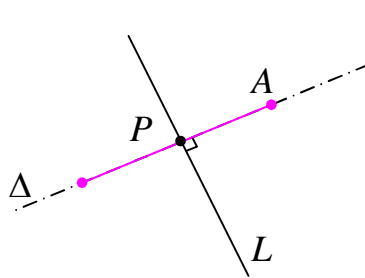
د : مساحت و محیط مربع را به دست آورید.

فاصله‌ی نقطه تا خط



فاصله‌ی هر نقطه خارج یک خط، برابر طول پاره خطی است که از نقطه بر خط عمود رسم می‌شود. بدیهی است که فاصله‌ی هر نقطه، روی خط تا آن خط برابر صفر است.

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(7,5)$ را از خط L به معادله‌ی $4x + 3y = 18$ به دست آورید.



حل: چون شیب خط L برابر $-\frac{4}{3}$ است، پس هر خط عمود بر آن

دارای شیب $\frac{3}{4}$ خواهد بود. معادله‌ی خط Δ گذرنده از A و عمود بر L

را می‌نویسیم.

$$\Delta: y = \frac{3}{4}x + h$$

و چون نقطه‌ی $A(7,5)$ روی خط Δ قرار دارد، داریم:

$$5 = \frac{3}{4}(7) + h \rightarrow h = -\frac{1}{4}$$

لذا معادله‌ی خط Δ به صورت زیر است.

$$\Delta: y = \frac{3}{4}x + h \rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \rightarrow 3x + 4y = 1$$

اگر معادلات دو خط L و Δ را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل آن مختصات نقطه‌ی P ، محل برخورد این دو خط به دست می‌آید.

$$\begin{cases} L: 4x + 3y = 18 \\ \Delta: 3x - 4y = 1 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = 2 \Rightarrow P(3, 2)$$

واضح است که طول پاره خط AP جواب مسئله است.

$$AP = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(7 - 3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

همانطور که مشاهده می‌کنید، این روش برای حل مسئله، روشی نسبتاً طولانی است. می‌توان از فرمول زیر نیز استفاده کرد.

فاصله نقطه $P(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه زیر به دست می آید.

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: فاصله نقطه $A(7, 5)$ را از خط L به معادله $4x + 3y = 18$ به دست آورید.

حل:

$$4x + 3y = 18 \rightarrow 4x + 3y - 18 = 0$$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(7) + 3(5) - 18|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \frac{|4(7) + 3(5) - 18|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \frac{25}{\sqrt{25}} = 5$$

نتیجه: فاصله مبدأ مختصات از خط به معادله $ax + by + c = 0$ به شکل زیر است.

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تمرین ۴۳: فاصله نقطه $P(1, -1)$ تا خط به معادله $3x - 4y = -3$ را به دست آورید.

تمرین ۴۴: نقاط $A(3, 2)$ و $B(-2, 3)$ و $C(0, -3)$ سه رأس یک مثلث هستند.

الف: اندازه ارتفاع وارد بر ضلع BC را به دست آورید.

ب: مساحت مثلث را حساب کنید.

توجه: اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ سه رأس مثلثی باشند، می توان مساحت مثلث را

به کمک رابطه زیر محاسبه کرد. ثابت می شود که قدر مطلق عدد حاصل برابر مساحت مثلث است.

$$S = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

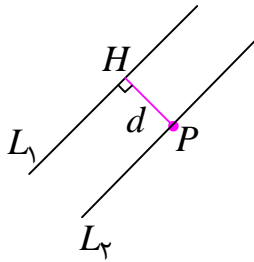
- - - + + +

مثال: نقاط $A(3, 2)$ و $B(-2, 3)$ و $C(0, -3)$ سه رأس یک مثلث هستند. مساحت مثلث را به دست آورید.

حل:

$$\rightarrow S = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (9 + 6 + 0 + 4 + 0 + 9) = 14$$

فاصله ی بین دو خط موازی



فاصله ی دو خط موازی ، طول پاره خطی است که از هر نقطه ی واقع بر یکی بر دیگری عمود رسم می شود. بدیهی است که فاصله ی دو خط منطبق بر هم برابر صفر است.

فاصله ی دو خط موازی به معادلات :

$$L_1: ax + by + c_1 = 0 \quad \text{و} \quad L_2: ax + by + c_2 = 0$$

به صورت زیر است.

$$d = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تمرین ۴۵: فاصله ی بین دو خط موازی زیر را تعیین کنید.

$$4x + 3y + 7 = 0 \quad \text{و} \quad 4x + 3y - 8 = 0$$

تمرین ۴۶: اگر $A(6, 3)$ و $B(7, 0)$ دو رأس مجاور یک مستطیل باشند و معادله ی ضلع CD از این

مستطیل به صورت $3x + y = 1$ باشد. مساحت مستطیل را به دست آورید.

تمرین برای حل :

۴۷: یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد،

مساحت آن را به دست آورید.

۴۸: فاصله ی نقطه ی $A(1, -4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر ۴ است. مقدار k را به دست آورید.

۴۹: فاصله ی نقطه ی برخورد دو خط به معادلات $2y - x + 1 = 0$ و $y + x - 4 = 0$ را از خط d به

معادله ی $7x - 24y - 2 = 0$ را تعیین کنید.

۵۰: خط L به معادله ی $3x - 4y = 0$ بر دایره ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. شعاع دایره را

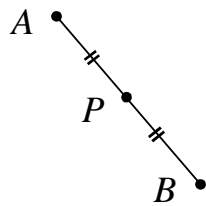
بیابید.^۴

۵۱: فاصله ی بین دو خط موازی زیر را تعیین کنید.

$$6x - 8y - 7 = 0 \quad \text{و} \quad 3x - 4y + 1 = 0$$

^۴ توجه داشته باشید که شعاع دایره بر خط مماس در نقطه ی تماس عمود است.

قرینه‌ی یک نقطه نسبت به نقطه‌ی دیگر



نقطه‌ی B را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی P گویند، هرگاه نقطه‌ی P وسط پاره خط AB باشد.

برای مطالعه: با توجه به این تعریف اگر $P(\alpha, \beta)$ باشد، در این صورت، واضح است که

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow \alpha = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow x_A + x_B = 2\alpha \rightarrow x_B = 2\alpha - x_A$$

$$y_P = \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow \beta = \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow y_A + y_B = 2\beta \rightarrow y_B = 2\beta - y_A$$

لذا مختصات نقطه‌ی B قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی $P(\alpha, \beta)$ به صورت زیر است.

$$\begin{cases} x_B = 2\alpha - x_A \\ y_B = 2\beta - y_A \end{cases}$$

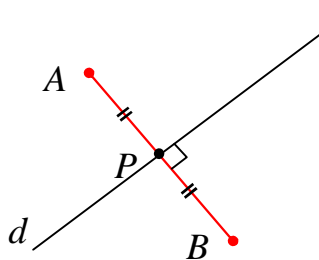
نتیجه: مختصات نقطه‌ی B قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به مبدأ مختصات به شکل زیر است.

$$\begin{cases} x_B = -x_A \\ y_B = -y_A \end{cases}$$

تمرین ۵۲: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-3, 2)$ را نسبت به نقطه‌ی $P(3, 0)$ به دست آورید.

تمرین ۵۳: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(5, -2)$ را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.

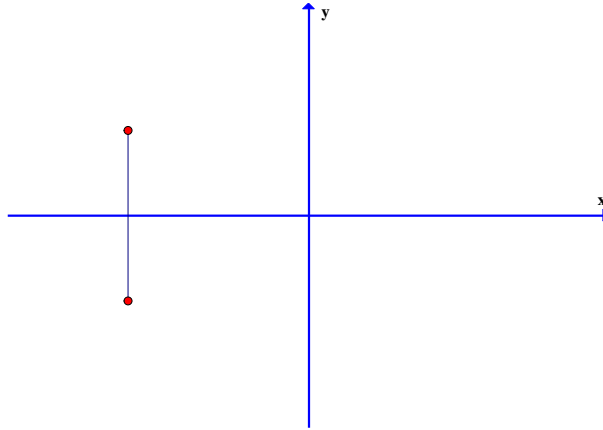
قرینه‌ی یک نقطه نسبت به یک خط



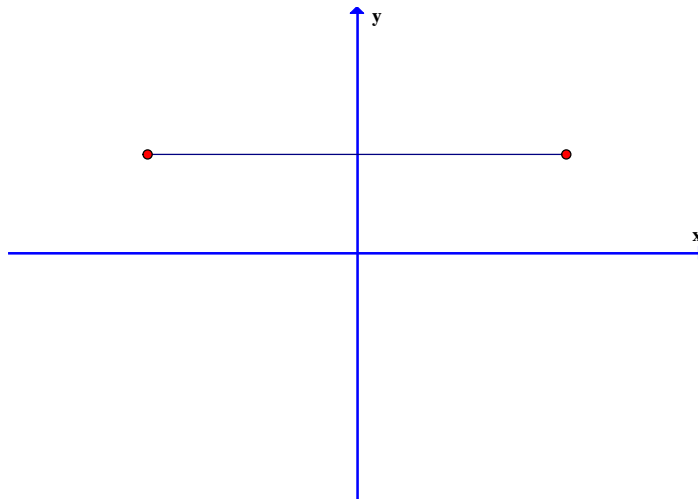
نقطه‌ی B را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط d گویند، هرگاه خط d عمود منصف پاره خط AB باشد.

نتیجه :

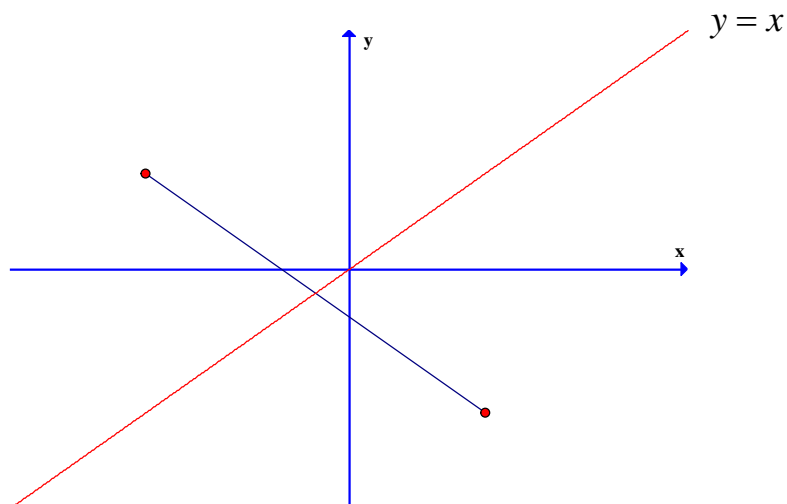
۱: قرینه ی نقطه ی $A(x_0, y_0)$ نسبت به محور طول ها (خط $y = 0$) به صورت $B(x_0, -y_0)$



۲: قرینه ی نقطه ی $A(x_0, y_0)$ نسبت به محور عرض ها (خط $x = 0$) به صورت $B(-x_0, y_0)$

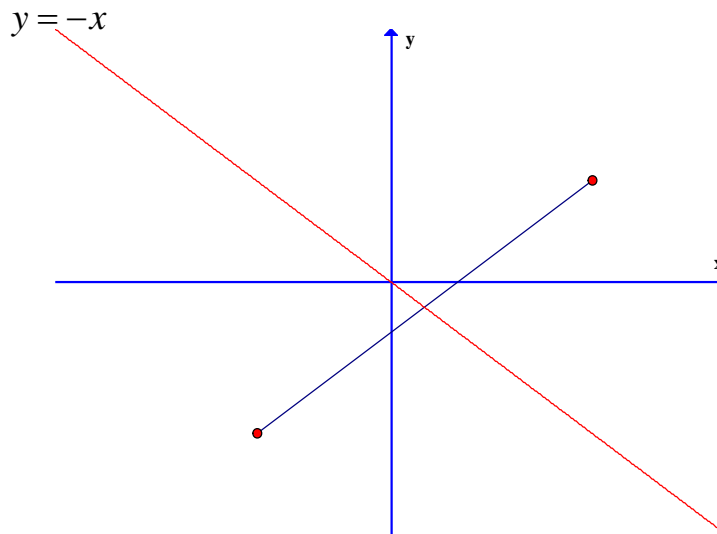


۳: قرینه ی نقطه ی $a(x_0, y_0)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (خط $y = x$) به صورت $B(y_0, x_0)$



۴: قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم (خط $y = -x$) به

صورت $B(-y_0, -x_0)$



تمرین ۵۴: نقطه‌ی $A(۲, -۳)$ داده شده است. بازتاب این نقطه را در حالت های مختلف زیر بدست آورید.

ب: نسبت به محور y ها

الف: نسبت به محور x ها

د: نسبت به محور $y = -x$

ج: نسبت به محور $y = x$

حل:

$$A(۲, -۳) \rightarrow B(۲, ۳)$$

الف:

$$A(۲, -۳) \rightarrow B(-۲, -۳)$$

ب:

$$A(۲, -۳) \rightarrow B(-۳, ۲)$$

ج:

$$A(۲, -۳) \rightarrow B(۳, -۲)$$

د:

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

درس دوم: معادلات و توابع درجه‌ی دوم

در این درس ابتدا با بحث‌های تکمیلی پیرامون معادله و تابع درجه‌ی ۲ و آشنا و سپس با معرفی نقطه‌ی ماکزیمم و مینیمم و مفهوم صفر تابع درجه‌ی دوم، می‌توان بسیاری از مسائل ریاضیات را بررسی و حل کرد.

قسمت اول: یادآوری معادله‌ی درجه‌ی ۲

در سال گذشته با معادله‌ی درجه‌ی ۲ آشنا شده‌اید. حتماً به یاد دارید که برای حل این معادله روش‌های متفاوتی وجود دارد. روش تجزیه و روش کلاسیک (کلی) را به خاطر دارید. بهتر است قبل از ورود به بحث این دو روش را در قالب مثال یادآوری کنیم.

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

حل به روش تجزیه :

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \rightarrow \frac{1}{2}(2x - 1)(2x + 6) = 0 \rightarrow (2x - 1)(x + 3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

حل به روش کلاسیک : $a = 2$ و $b = 5$ و $c = -3$

معادله دوریشه‌ی حقیقی دارد. $\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(5) + \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(5) - \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

یادآوری: هر معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ ، یک معادله‌ی درجه‌ی دوم است.

یک روش حل معادله‌ی درجه‌ی دوم به صورت زیر است. این روش را روش کلی یا روش کلاسیک می‌نامند.

برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم به این روش به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

۱) با نوشتن معادله به صورت استاندارد، ضرایب معادله یعنی c و b و a را مشخص می کنیم. (ضریب x^2 را a ، ضریب x را b و عدد ثابت را c می گیریم.)

۲) مبین معادله یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ را محاسبه می کنیم.

۳) با توجه به علامت Δ تعداد و مقدار ریشه ها را به کمک حالت های زیر تعیین می کنیم.

اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای دو ریشه است. مقدار این ریشه ها را از تساوی های زیر محاسبه می کنیم.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای فقط یک ریشه (ریشه ی مضاعف^۱) است. مقدار این ریشه را از تساوی زیر محاسبه می کنیم.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله دارای ریشه ی حقیقی نیست.

تمرین ۱: معادله های زیر را حل کنید.

الف) $3k^2 = 13k + 10$ ب) $r^2 + 2k + 5 = 0$ ج) $9u^2 + 12u + 4 = 0$

قسمت دوم: حل معادلات به روش تغییر متغیر

گاهی لازم می شود برای حل یک معادله از روش تغییر متغیر استفاده کرد. در این روش متغیر جدید را طوری در نظر می گیریم که روش حل معادله ی به دست آمده را می دانیم. با حل این معادله می توان ریشه های معادله ی اولیه را نیز به دست آورد.

مثال: معادله ی زیر را حل کنید.

$$x^4 - 3x^2 - 10 = 0$$

حل: کافی است قرار دهیم، $x^2 = t$. لذا خواهیم داشت:

^۱. ریشه ی مکرر مرتبه ی دوم

$$t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$(t - 5)(t + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 5 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \\ t = -2 \rightarrow x^2 = -2 \text{ م غ} \end{cases}$$

تمرین برای حل: معادله‌های زیر را حل کنید.

$$۲) x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad ۳) (x^2 - 3)^2 - 3x^2 + 11 = 0 \quad ۴) 4^x - 12(2^x) + 32 = 0$$

قسمت سوم: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی ۲

گاهی به جای تعیین مقدار ریشه‌های یک معادله‌ی درجه‌ی ۲، تنها مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های آن اهمیت دارد. مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های هر معادله‌ی درجه‌ی ۲ به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ از رابطه‌های زیر به دست می‌آید.

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{مجموع ریشه‌ها}$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{حاصل ضرب ریشه‌ها}$$

تمرین ۵: بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$$3x^2 + 5x - 1 = 0$$

برای مطالعه: روابط به مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی ۲ را می‌توان به صورت زیر

اثبات کرد.

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

تمرین برای حل:

۶: بدون حل معادله و فقط با استفاده از S و P و Δ در مورد وجود و علامت ریشه های معادله-

$$5x^2 - 7x - 5 = 0 \text{ ی بحث کنید.}$$

قسمت چهارم: تشکیل معادله ی درجه ی ۲

با معلوم بودن مجموع و حاصل ضرب ریشه های یک معادله ی درجه ی ۲ می توان آن معادله را تعیین کرد.

اگر S مجموع و P حاصل ضرب ریشه های این معادله باشند. می توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

تمرین ۷: معادله ی درجه ی دومی بنویسید که مجموع ریشه های آن $-1/5$ و حاصل ضربشان -7 باشد.

برای مطالعه: اثبات این معادله به صورت زیر است.

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\div a} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \rightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

تمرین برای حل:

۸: معادله ی درجه ی دومی بنویسید که $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ ریشه های آن باشند.

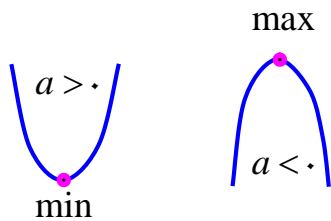
۹: معادله ی درجه ی دومی بنویسید که $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ و $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ ریشه های آن باشند.

۱۰: اندازه ی طول و عرض مستطیلی را به دست آورید که محیط آن ۱۱ سانتی متر و مساحت آن ۶ سانتی

متر مربع باشد.

قسمت پنجم: یاد آوری تابع درجه ۲ (سهمی)

در سال گذشته به یاد دارید که هر تابع درجه ی ۲ دارای معادله ای به صورت $y = ax^2 + bx + c$ (که در آن $a \neq 0$ است.) می باشد. نمودار چنین توابعی یک منحنی رو به بالا یا رو به پایین می باشد. این منحنی را سهمی می نامند. نمودار هر سهمی دارای بالاترین یا پایین ترین نقطه

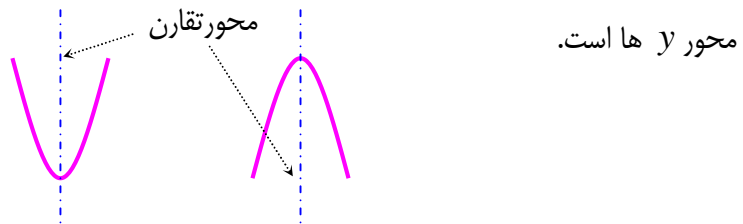


می باشد که آن را رأس سهمی می نامند.

الف: اگر $a > 0$ باشد نمودار سهمی رو به بالا (دارای می نیمم) و اگر $a < 0$ باشد، نمودار سهمی رو به پایین (دارای ماکزیمم) است.

ب: طول نقطه ی رأس سهمی از رابطه ی $x = \frac{-b}{2a}$ بدست می آید و برای تعیین عرض آن کافی است، طول بدست آمده را در معادله جایگزین کنیم.

ج: نمودار سهمی دارای یک محور تقارن است که معادله ی آن بصورت $x = \frac{-b}{2a}$ می باشد و همواره موازی



برای رسم نمودار سهمی کافی است که علاوه بر رأس سهمی دو نقطه را چنان انتخاب کنیم که طول یکی بیشتر و طول دیگری کمتر از طول رأس سهمی باشد.

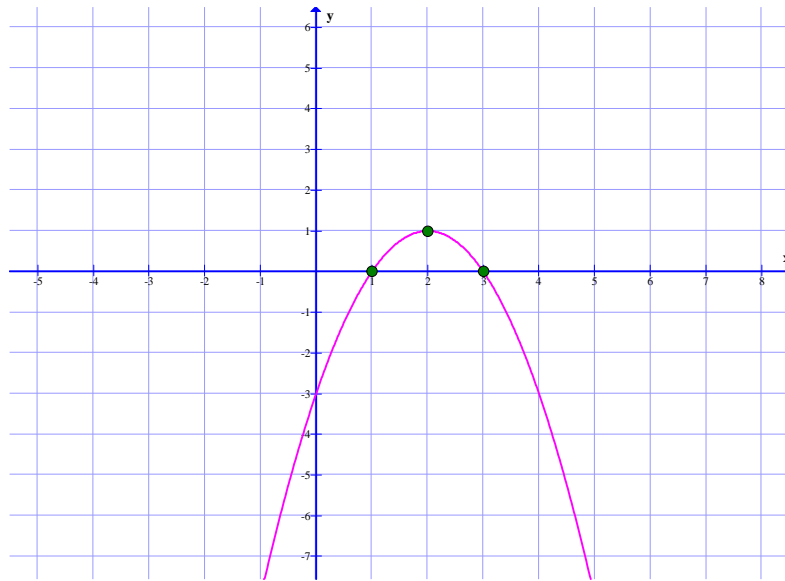
مثال: نمودار سهمی به معادله ی $y = -x^2 + 4x - 3$ را رسم کنید.

حل: ابتدا طول رأس سهمی را تعیین می کنیم.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2$$

اکنون جدول زیر را تکمیل می کنیم.

x	۱	۲	۳
y	۰	۱	۰



تمرین ۱۱: نمودار معادلات زیر را رسم کنید.

الف) $y = x^2 - 2x - 3$

ب) $y = -(x - 3)^2 + 1$

ج) $y = -4x^2 + 8x + 1$

تمرین ۱۲: مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ با ضابطه‌ی $f(x)$ را در صورت وجود به

دست آورید.

حل: چون $a = -1$ منفی است، پس سهمی رو به پایین است. لذا سهمی دارای نقطه‌ی ماکزیمم است.

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2(-1)} = 1$$

همچنین بیشترین مقدار تابع به ازای $x = 1$ می باشد.

$$f(1) = -(1)^2 + 2(1) + 3 = 4$$

تذکر: در این تمرین نقطه‌ی $(1, 4)$ رأس سهمی و مقدار ماکزیمم نمودار سهمی برابر ۴ می باشد.

² منظور عرض نقاط ماکزیمم یا مینیمم است.

تمرین برای حل :

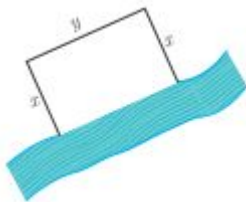
۱۳: مقدار m را چنان بیابید که $x = 2$ طول رأس سهمی به معادله‌ی $y = mx^2 + (m - 1)x + 1$ باشد.

۱۴: کمترین مقدار تابع $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ را تعیین کنید.

۱۵: بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ را محاسبه کنید.

۱۶: اگر $3x + 5y = 150$ مقدار y و x را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ماکزیمم شود.

حل چند تمرین کاربردی :



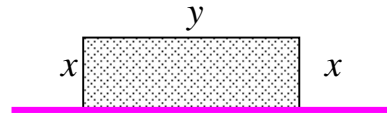
۱۷: قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده کشی شود. اگر تنها هزینه‌ی نصب ۱۲۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم. بیشترین مساحت ممکن این محوطه را تعیین کنید.

حل :

$$y + 2x = 120 \rightarrow y = 120 - 2x$$

$$S = xy \text{ مساحت مستطیل}$$

$$S(x) = x(120 - 2x) \rightarrow S(x) = 120x - 2x^2$$



تابع به دست آمده، یک تابع درجه‌ی دوم است و در آن $a = -2 < 0$ می باشد. پس تابع دارای بیشترین مقدار است. بیشترین مقدار را به روش زیر تعیین می کنیم.

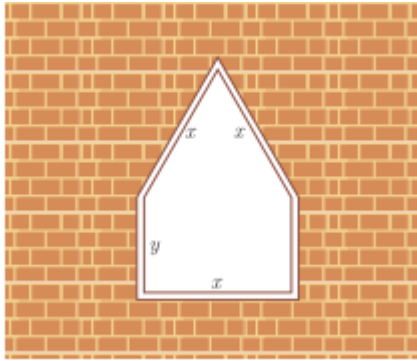
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{2(-2)} = 30$$

$$S(30) = 120(30) - 2(30)^2 = 3600 - 1800 = 1800 \text{ m}^2$$

توجه: مقدار مساحت را پس از تعیین مقدار x نیز می توان به شکل زیر به دست آورد.

$$y = 120 - 2(30) = 60$$

$$S = xy = (30)(60) = 1800 \text{ m}^2$$



۱۸ : یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

حل : با توجه به شکل داریم :

$$P = 4 \rightarrow 3x + 2y = 4 \rightarrow y = 2 - \frac{3}{2}x$$

از آنجا که مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ است (چرا؟)، پس می توان نوشت:

$$S = x \cdot y + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

حال اگر به جای y معادل آن را بر حسب x قرار دهیم. داریم :

$$S = x \cdot \left(2 - \frac{3}{2}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3} - 6}{4}x^2 + 2x$$

این تابع ، یک تابع درجه ی ۲ (سهمی) است و دارای ماکزیمم است (چرا؟). لذا داریم.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \left(\frac{\sqrt{3} - 6}{4} \right)} = \frac{2}{6 - \sqrt{3}} = \frac{2}{4 - \sqrt{3}} = 0.94 \text{ m}$$

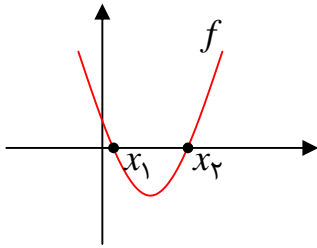
$$y_{\max} = 2 - \frac{3}{2}x = 2 - \frac{3}{2}(0.94) = 0.59 \text{ m}$$

توجه : پنجره ی موضوع این تمرین، زمانی بیشترین نوردهی دارد که بزرگترین مساحت را داشته باشد.

قسمت نهم : صفرهای تابع درجه ۲ (سهمی)

همانطور که می دانیم ، نمودار هر تابع درجه ی ۲ ، یک سهمی است و

دارای معادله ای به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.



$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$

بنابراین ممکن است محور طول ها را در یک یا دو نقطه قطع کند و یا

اینکه محور طولها را هیچ قطع نکند. طول نقطه ی تقاطع نمودار سهمی

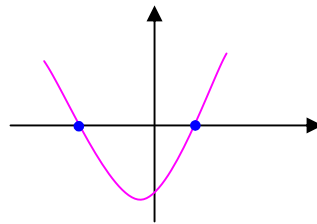
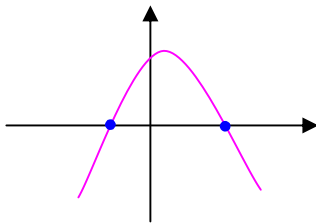
با محور طول ها را صفر تابع می نامند. بدیهی است که در این نقطه

مقدار تابع (عرض نقطه) برابر صفر است. بنا بر این ، صفر تابع f همان ریشه ی معادله ی $f(x) = 0$ است.

نتیجه : بر اساس مفهوم فوق می توان نتیجه گرفت که :

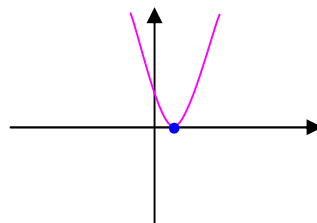
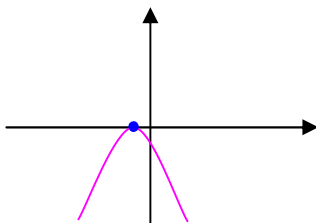
الف : نمودار سهمی محور طولها را در دو نقطه قطع می کند. بنابراین معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ دارای

دو ریشه ی متمایز است.



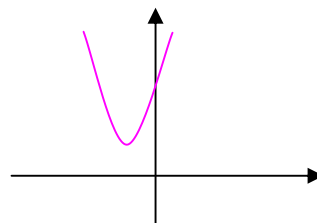
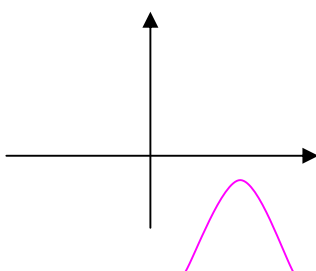
ب : نمودار سهمی بر محور طولها مماس است. بنابراین معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ دارای ریشه ی

مضاعف است.



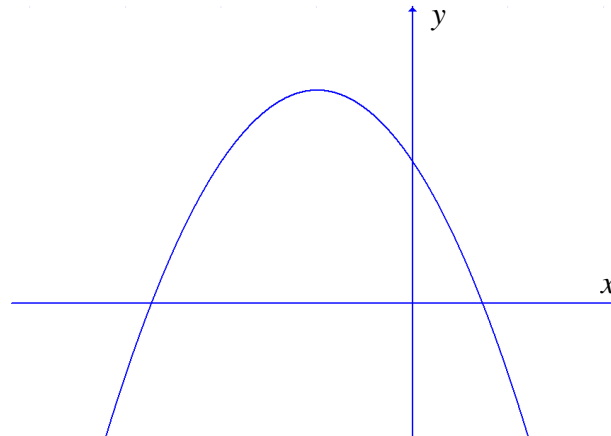
ج : نمودار سهمی محور طولها را قطع نمی کند. بنابراین معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ دارای ریشه ی

حقیقی نیست.



حل چند تمرین :

۱۹: نمودار زیر ، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ می باشد. تعداد ریشه های معادله $f(x) = 0$ و علامت a و b و c را تعیین کنید.



حل : نمودار محور طول ها را در دو نقطه ی مجزا قطع کرده است. لذا معادله $f(x) = 0$ دارای دو ریشه ی متمایز است.

نمودار سهمی رو به پایین است، لذا $a < 0$

دو ریشه مختلف علامه اند و قدر مطلق ریشه ی منفی از ریشه ی مثبت بیشتر است. لذا مجموع ریشه ها منفی است. پس :

$$S < 0 \rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \rightarrow \frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0$$

چون دو ریشه مختلف علامه اند. لذا حاصل ضرب آنها منفی است. پس :

$$P < 0 \rightarrow \frac{c}{a} < 0 \xrightarrow{a < 0} c > 0$$

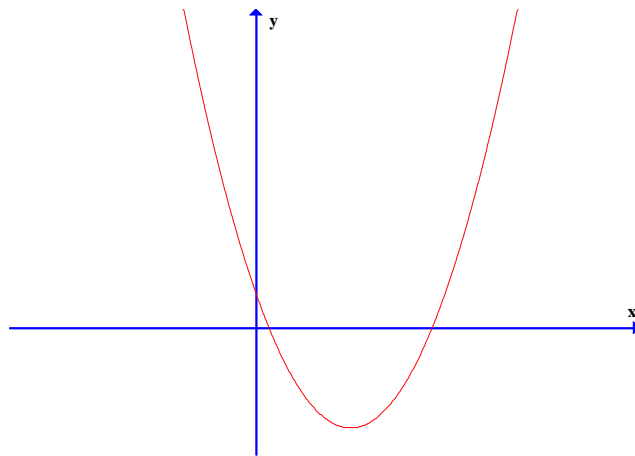
توجه :

الف : به روش دیگری می توان علامت b را نیز تعیین کرد. در این روش طول رأس سهمی را در نظر می گیریم. مثلاً در این تمرین با توجه به نمودار معلوم است که طول رأس سهمی منفی است. لذا :

$$\frac{-b}{2a} < 0 \rightarrow \frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0$$

ب : به روش دیگری نیز می توان علامت c را تعیین کرد. با توجه به اینکه تابع محور y ها را در نقطه $(0, c)$ قطع می کند، لذا می توان با توجه به نقطه ی تقاطع نمودار با محور y ها ، علامت c را تعیین کرد. در تمرین فوق، از روی نمودار واضح است که محل تقاطع نمودار با محور عرض ها (مقدار c) بالای محور x ها است. پس $c > 0$

۲♦ : نمودار زیر، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ می باشد. تعداد ریشه های معادله ی $f(x) = 0$ و علامت a و b و c را تعیین کنید.



حل : نمودار محور طول ها را در دو نقطه ی مجزا قطع کرده است. لذا معادله ی $f(x) = 0$ دارای دو ریشه ی متمایز است.

نمودار سهمی رو به بالا است، لذا $a > 0$

دو ریشه هم علامت و مثبت می باشند. لذا مجموع آنها مثبت است. پس

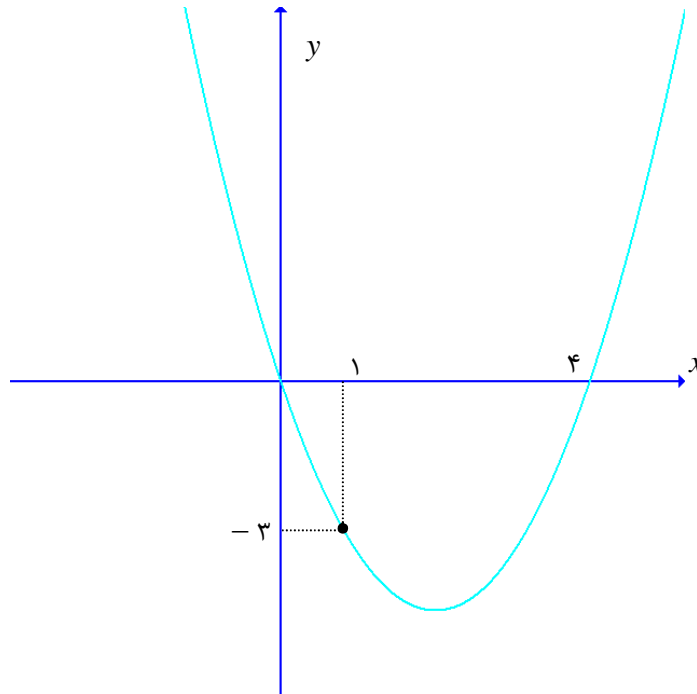
$$S > 0 \rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow \frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b < 0$$

چون دو ریشه مثبت هستند، لذا حاصل ضرب آنها نیز مثبت است. پس

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \xrightarrow{a > 0} c > 0$$

۲۱: در شکل زیر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است.

الف : مقدار a و b و c را بدست آورید. ب : جدول علامت $f(x)$ را تشکیل دهید.



حل : سه نقطه از نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ معلوم است. لذا داریم.

$$A \left| \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \frac{f(x)=ax^2+bx+c}{\cdot} \rightarrow \cdot = a(\cdot)^2 + b(\cdot) + c \rightarrow c = \cdot$$

$$B \left| \begin{array}{l} \cdot \\ -3 \end{array} \right. \frac{f(x)=ax^2+bx+c}{-3} \rightarrow -3 = a(1)^2 + b(1) + c \rightarrow a + b + c = -3$$

$$\xrightarrow{c=\cdot} a + b = -3$$

$$C \left| \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \end{array} \right. \frac{f(x)=ax^2+bx+c}{\cdot} \rightarrow \cdot = a(4)^2 + b(4) + c \rightarrow 16a + 4b + c = \cdot$$

$$\xrightarrow{c=\cdot} 16a + 4b = \cdot \xrightarrow{\div 4} 4a + b = \cdot$$

حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

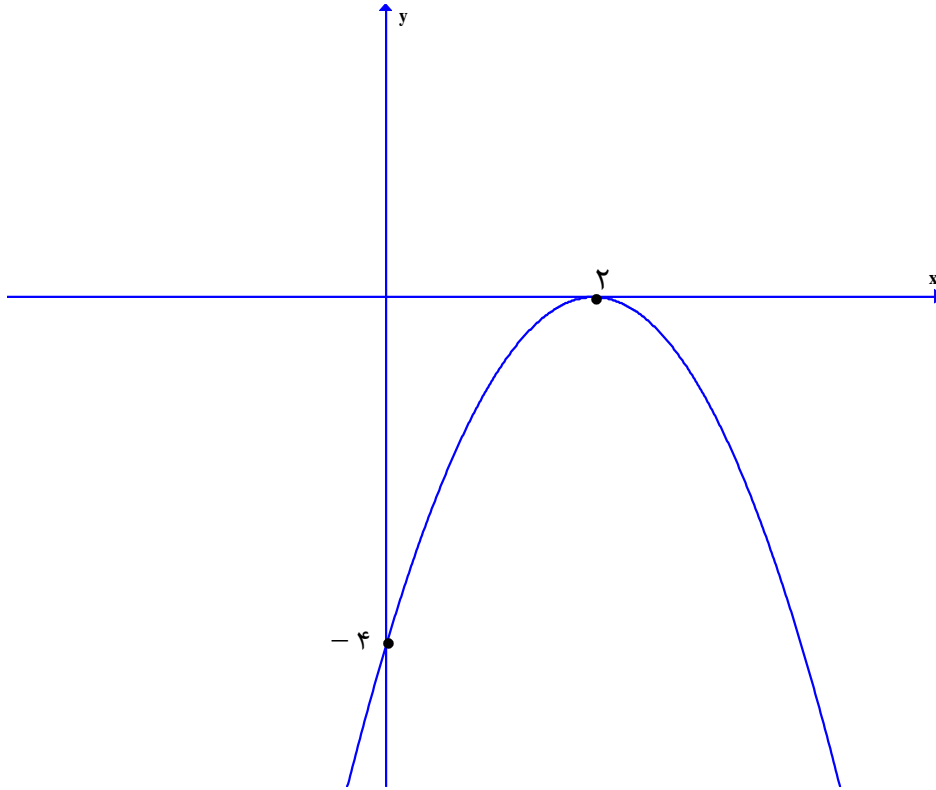
$$\begin{cases} a + b = -3 \\ 4a + b = \cdot \end{cases} \rightarrow a = 1, b = -4$$

در نهایت جدول تعیین علامت را با توجه به نمودار داده شده ، به صورت زیر تشکیل می دهیم.

x	$-\infty$				4		$+\infty$
y		$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	

۲۲: در شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است.

الف: مقدار a و b و c را بدست آورید. ب: جدول علامت $f(x)$ را تشکیل دهید.



حل: دو نقطه از نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ معلوم است. لذا داریم.

$$A \begin{cases} \cdot \\ -4 \end{cases} \cdot \frac{f(x)=ax^2+bx+c}{-4} \rightarrow -4 = a(\cdot)^2 + b(\cdot) + c \rightarrow c = -4$$

$$B \begin{cases} 2 \\ \cdot \end{cases} \cdot \frac{f(x)=ax^2+bx+c}{\cdot} \rightarrow \cdot = a(2)^2 + b(2) + c \rightarrow 4a + 2b + c = \cdot$$

$$\xrightarrow{c=-4} 4a + 2b = 4 \rightarrow 2a + b = 2$$

نقطه ی B ماگزیمم تابع نیز می باشد. پس:

$$B \begin{cases} 2 \\ \cdot \end{cases} \cdot \frac{x_0 = \frac{-b}{2a}}{2} \rightarrow 2 = \frac{-b}{2a} \rightarrow 4a + b = \cdot$$

حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

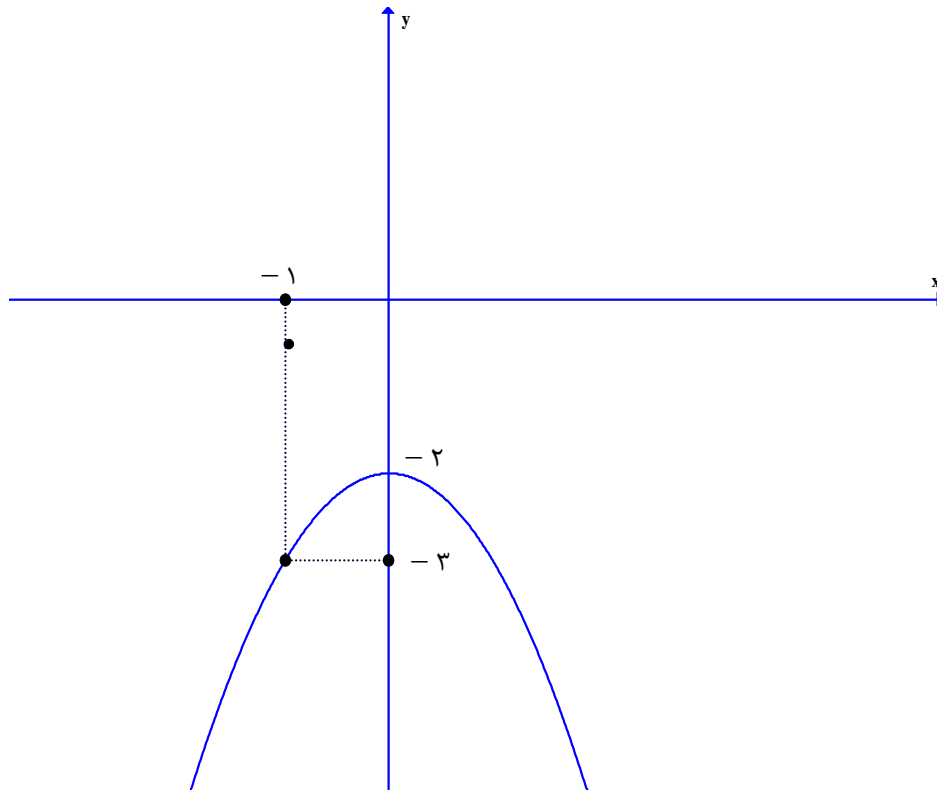
$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ 4a + b = \cdot \end{cases} \rightarrow a = -1, b = 4$$

در نهایت جدول تعیین علامت را با توجه به نمودار داده شده، به صورت زیر تشکیل می دهیم.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y		ϕ	
		-	-

۲۳: در شکل مقابل نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است.

الف: مقدار a و b و c را بدست آورید. ب: جدول علامت $f(x)$ را تشکیل دهید.



حل: دو نقطه از نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ معلوم است. لذا داریم.

$$A \begin{cases} \cdot \\ -2 \end{cases} \frac{f(x)=ax^2+bx+c}{\rightarrow -2 = a(\cdot)^2 + b(\cdot) + c \rightarrow c = -2}$$

نقطه‌ی A ماکزیمم تابع نیز می باشد. پس:

$$A \begin{cases} \cdot \\ -2 \end{cases} \frac{x_0 = \frac{-b}{2a}}{\rightarrow \cdot = \frac{-b}{2a} \rightarrow b = \cdot}$$

$$B \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases} \frac{f(x)=ax^2+bx+c}{\rightarrow -3 = a(-1)^2 + b(-1) + c \rightarrow a - b + c = -3}$$

$$\xrightarrow{c=-2} a - b = -1$$

حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ b = \cdot \end{cases} \rightarrow a = -1$$

در نهایت جدول تعیین علامت را با توجه به نمودار داده شده، به صورت زیر تشکیل می‌دهیم. (چون محور طولها را قطع نمی‌کند پس تابع ریشه ندارد.)

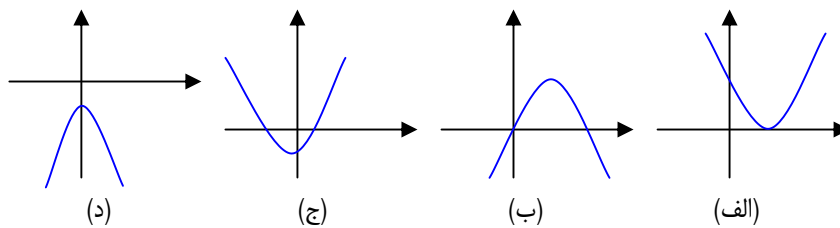
x	$-\infty$	$+\infty$
y	-	-

توجه ۱: محل تقاطع نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ با محور عرضها مقدار c را نشان می‌دهد. لذا در هر سهمی که نمودار آن از مبدأ مختصات می‌گذرد، $c = 0$ است.

توجه ۲: اگر نمودار سهمی نسبت به محور y ها متقارن باشد، محور تقارن آن یعنی خط $x = \frac{-b}{2a}$ روی محور y ها منطبق است. پس $x = 0$ می‌باشد و در نتیجه $b = 0$ است.

تمرین برای حل:

۲۴: جدول زیر را با توجه به نمودارهای داده شده کامل کنید. ($y = ax^2 + bx + c$)



د	ج	ب	الف	
				علامت Δ
				علامت a
				علامت b
				علامت c
				تعداد صفرهای تابع

۲۵: معادله‌ی مسیر حرکت یک توپ بعد از شوت آن، یک تابع درجه دو با ضابطه‌ی $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$

است. در این معادله x مسافت طی شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین است.

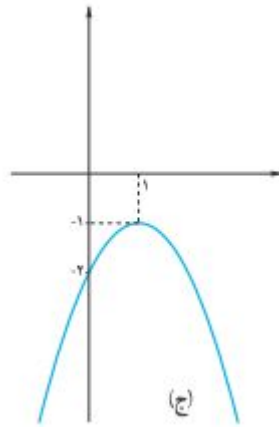
الف: حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید.

ب: تعیین کنید که حداکثر مسافت طی شده توسط این توپ چقدر است؟

ج: نمودار حرکت توپ را رسم کنید.

۲۶: معادله‌ی یک سهمی به صورت $y = a(x - 1)(x - 2)$ است، مقدار a را چنان تعیین کنید که این سهمی محور عرض ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کند.

۲۷: معادله‌ی سهمی مربوط به نمودار زیر را بنویسید.



تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

درس سوّم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی

در این درس به روش‌های حل معادلات گویا و معادلات رادیکالی می‌پردازیم. این دو نوع معادله به جهت کاربردهای بسیار زیاد آنها از اهمیت خاصی برخوردارند.

قسمت اول: معادلات گویا

هر معادله که در آن متغیر معادله در مخرج کسر باشد، را یک معادله‌ی شامل عبارت گویا یا به اختصار معادله‌ی گویا می‌نامند. مانند معادلات زیر:

$$\text{الف) } \frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2} \qquad \text{ب) } \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2-2x} = \frac{x-4}{x-2}$$

برای حل چنین معادلاتی، ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها را محاسبه کرده^۱ و در تمام کسرها ضرب می‌کنیم. سپس معادله‌ی بدست آمده را حل می‌کنیم. در نهایت جوابی از معادله را می‌پذیریم که به ازای آن مخرج هیچ کسری صفر نشود^۲.

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{x^2-2x} = \frac{x-4}{x-2}$$

حل: ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها را تعیین می‌کنیم.

$$\begin{cases} A = x \\ B = x^2 - 2x = x(x-2) \xrightarrow{\text{ک م م}} x(x-2) \\ C = x-2 \end{cases}$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{x^2-2x} = \frac{x-4}{x-2} \xrightarrow{\begin{matrix} \times x(x-2) & \times x(x-2) & \times x(x-2) \end{matrix}} \frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$$

$$\rightarrow 5(x-2) - 4 = x(x-4) \rightarrow 5x - 10 - 4 = x^2 - 4x \rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\rightarrow (x-7)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=2 \end{cases} \text{ غ ق ق غ}$$

^۱ برای این کار ابتدا مخرج‌ها را تجزیه کرده و سپس حاصل ضرب عوامل مشترک و غیر مشترک با توان بیشتر را تعیین می‌کنیم.

^۲ اگر معادله‌ی گویا به صورت تساوی دو کسر بیان شده باشد، بهتر است، از خاصیت ضرب طرفین و وسطین استفاده کنیم.

تمرین برای حل: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2}$$

$$۴) \frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{3}{x^2-2x+3}$$

$$۲) \frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$$

$$۵) \frac{n^2-2n+2}{n^2-2n} - \frac{1+n}{n} = \frac{n-1}{n-2}$$

$$۳) \frac{3}{2x} = \frac{x+2}{x^2-3x}$$

$$۶) \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x}$$

حل چند مسئله کاربردی:



۷: مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به

طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول

و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند، می توان نوشت:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

نسبت طول به عرض این مستطیل را **نسبت طلایی** می گویند.

حال اگر عرض مستطیل را برابر یک در نظر بگیریم، واضح است که مقدار x همان نسبت طلایی است. برای

محاسبه مقدار x کافی است که معادله زیر را حل کنیم.

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \rightarrow x^2 = x+1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=5} \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

واضح است که جواب منفی قابل قبول است. عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ که مقدار تقریبی آن $1/618$ است به عدد

طلایی معروف است که از دوران باستان مورد توجه بوده است.

۸: در یک مزرعه‌ی شالیکاری دو کارگر که با هم کار می‌کنند، کار نشاکاری را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اما اگر هر کدام به تنهایی کار می‌کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می‌کرد. هر کدام از این دو کارگر به تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کنند.

حل: اگر کارگر اول در x روز کار را تمام می‌کند، پس کارگر دوم همین کار را در $x + 15$ روز تمام می‌کند. لذا

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{\times 18x(x+15)}{\times 18x(x+15)} \rightarrow 18(x+15) + 18x = x(x+15) \rightarrow 18x + 270 + 18x = x^2 + 15x$$

$$\rightarrow x^2 - 21x - 270 = 0 \quad \Delta = (-21)^2 - 4(1)(-270) = 441 + 1080 = 1521 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{21 + 39}{2} = 30 \\ x_2 = \frac{21 - 39}{2} = -9 \end{array} \right.$$

بنابر ماهیت مسئله ریشه‌ی $x = -9$ قابل قبول نیست.

۹: در یک مغازه‌ی ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های شور در محلول آب نمک با غلظت ۷ درصد نگهداری می‌شوند. به علت تازه کار بودن کارگرها، ۲۰۰ کیلو گرم آب نمک ۴ درصدی ساخته شده است. چگونه می‌توان این محلول را به غلظت مورد نظر رساند.

حل: فرض می‌کنیم فضا، برای اضافه شدن آب به اندازه‌ی کافی موجود باشد و بتوانیم با اضافه کردن نمک کافی، محلول را با ۷ درصد نمک بسازیم. ابتدا محاسبه می‌کنیم که در محلول فعلی چند کیلو گرم نمک وجود دارد.

$$\frac{4}{100} \times 200 = 8 \quad \text{کیلو}$$

اگر x کیلوگرم نمک به این محلول بیفزاییم، میزان نمک آب $x + 8$ کیلوگرم می‌شود و وزن کل محلول $x + 200$ کیلوگرم می‌شود، پس برای داشتن محلول ۷ درصدی نمک باید داشته باشیم:

$$\frac{8+x}{200+x} = \frac{7}{100}$$

$$\frac{8+x}{200+x} = \frac{7}{100} \rightarrow 800 + 100x = 1400 + 7x \rightarrow 93x = 600 \rightarrow x = \frac{600}{93} \text{ کیلو گرم}$$

۱۰: خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین المللی امام خمینی (ره) متصل می کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت ۷ کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه ها طی می کند. اگر در مسیر جنوب به شمال از سرعت متوسط قطار به میزان ۱۰ کیلومتر بر ساعت کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی تر از زمان رفت خواهد شد. مدت زمان رفت و برگشت این قطار را محاسبه کنید.

حل: با توجه به صورت مسئله واضح است که زمان رفت قطار برابر $\frac{60}{v}$ و زمان برگشت آن $\frac{60}{v-10}$ است.

همچنین اختلاف زمانی رفت و برگشت نیم ساعت $\left(\frac{1}{2}\right)$ می باشد. لذا می توان نوشت:

$$\frac{60}{v-10} - \frac{60}{v} = \frac{1}{2}$$

اکنون این معادله را حل می کنیم.

$$\frac{60}{v-10} - \frac{60}{v} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2v(v-10)} 120v - 120(v-10) = v(v-10)$$

$$\rightarrow 120v - 120v + 1200 = v^2 - 10v \rightarrow v^2 - 10v - 1200 = 0$$

$$\rightarrow (v-40)(v+30) = 0 \rightarrow v = 40 \quad \text{و} \quad v = -30 \text{ (غیر قابل قبول)}$$

لذا بر اساس این مسئله معلوم می شود که زمان رفت قطار برابر $\frac{60}{40} = \frac{3}{2} = 1/5$ ساعت و زمان

$$\text{برگشت آن، برابر } \frac{60}{40-10} = \frac{60}{30} = 2 \text{ ساعت است.}$$

۱۱: دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶

امتیاز کسب کرده بود. یعنی میانگین هر آزمون او در پنج هفته اول به صورت زیر است.

$$\frac{36}{5} = 7/2$$

او از هفته ی ششم به بعد در تمام آزمون ها امتیاز ۹ را کسب کرد. به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون هایش برابر ۸ شد. حساب کنید که از هفته ی ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمره ی ۹ گرفته است؟
حل : ابتدا الگوی زیر را تشکیل می دهیم.

شماره ی آزمون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	؟
امتیاز کسب شده	۳۶					۹	۹
میانگین	۷/۲					۹		

گیریم که آرمان در بعد از هفته ی پنجم در n آزمون شرکت کرده باشد. پس تعداد کل آزمون های آرمان برابر $n + ۵$ می شود. از طرفی کل امتیاز های کسب شده توسط او برابر $۹n + ۳۶$ خواهد شد. لذا میانگین

کل امتیاز های آرمان می شود، $\frac{۹n + ۳۶}{۵ + n}$ که طبق مسئله برابر ۸ است. پس داریم.

$$\frac{۹n + ۳۶}{۵ + n} = ۸ \rightarrow ۹n + ۳۶ = ۴۰ + ۸n \rightarrow n = ۴$$

یعنی آرمان بعد از هفته ی پنجم فقط در ۴ آزمون شرکت کرده است.

۱۲ : اگر دو ماشین چمن زنی با هم کار کنند، می توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، هر یک به تنهایی در چند ساعت می توانند این کار را انجام دهند؟

حل : گیریم که ماشین سریعتر A و دیگری B باشد. اگر زمان انجام کار توسط ماشین A برابر t باشد، زمان انجام کار توسط ماشین B مساوی $۲t$ است. با توجه به صورت مسئله می توان نوشت:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\times 4t} 4 + 2 = t \rightarrow t = 6$$

$\rightarrow t = 6$ زمان مورد نیاز برای ماشین A برای کار به تنهایی

$\rightarrow 2t = 2(6) = 12$ زمان مورد نیاز برای ماشین B برای کار به تنهایی

۱۳ : علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ی ادبی ۱۶ صفحه ای را منتشر می کند. پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می کند. اگر رضا به او کمک

کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می انجامد. حساب کنید که اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش این مجله را انجام دهد، چه میزان وقت نیاز دارد؟

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{120} = \frac{1}{80} \xrightarrow{\times 240r} 240 + 2r = 3r \rightarrow r = 240 \text{ min}$$

قسمت دوم: معادلات رادیکالی

هر معادله که در آن متغیر معادله در زیر رادیکال (با فرجه‌ی دوم) باشد، را یک معادله‌ی شامل عبارت اصم یا رادیکالی می نامند. مانند معادلات زیر:

$$\text{الف) } 1 + \sqrt{x+2} = x-3 \quad \text{ب) } 2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$$

برای حل چنین معادلاتی، در یک مرحله‌ی مناسب طرفین معادله را به توان ۲ می رسانیم تا یک معادله‌ی بدون رادیکال به دست آید. سپس این معادله را حل می کنیم. در نهایت جوابی از معادله را می پذیریم که الف: به ازاء آن عبارت زیر رادیکال منفی نباشد. ب: معادله به ازای آن برقرار باشد. مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$1 + \sqrt{x+2} = x-3$$

حل:

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{x+2} = x-3 &\rightarrow \sqrt{x+2} = x-4 \rightarrow (\sqrt{x+2})^2 = (x-4)^2 \\ \rightarrow x+2 = x^2 - 8x + 16 & \\ \rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 &\rightarrow (x-7)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=2 \end{cases} \end{aligned}$$

غ ق ق

تمرین برای حل:

۱۴: هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\sqrt{5m-1} + 3 = 0$

۴) $2\sqrt{3-2x} + x = 3$

۲) $\sqrt{3x-5} = \sqrt{x-2} + 1$

۵) $\sqrt{15 + \sqrt{2x-80}} = 5$

۳) $\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$

۶) $\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$

۱۵: عددی پیدا کنید که حاصل جمع آن با جذرش برابر شود.

۱۶: بدون حل، توضیح دهید که چرا معادله‌های زیر فاقد جواب حقیقی می‌باشند.

الف) $\sqrt{t} + 2 = 0$ ب) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-3} + 1 = 0$ ج) $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$

۱۷: مقدار k را از تساوی مقابل حساب کنید.

$$v = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

۱۸: معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. مسئله چند جواب دارد.

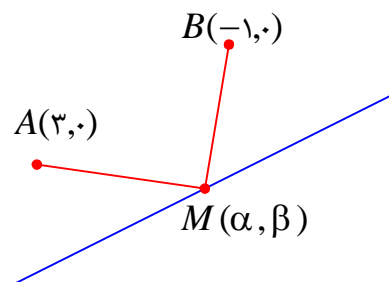
حل چند مسئله‌ی کاربردی

۱۹: نقطه‌ای روی خط $y = 2x + 1$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(3,0)$ و $B(-1,0)$ به یک فاصله باشد.

حل: فرض کنیم که $M(\alpha, \beta)$ نقطه‌ی مورد نظر باشد. چون این نقطه روی خط $y = 2x + 1$

$$\beta = 2\alpha + 1$$

از طرفی



$$MA = MB$$

$$\rightarrow \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2}$$

$$\rightarrow (3 - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2 = (-1 - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2$$

$$\rightarrow 9 - 6\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2 \rightarrow 9 - 6\alpha = 1 + 2\alpha \rightarrow \alpha = 1$$

$$\xrightarrow{\beta = 2\alpha + 1} \beta = 2(1) + 1 = 3$$

$$\therefore M(1, 3)$$

۲۰: دانش آموزان کلاس سن دبیر حسابان را از او پرسیدند. گفت: وقتی فرزندم به دنیا آمد، من ۳۰ سال داشتم و اکنون سن او جذر سن من است. حال شما سن من را حساب کنید؟

حل: اگر سن دبیر حسابان x باشد، سن فرزند او $x - 30$ خواهد بود. لذا می توان نوشت:

$$\sqrt{x} = x - 30$$

$$\rightarrow x = (x - 30)^2 \rightarrow x = x^2 - 60x + 900 \rightarrow x^2 - 61x + 900 = 0$$

$$\rightarrow (x - 36)(x - 25) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 36 \\ x = 25 \end{cases}$$

که جواب $x = 25$ قابل قبول نیست. (چرا؟)

۲۱: اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از

سطح زمین قرار خواهد داشت. اگر $t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$ ، حساب کنید که این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه

ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار می گیرد.

حل:

$$t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \xrightarrow{t=2} 2 = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \rightarrow 4 = 10 - \frac{h}{5} \rightarrow -6 = -\frac{h}{5} \rightarrow h = 30 \text{ m}$$

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان