ریاضی ۳

پایه ی دوازدهم « رشته ی علوم تجربی »

فصل۱ : تابع

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

مهر ۱۳۹۹

درس اوّل: توابع چند جمله ای ، توابع صعودی و نزولی

در این درس ابتدا با توابع چند جمله ای، بویژه تابع درجه‌ی۳ آشنا می شویم. سپس به معرفی توابع صعودی و نزولی که یکنوا نیز گفته می شوند، می پردازیم.

قسمت اوّل : توابع چند جمله ای

اگر n یک عدد صحیح نامنفی و a_0 و a_1 و a_2 و ... و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. در این صـورت تابع زیر را یک **تابع چندجمله‌ای** از درجه‌ی n می نامند.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

برای مثال توابع زیر توابع چندجمله ای هستند.

الف) تابع ثابت

$f(x) = c$ تابع چندجمله ای از درجه صفر[1]

ب) تابع خطی

$f(x) = ax + b$ تابع چندجمله ای از درجه یک

ج) تابع درجه۲(سهمی)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ تابع چندجمله ای از درجه دو

د) تابع زیر نیز یک تابع چند جمله ای از درجه ۳ است.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع چندجمله ای از درجه سه

مثال : نشان دهید که تابع زیر یک تابع چند جمله ای است. سپس درجه‌ی آن را بنویسید.

$$f(x) = x^2(1-x)^3$$

حل :

$$f(x) = x^2(1-x)^3 = x^2(1 - 3x + 3x^2 - x^3) = x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5$$

این تابع چندجمله ای از درجه‌ی ۵ است.

1 . برای تابع $f(x) = 0$ درجه تعریف نمی شود.

توجه :

۱ : طبق تعریفِ توابع چندجمله ای، توابع کسری، رادیکالی، مثلثاتی، نمایی و لگاریتمی، چندجمله ای محسوب نمی شوند.

۲ : دامنه‌ی هر تابع چندجمله ای مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.(مگر اینکه دامنه را محدود کرده باشیم.)

تمرین ۱ : تعیین کنید که کدام یک از توابع زیر چندجمله ای است. درجه‌ی توابع چندجمله ای را نیز مشخص کنید.

الف) $f(x)=(x-1)^2+3$

ب) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2+5x-1}$

پ) $f(x)=\sqrt{x^2+5x+1}$

ت) $f(x)=|x-2|$

ث) $f(x)=x(2+x)(2-x)+1$

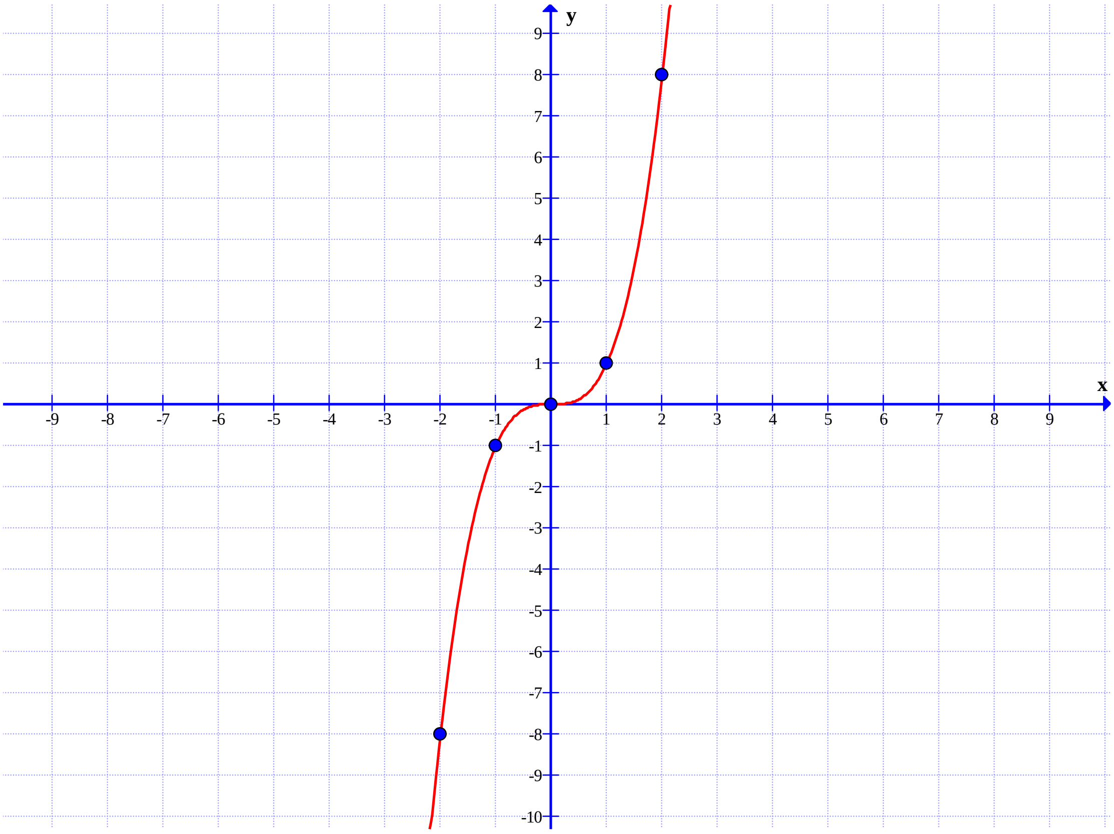
ج) $f(x)=\sin x$

توجه داشته باشید که از ساده ترین تابع چندجمله ای درجه‌ی۳ به صورت زیر است.

$$f(x)=x^3$$

این تابع دارای نموداری به شکل زیر است. این نمودار را به سادگی و با نقطه یابی می توان رسم نمود.

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8



تمرین۲ : نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$f(x)=x \quad \text{و} \quad g(x)=x^{۲} \quad \text{و} \quad h(x)=x^{۳}$$

تمرین۳ : به کمک رسم نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ و با استفاده از تبدیلات، نمودار هر یک از توابع زیـر را رسم کنید.

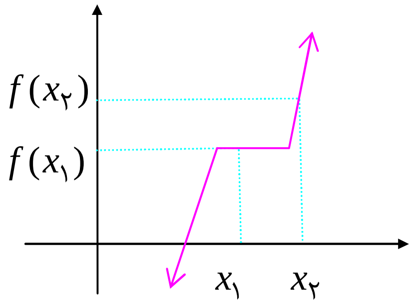
الف) $g(x)=(x+۱)^{۳}$ ب) $h(x)=-x^{۳}+۱$ ج) $k(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x$

***

قسمت دوّم : توابع یکنوا

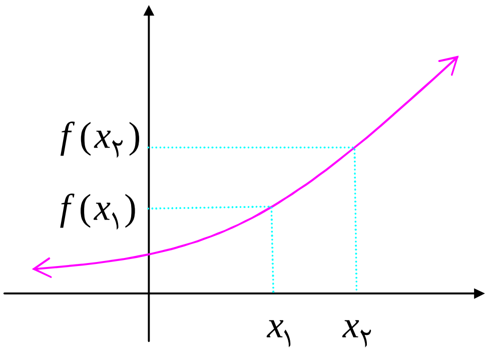
تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش صعودی گویند، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2\in D_f\,; x_1<x_2\to f(x_1)\le f(x_2)$$



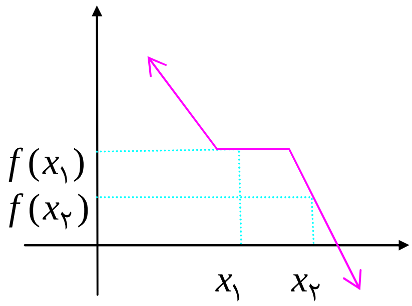
تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش صعودی اکید (اکیداً صعودی) گویند، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2\in D_f\,; x_1<x_2\to f(x_1)< f(x_2)$$



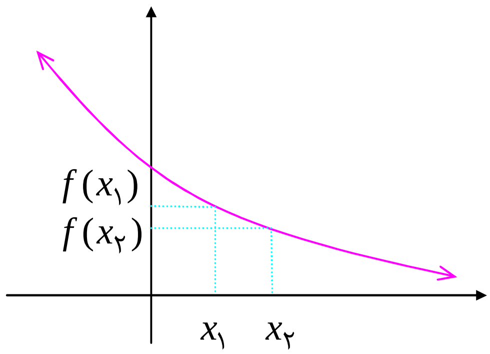
تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش نزولی گویند، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2\in D_f\,; x_1<x_2\to f(x_1)\ge f(x_2)$$



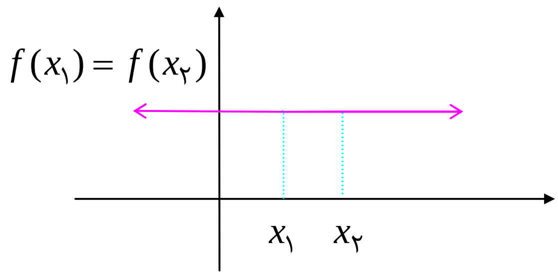
تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش نزولی اکید (اکیداً نزولی) گویند، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2\in D_f\,;x_1<x_2\to f(x_1)>f(x_2)$$



تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش ثابت گویند، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2\in D_f\,;x_1<x_2\to f(x_1)=f(x_2)$$



توجه :

۱ : هر تابع صعودی اکید یا نزولی اکید را تابع اکیداً یکنوا می نامند.

۲ : اگر تابعی صعودی یا نزولی باشد، را یکنوا می نامند.

۳ : طبق تعریف تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است یعنی یکنوا است ولی اکیداّ یکنوا نیست.

۴ : برای تعیین صعودی یا نزولی یا ثابت بودن تابع به کمک نمودار آن، نمودار را از چپ به راست نگاه کنید.

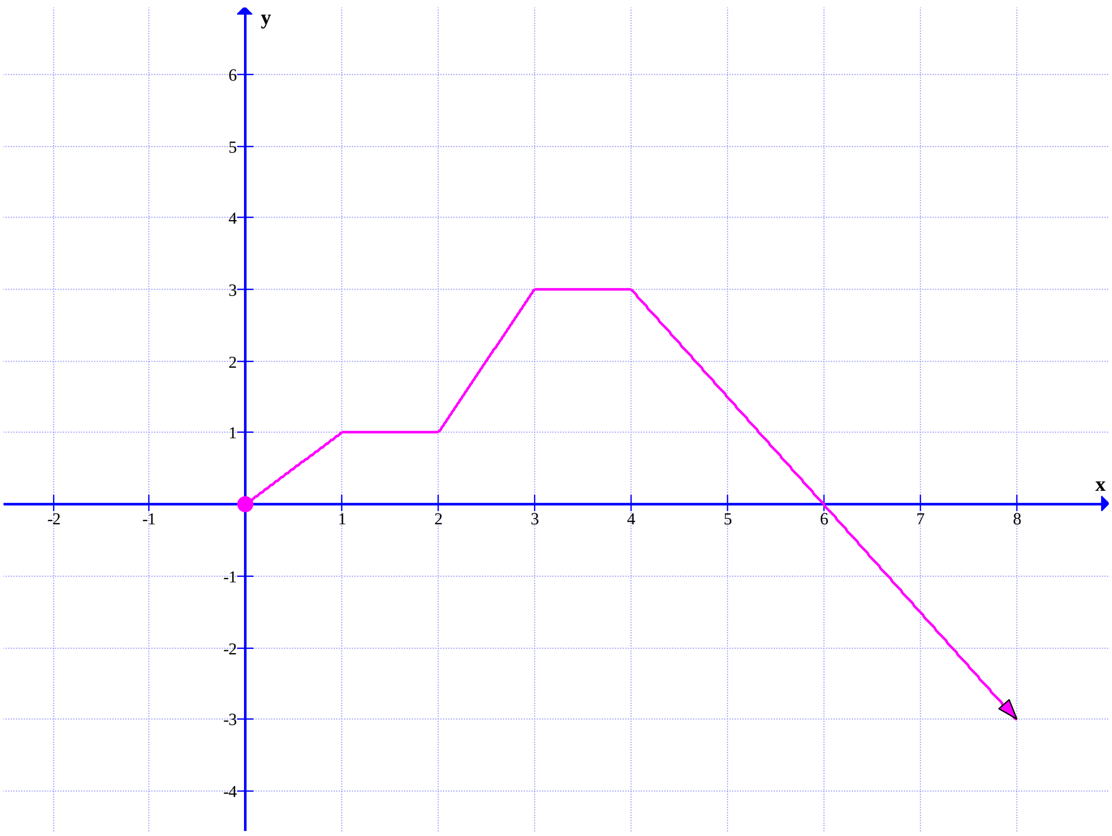
۵ : به طور مشابه، صعودی یا نزولی بودن تابع را می توان در یک فاصله مانند $I\subseteq D_f$ تعریف نمود.

تمرین۴ : نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید و سپس به پرسش های زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه و برد تابع را بنویسید.

ب : نزولی یا صعودی بودن تابع در فاصله های زیر را بنویسید.

۵)[۳,۴]	۳)[۱,۴]	۱)[۰,۱]
۶)[۴,+∞)	۴)[۳,۶]	۲) [۱,۲]



تمرین ۵ : صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)=[x-۱]$ را در دامنه اش به کمک تعریف بررسی کنید.

حل:

$f(x)=[x]-۱$

$x_۱ < x_۲ \to [x_۱]\leq[x_۲]\to[x_۱]-۱\leq[x_۲]-۱\to f(x_۱)\leq f(x_۲)\Rightarrow$ تابع صعودی است.

تمرین۶ : صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را در دامنه‌ی آنها بررسی کنید.

الف) $y=۲^{x+۱}$ ب) $y=-۳x+۲$

حل:

الف)

$x_۱ < x_۲ \to x_۱+۱ < x_۲+۱ \to ۲^{x_۱+۱} < ۲^{x_۲+۱} \to f(x_۱) < f(x_۲) \Rightarrow$

تابع صعودی اکید است.

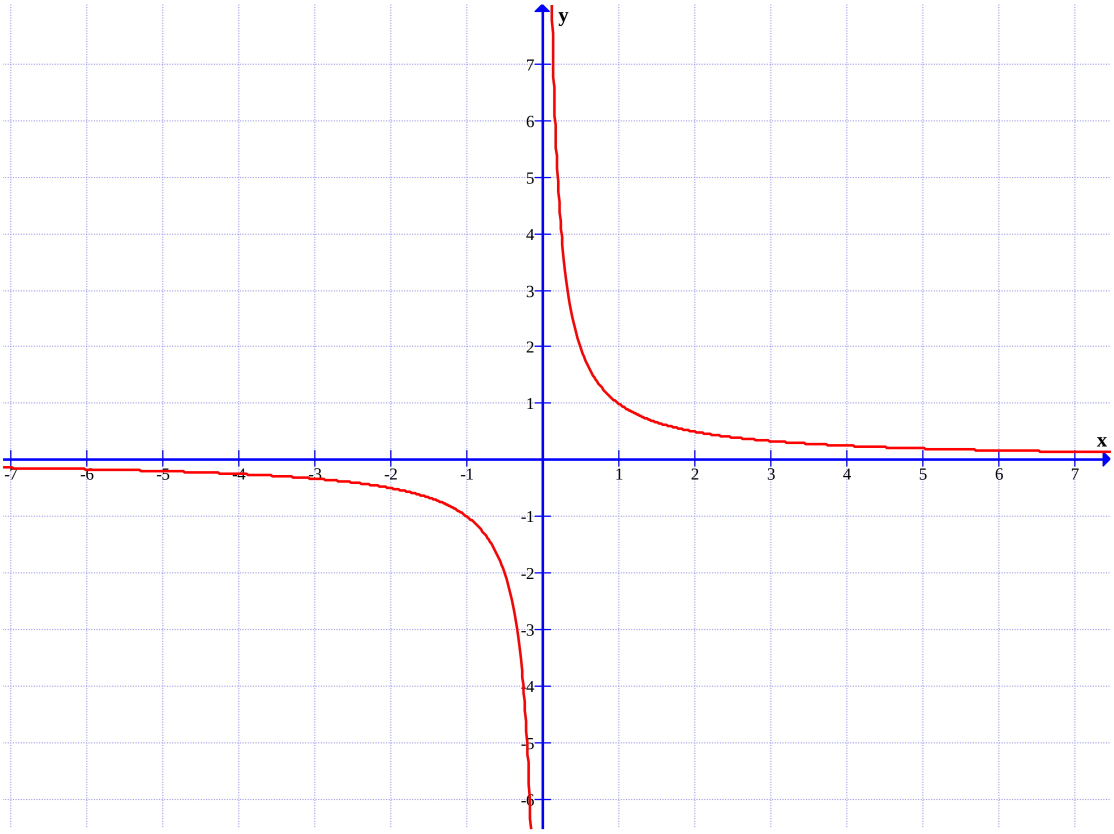
ب)

$x_۱ < x_۲ \to -۳x_۱ > -۳x_۲ \to -۳x_۱+۲ > -۳x_۲+۲ \to f(x_۱) > f(x_۲) \Rightarrow$

تابع نزولی اکید است.

توجه : اگر تابعی در یک فاصله شامل نقاط خارج از دامنه باشد، یکنوایی آن(صعودی و نزولی بودن) آن بررسی نمی شود.

مثال : تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در نظر بگیرید. واضح است که دامنه‌ی این تابع $R-\{۰\}$ است. همچنین این تابع نموداری به شکل زیر دارد.



بنابراین:

الف : تابع در فاصله‌ی $(-\infty,۰)$ نزولی اکید است.

ب : تابع در فاصله‌ی $(۰,+\infty)$ نزولی اکید است.

ج : تابع در فاصله‌ی $[-۱,۱]-\{۰\}$ ، نه صعودی و نه نزولی است.

د : صعودی و نزولی بودن تابع در یک فاصله شامل صفر، مثلاً $[-۱,۱]$ بررسی نمی شود.

تمرین۷ : ثابت کنید تابعی که در دامنه اش صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، تابعی یک به یک است.

مثال : تابع $y=۲^{x+۱}$ صعودی اکید و تابع $y=-۳x+۲$ نزولی اکید است لذا یک به یک هستند.

تذکر : طبق تعریف توابع یکنوا ، برای حالتی که تابع به صورت زوج مرتب یک نمودار آن به صورت نقاط غیر متصل، نمایش داده شده باشد. نیز قابل بررسی است.

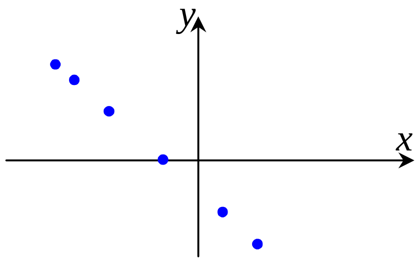
برای مثال :

تابع $f=\{(۱,۵),(۲,۶),(۷,۹)\}$ یک تابع صعودی اکید است.

تابع $g=\{(۱,۵),(۲,۶),(۷,۶)\}$ یک تابع صعودی است.

تابع $h=\{(۱,۵),(۲,۶),(۴,۰)\}$ نه صعودی و نه نزولی است.

تابع زیر یک نیز یک تابع نزولی اکید است.



***

تمرین برای حل :

۸ : نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید که این توابع در چه فاصله ای صعودی ، در چه فاصله ای نزولی و در چه فاصله ای ثابت است؟

الف) $f_۱(x)=|x+۲|-۳$

ب) $f_۲(x)=-x^۲-۶x+۱۰$

ج) $f_۳(x)=\sqrt{۱-x}$

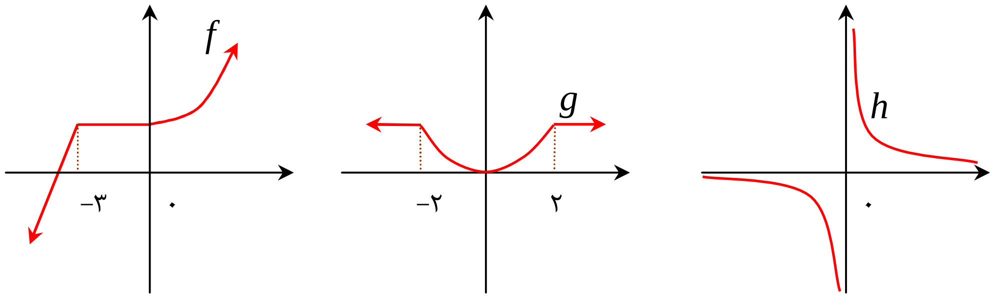
د) $f_۴(x)=|۱+x|+|۱-x|$

۹ : نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. سپس تعیین کنید این تابع در چه فاصله ای صعودی و در چه فاصله ای نزولی است و در چه فاصله ای ثابت است؟

الف) $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq -۱ \\ ۲ & x<-۱ \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} x^۲ & x<-۲ \\ ۴ & -۲\leq x\leq ۱ \\ -x^۲-۲ & x>۱ \end{cases}$

۱۰ : نمودار توابع f و g و h در زیر رسم شده اند.



الف) تابع f در چه فاصله هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله هایی نزولی است؟

ج) تابع h در چه فاصله هایی اکیداً نزولی است؟

۱۱ : نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. تعیین کنید که کدام یک از آنها در تمام دامنه‌ی خود، اکیداً یکنوا است؟

الف) $f(x)=\sqrt{۲-x}$ ب) $g(x)=۲^{-x}$ ج) $h(x)=\log_{۲}^{x}$

۱۲ : تابع $f(x)=(x-۲)^{۳}+۱$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y=x^{۳}$ رسم کنید.

ب) نشان دهید که f وارون پذیر است و نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.

ج) ضابطه‌ی $f^{-۱}$ را به دست آورید.

۱۳ : در هر مورد تابعی را بنویسید که شرایط داده شده را دارا باشد و سپس نموداری برای آن رسم کنید.

الف : تابعی که در یک فاصله، هم صعودی و نزولی باشد.

ب : تابعی که در یک فاصله، نه صعودی و نه نزولی باشد.

۱۴ :

الف : اگر تابع f در یک فاصله اکیداّ صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟

ب : اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید.

۱۵: اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای $f-g$ می توان گفت؟

۱۶ : تابع $f=\{(۱,۲),(۲,m-۱),(۳,۷-m)\}$ صعودی اکید است، حدود m را بیابید.

۱۷ : مقادیر m و n را چنان بیابید که تابع $f(x)=(x-۱)^۲+mx^۲-nx+۳$ هم صعودی و هم نزولی باشد.

۱۸ : تابعی مثال بزنید که در دامنه‌ی خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه‌ی خود اکیداً نزولی باشد.

۱۹ : نمودار تابعی را رسم که در هر یک از فاصله های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیدّاً صعودی باشد و در R اکیداً صعودی نباشد.

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

درس دوّم : ترکیب توابع

درسال گذشته با توابع و اعمال روی آنها آشنا شده اید. اکنون می خواهیم ترکیب دو تابع را معرفی کنیم.

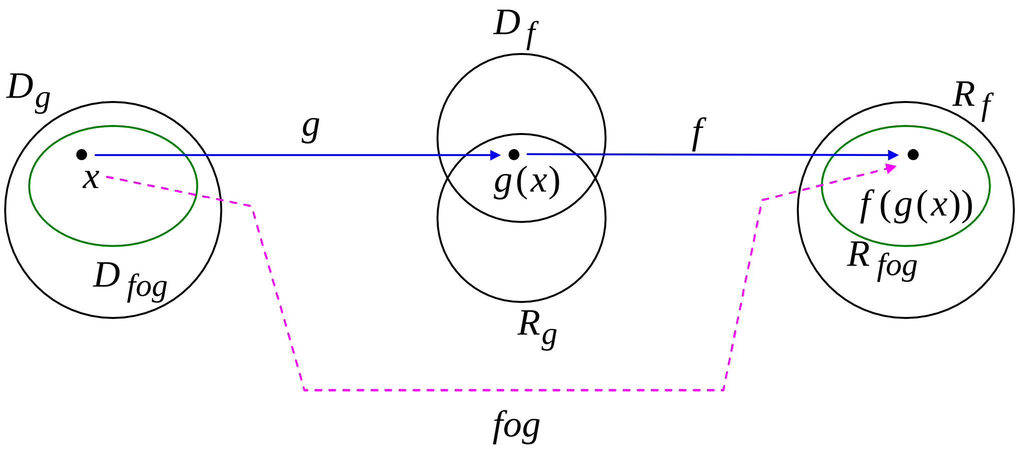
ترکیب دو تابع یکی از مهمترین عمل روی دو یا چند تابع می باشد.

ترکیب توابع

هرگاه g و f دو تابع باشند، ترکیب تابع g در f که به صورت fog نمایش داده می شود را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

به نمودار زیر توجه کنید.



دامنه‌ی تابع مرکب fog با توجه به نمودار فوق به شکل زیر مشخص می شود.

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

مثال : اگر $f(x) = x^۲ + ۳x - ۱$ و $g(x) = ۲x + ۵$. در این صورت تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $(fog)(x) =$ ب) $(gof)(x) =$

حل : کافی است ، تعریف تابع مرکب را به دقت بکار ببریم.

الف) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(۲x+۵) = (۲x+۵)^۲ + ۳(۲x+۵) - ۱$

$= ۴x^۲ + ۲۰x + ۲۵ + ۶x + ۱۵ - ۱ = ۴x^۲ + ۲۶x + ۳۹$

ب) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^۲ + ۳x - ۱) = ۲(x^۲ + ۳x - ۱) + ۵$

$= ۲x^۲ + ۶x - ۲ + ۵ = ۲x^۲ + ۶x + ۳$

نتیجه : با توجه به مثال فوق، مشخص می شود که ترکیب دو تابع در حالت کلی ، خاصیت جابجایی ندارد.

یعنی :

$$(fog)(x) \neq (gof)(x)$$

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x+۵$. ابتدا دامنه و سپس ضابطه‌ی تابع fog را بدست آورید.

حل : ابتدا دامنه های توابع g و f را تعیین می کنیم.

تابع f یک تابع اصم است.

$$x-۱\geq ۰ \rightarrow x\geq ۱ \rightarrow D_f=[۱,+\infty)$$

همچنین تابع g چند جمله‌ای است پس $D_g=R$

لذا با توجه به تعریف دامنه‌ی تابع fog می توان نوشت:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R \mid (۲x+۵)\geq ۱\}$$

$$=\{x\in R \mid ۲x\geq -۴\}=\{x\in R \mid x\geq -۲\}$$

اکنون تابع fog را نیز به صورت زیر تعیین می کنیم.

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(۲x+۵)=\sqrt{(۲x+۵)-۱}=\sqrt{۲x+۴}$$

مثال: اگر $g(x)=۲x^۲-x+۱$ و $f(x)=x+۳$. مقدار m را طوری تعیین کنید که

$$(fog)(m)=(gof)(m)$$

حل:

$$(fog)(m)=f(g(m))=f(۲m^۲-m+۱)=۲m^۲-m+۴$$

$$(gof)(m)=g(f(m))=g(m+۳)=۲(m+۳)^۲-(m+۳)+۱=۲m^۲+۱۱m+۱۶$$

$$\Rightarrow ۲m^۲-m+۴=۲m^۲+۱۱m+۱۶ \rightarrow m=-۱$$

مثال : اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۷),(۴,۶),(۰,۹)\}$ و $g=\{(-۱,۵),(۸,۱),(۲,۴),(۰,۰)\}$ ، ابتدا دامنه‌ی تابع fog را تعیین نموده و سپس این تابع را به صورت زوج مرتب بنویسید.

حل : با توجه به تعریف دامنه‌ی تابع fog جدول زیر را تشکیل می دهیم.

$$D_f=\{۱,۳,۴,۰\} \text{ و } D_g=\{-۱,۸,۲,۰\}$$

$x \in D_g$	$g(x)$
-۱	$۵ \notin D_f$
۸	$۱ \in D_f$
۲	$۴ \in D_f$
۰	$۰ \in D_f$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{۸,۲,۰\}$$

اکنون برای تعیین fog به شکل زیر عمل می کنیم.

$$(fog)(۸) = f(g(۸)) = f(۱) = ۲ \qquad (fog)(۲) = f(g(۲)) = f(۴) = ۶$$

$$(fog)(۰) = f(g(۰)) = f(۰) = ۹$$

$$\Rightarrow fog = \{(۸,۲),(۲,۶),(۰,۹)\}$$

تمرین برای حل :

۱ : اگر $f = \{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g = \{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$، توابع fog و gof را به دست آورید.

۲ : با توجه به نمودار مقابل، هرکدام از عبارت های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(۲)$

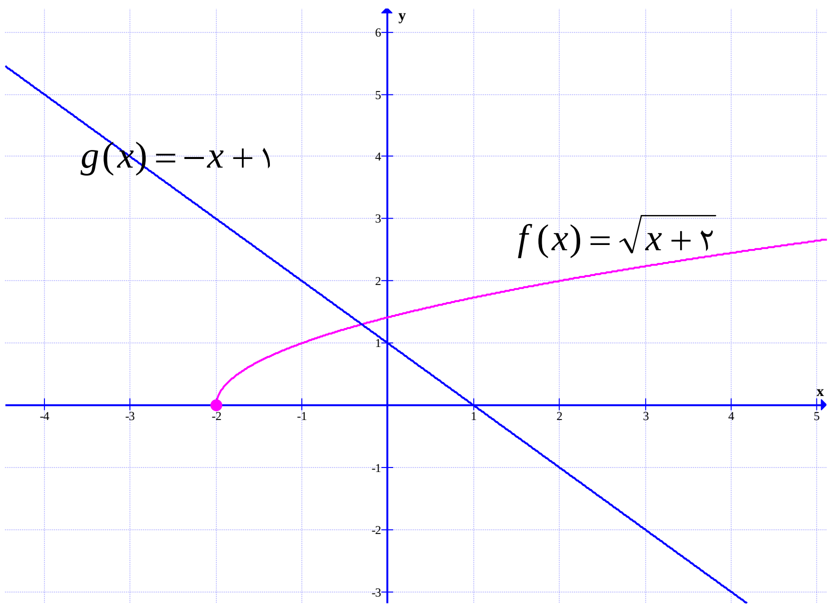
ب) $(f+g)(-۳)$

پ) $(f \times g)(\frac{۱}{۲})$

ت) $(fog)(-۴)$

ث) $(\frac{f}{g})(۰)$

ج) $(gof)(-۱)$



۳ : توابع $g(x) = ۲x - ۳$ و $f(x) = \sqrt{x+۱}$ داده شده اند. مطلوب است تعیین:

الف) $(gof)(x)$

ب) D_{fog}

۴ : اگر $g(x)=x^{۲}-۴x$ و $f(x)=۲x-۱$ باشد. توابع $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$ را تعیین کنید.

۵ : اگر $g(x)=\sqrt{x}$ و $f(x)=۲x+۳$ باشد. مطلوبست محاسبه‌ی

الف) $(fog)(۴)$ ب) $(fof)(x)$

۶ : اگر $f(x)=\sqrt{۱-x}$ و $g(x)=x^{۲}$

ابتدا دامنه‌ی تابع fog را تعیین نموده و سپس معادله‌ی آنرا بدست آورید.

۷ : توابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ و $g(x)=-۲x+۱$ داده شده اند.

الف : دامنه‌ی توابع f و g را به دست آورید. ب : ضابطه و دامنه‌ی تابع fog را تعیین کنید.

ج : مقدار عددی $(۲f+g)(۱)$ را محاسبه کنید.

۸ : اگر $f(x)=\sqrt{x-۳}$ و $g=\{(۰,۴),(۳,۲),(۵,۶),(۷,۰)\}$

الف) تابع fog را به صورت زوج های مرتب بنویسید. ب) دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

۹ : اگر $f=\{(۱,-۱),(۲,۵),(۴,۰)\}$ و $g=\{(۱,۱),(۲,۴),(۰,۶)\}$

الف) دامنه‌ی تابع fog را بدست آورید. ب) تابع fog را مشخص کنید.

۱۰ : اگر $g(x)=x^{۲}-۴x$ و $f(x)=۲x-۱$ باشد. توابع $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$ را تعیین کنید.

۱۱ : درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف : اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$ آنگاه $(fog)(۴)=۳۵$

ب : اگر $f(x)=x+۴$ و $g(x)=۳x$ آنگاه $(\frac{f}{g})(۲)=۱$

پ : اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$ آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$

ت : اگر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=\sqrt{x+۷}$ ،آنگاه $(gof)(۵)=۱۵$

ث : اگر $f(x)=x^{۲}-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}$ آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$

ج : برای هر دو تابع g و f داریم $fog=gof$

۱۲ : در هر قسمت ، موارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x)=x^{۲}-۵$ و $g(x)=\sqrt{x+۶}$: D_{fog} و $(fog)(x)$

ب) $f(x)=\sqrt{۳-۲x}$ و $g(x)=\dfrac{۶}{۳x-۵}$: D_{fog} و $(fog)(x)$

پ) $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۱۶}$: D_{gof} و $(gof)(x)$

ت) $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{x}$: D_{gof} و $(gof)(x)$

ث) $f(x)=۳x$ و $g(x)=\sqrt{x+۶}$: $(fog)(۱۰)$

۱۳ : با توجه به ضابطه های توابع داده شده، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و سپس ریشه های آنها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=۲x-۵$ و $g(x)=x^{۲}-۳x+۸$: $(fog)(x)=۷$

ب) $f(x)=۳x^{۲}+x-۱$ و $g(x)=۱-۲x$: $(fog)(x)=-۵$

۱۴ : اگر $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=۳x+k$ باشد. مقدار k را طوری بیابید که

$$(fog)(x)=(gof)(x)$$

۱۵ : اگر $(fog)(x)=۳x^{۲}-۶x+۱۴$ و $f(x)=۳x-۴$ ، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۱۸۶: در هر مورد دو تابع h و g را طوری بنویسید که $f(x)=(goh)(x)$ باشد.

الف) $f(x)=۳\sqrt{\dfrac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}}$ ب) $f(x)=\dfrac{۱}{x}.\sin(\dfrac{x+۱}{x})$ ج) $f(x)=x^{۶}+x^{۳}$

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی: @amerimath

سایت : www.mathtower.ir

درس سوّم : وارون تابع

در این درس ابتدا مفهوم تابع یک به یک را یادآوری کرده و سپس با وارون تابع آشنا می شویم.

قسمت اوّل : تابع یک به یک

هر تابع که در زوج های مرتب متفاوت خود، مولفه های دوّم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می نامند.

برای مثال:

تابع $f=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(-۱,۹)\}$ یک به یک است.

تابع $g=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(-۱,۵)\}$ یک به یک نیست.

تابع $h=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(۱,۵)\}$ یک به یک است.

برای تعیین یک به یک بودن تابع وقتی که معادله‌ی آن معلوم باشد، می توان از الگوی زیر استفاده کرد.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow x_۱=x_۲$$

مثال : یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=۳x-۵$ ب) $g(x)=۴-x^۲$

حل : کافی است الگوی فوق را بکار ببریم.

الف) $f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow ۳x_۱-۵=۳x_۲-۵\rightarrow ۳x_۱=۳x_۲\rightarrow x_۱=x_۲$

لذا این تابع یک به یک است.

ب) $g(x_۱)=g(x_۲)\rightarrow ۴-(x_۱)^۲=۴-(x_۲)^۲\rightarrow (x_۱)^۲=(x_۲)^۲\not\rightarrow x_۱=x_۲$

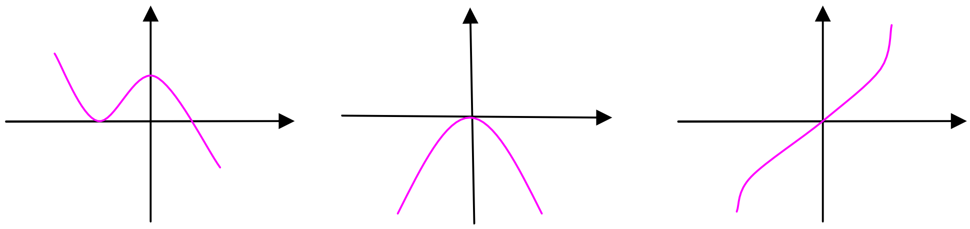
لذا این تابع یک به یک نیست.

توجه کنید در برخی از تساوی ها از قبیل موارد زیر نمی توان نتیجه گرفت که $a=b$

$$[a]=[b]\not\rightarrow a=b \quad و \quad |a|=|b|\not\rightarrow a=b \quad و \quad a^۲=b^۲\not\rightarrow a=b$$

برای تشخیص یک به یک بودن تابع وقتی که نمودار آن معلوم باشد، می توان از تعریف تابع یک به یک استفاده نمود. در واقع یک تابع یک به یک است هرگاه هر خط موازی محور طول ها (xها) ، نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (آزمون خط افقی)

مثال : یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.



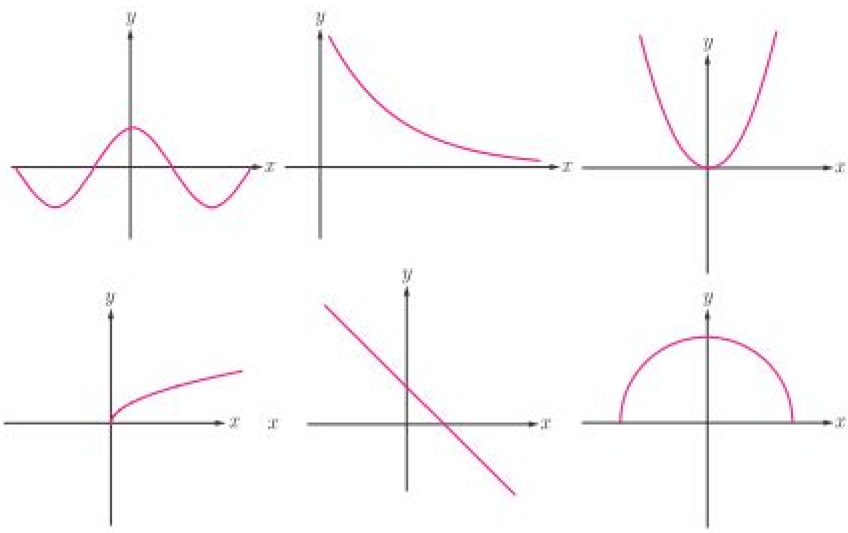
(الف)   (ب)   (ج)

حل: بنابر آزمون خط افقی معلوم می شود که توابع (الف) و (ب) یک به یک نیستند، ولی تابع (ج) یک به یک است.

تمرین برای حل:

۱ : اگر تابع $f=\{(-2,2),(m,3),(-1,3),(2m,a)\}$ یک به یک باشد، مقدار a را پیدا کنید.

۲ : کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند.



۳ : ثابت کنید که هر تابع خطی غیر ثابت یک به یک است.

۴ : نشان دهید که تابع $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ یک به یک است.

۵ : با ذکر دلیل تعیین کنید که کدام یک از تابع های زیر یک به یک است.

الف) $f(x)=2[x]+1$ ب) $g(x)=2x^3-5$

۶ : آیا هر تابع درجه‌ی ۲ (سهمی) ، یک به یک است؟ چرا؟

***

قسمت دوّم : تابع وارون (معکوس تابع)

اگر مؤلفه های اوّل و دوّم تمام زوج های مرتب تابعی را جابجا کنیم، دو حالت پیش می آید.

حالت اوّل) مجموعه‌ی جدید، تابع شود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر است و تابع جدیـد را را تابع معکوس می نامند. مانند :

$f=\{(۱,۷),(۳,۴),(۰,۹)\}$

$g=\{(۷,۱),(۴,۳),(۹,۰)\}$ تابع معکوس f

حالت دوّم) مجموعه‌ی جدید، تابع نشود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر نیست. مانند :

$f=\{(۱,۷),(۳,۴),(۹,۴)\}$

$g=\{(۷,۱),(۴,۳),(۴,۹)\}$

توجه داشته باشید که اگر تابع f معکوس پذیر باشد، معکوس آن را با $f^{-۱}$ نمایش می دهند.

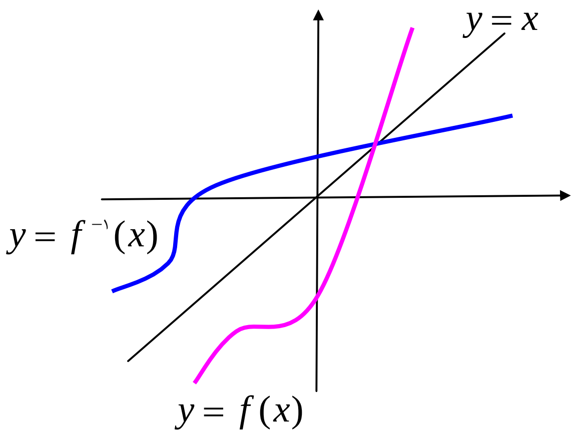
با توجه به مفهوم تابع معکوس به سهولت نتیجه می شود که:

الف) تابعی معکوس پذیر است، هرگاه یک به یک باشد.

ب) دامنه‌ی تابع $f^{-۱}$ برابر برد تابع f است. ($D_{f^{-۱}}=R_f$)

ج) برد تابع $f^{-۱}$ برابر دامنه‌ی تابع f است. ($R_{f^{-۱}}=D_f$)

د) نمودار هر تابع معکوس پذیر با نمودار معکوس آن نسبت به خط نیمساز ربع اوّل وسوّم ($y=x$) متقارن هستند.



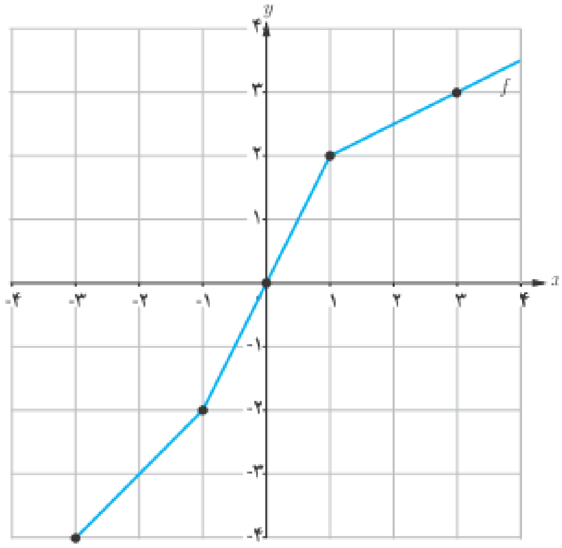
تمرین برای حل:

۷ : وارون تابع $f=\{(۲,۳),(-۲,۱),(-۱,۲)\}$ را به دست آورید.

۸ : کدام یک از توابع زیر معکوس پذیر است. معکوس آن را در صورت وجود بنویسید.

الف) $f=\{(۲,۱),(۰,۳),(۵,۷),(-۲,۶)\}$ ب) $g=\{(۲,۵),(۰,۱),(۵,۷),(-۲,۱)\}$

۹ : از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-1}(x)$	...	...	...	...

***

قسمت سوّم : تعریف معکوس تابع به کمک ترکیب دو تابع

با توجه به دیدگاه بیان شده برای معکوس تابع، می توان تعریف دقیق زیر را نیز بیان کرد.

برای هر دو تابع g و f اگر $(fog)(x)=x$ و $(gof)(x)=x$ آنگاه دو تابع g و f وارون همدیگرند.

مثال : نشان دهید که توابع $f(x)=۳x-۴$ و $g(x)=\frac{x+۴}{۳}$ وارون یکدیگرند.

حل : کافی است که نشان دهیم: $(fog)(x)=x$ و $(gof)(x)=x$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{x+۴}{۳})=۳(\frac{x+۴}{۳})-۴=(x+۴)-۴=x$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(۳x-۴)=\frac{(۳x-۴)+۴}{۳}=\frac{۳x}{۳}=x$$

بنابر این دو تابع g و f وارون همدیگرند.

تمرین برای حل:

۱۰ : نشان دهید که دو تابع زیر وارون یکدیگرند.

$$f(x)=۲+\sqrt[۳]{x-۱} \qquad \text{و} \qquad g(x)=(x-۲)^۳+۱$$

***

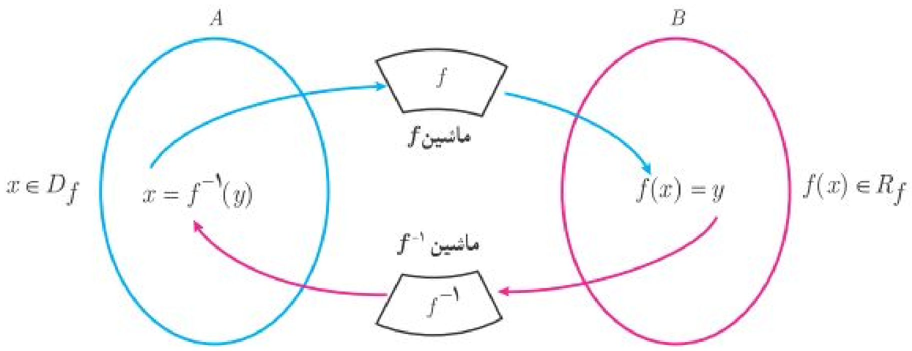
قسمت چهارم : روش های تعیین ضابطه‌ی معکوس تابع

برای تعیین معکوس یک تابع معکوس پذیر که معادله‌ی آن معلوم باشد. دو روش متداول است.

روش اوّل) تعویض متغیر ها: در این روش به ترتیب زیر عمل می کنیم.

مرحله‌ی ۱) متغیر x را به y و برعکس تبدیل می کنیم.

مرحله‌ی ۲) متغیر y را بر حسب x محاسبه می کنیم.



مثال: ثابت کنید که تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow\sqrt{۲x_۱-۳}=\sqrt{۲x_۲-۳}\rightarrow ۲x_۱-۳=۲x_۲-۳$$
$$\rightarrow ۲x_۱=۲x_۲\rightarrow x_۱=x_۲$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$y=\sqrt{۲x-۳}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\sqrt{۲y-۳}\rightarrow x^۲=۲y-۳\rightarrow y=\frac{x^۲+۳}{۲}$$

$$\therefore\ f^{-۱}(x)=\frac{x^۲+۳}{۲}$$

روش دوّم) بازگردانی اعمال: در این روش، ابتدا اعمال روی توابع را به ترتیب اوّلویت مـی نویـسیم و سپس اعمال بازگشت هر یک را مشخص می کنیم. تابع حاصل، تابع وارون است.

مثال ۱ : ثابت کنید که تابع $f(x)=۲x+۱$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow ۲x_۱+۱=۲x_۱+۱\rightarrow ۲x_۱=۲x_۲\rightarrow x_۱=x_۲$$

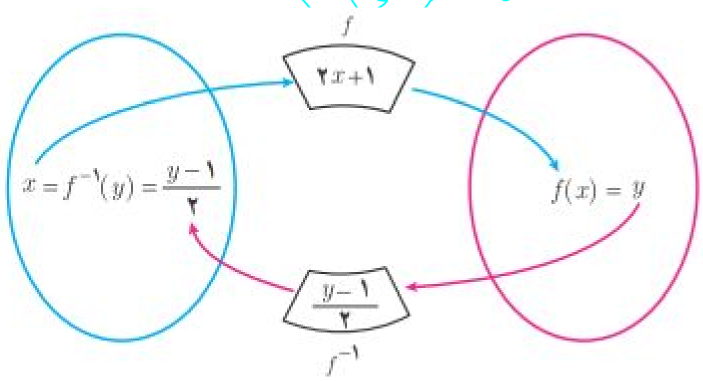
پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$x\xrightarrow{\times ۲}۲x\xrightarrow{+۱}۲x+۱\rightarrow y$$

$$y\leftarrow \frac{x-۱}{۲}\xleftarrow{\div ۲}x-۱\xleftarrow{-۱}x$$

$$f(x)=۲x+۱\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۲}$$

مراحل کار را می توانید در نمودار زیر مشاهده نمایید.



مثال ۲ : ثابت کنید که تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow \sqrt{۲x_۱-۳}=\sqrt{۲x_۲-۳}\rightarrow ۲x_۱-۳=۲x_۲-۳$$

$$\rightarrow ۲x_۱=۲x_۲\rightarrow x_۱=x_۲$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$x\xrightarrow{\times ۲}۲x\xrightarrow{-۳}۲x-۳\xrightarrow{root}\sqrt{۲x-۳}\rightarrow y$$

$$y\leftarrow \frac{x^۲+۳}{۲}\xleftarrow{\div ۲}x^۲+۳\xleftarrow{+۳}x^۲\xleftarrow{sqr}x$$

$$f(x)=\sqrt{۲x-۳}\to f^{-۱}(x)=\frac{x^{۲}+۳}{۲}$$

تمرین ۱۱ : وارون هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=۲x+۳$ ب) $g(x)=\frac{۲}{۳}x-۴$

تمرین۱۲ : به دو طریق نشان دهید که تابع $f(x)=x^{۳}$ وارون پـذیر اسـت. سـپس وارون آن را تعیـین کنید.

تمرین برای حل :

۱۳ : ضابطه‌ی وارون هر یک از توابع با ضابطه های زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{۳}{۵}x+۴$ ب) $f(x)=\frac{-۷x+۳}{۵}$ ج) $f(x)=۵x-۲$

۱۴: معکوس هر یک از توابع زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $f(x)=۳x^{۲}+۱$ ج) $f(x)=۲\sqrt[۳]{x-۱}$

ب) $f(x)=۳x-۱$ د) $f(x)=۳|x|+۵$

۱۵ : وارون تابع $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

۱۶ : نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به صورت $y=ax+b$ $(a\neq ۰)$ باز هم یک تابع خطی است.

۱۷ : تابع $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجه‌ی فارنهایت را به درجه سانتی گراد تبدیل می کند، تابعی بنویسید. که درجه‌ی سانتی گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه‌ی فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

۱۸: به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه‌ی تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند، را به دست آورید.

الف) $f(x)=(x+۵)^{۲}\quad ;\quad x\geq -۵$

ب) $f(x)=-|x-۱|+۱\quad ;\quad x\geq ۲$

ج) $f(x)=(x-۳)^۲$

د) $f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

۱۹ : با محدود کردن دامنه‌ی تابع $f(x)=x^۲-۴x+۵$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و سپس نمودار این دو تابع را رسم کنید.

۲۰ : توابع زیر یک به یک نیستند، با محدود کردن دامنه‌ی آنها توابعی یک به یک بسازید و ضابطه‌ی وارون آنها را به دست آورید.

الف) $f(x)=|x|$ ب) $g(x)=-x^۲$ ج) $h(x)=x^۲+۴x+۳$

۲۱ : اگر $f(x)=۲x+۵$ آنگاه توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f^{-۱}(x)$ ج) $(fof^{-۱})(x)$

ب) $(fof)(x)$ د) $(f^{-۱}of)(x)$

۲۲ : اگر $f=\{(۰,۴),(۳,۲),(۵,۶),(۷,۰)\}$ مطلوب است تعیین تابع $fof^{-۱}$

۲۳ : اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$ ، مقادیر توابع زیر را به دست آورید.

الف) $(fog)^{-۱}(۵)$ ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)$ ج) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$

***

ترفند تقلیل متغیر برای تعیین یک به یک بودن تابع و محاسبه‌ی معکوس

گاهی تعیین یک به یک بودن تابع و به دنبال آن تعیین معکوس آن[1] برای تابعی که ضابطه‌ی آن داده شده باشد، مشکل است. برای تسهیل کار می توان از **ترفند تقلیل متغیر** استفاده کرد. به مثال های زیر توجه کنید.

مثال ۱ : نشان دهید که تابع زیر یک به یک است. سپس معکوس آن را بیابید.

$f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$

حل :

[1]. در صورت معکوس پذیر بودن

$$f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x\rightarrow f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱-۱\rightarrow f(x)=(x+۱)^{۳}-۱$$

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow (x_۱+۱)^{۳}-۱=(x_۲+۱)^{۳}-۱\rightarrow (x_۱+۱)^{۳}=(x_۲+۱)^{۳}$$

$$\rightarrow x_۱+۱=x_۲+۱\rightarrow x_۱=x_۲$$

لذا تابع f یک به یک است و لذا معکوس پذیر می باشد.

$$x\xrightarrow{+۱}x+۱\xrightarrow{\text{توان۳}}(x+۱)^{۳}\xrightarrow{-۱}(x+۱)^{۳}-۱$$

$$\sqrt[۳]{x+۱}-۱\xleftarrow{-۱}\sqrt[۳]{x+۱}\xleftarrow{\sqrt[۳]{\ }}x+۱\xleftarrow{+۱}x$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x+۱}-۱$$

مثال۲ : نشان دهید که تابع زیر یک به یک است. سپس معکوس آن را بیابید.

$$f(x)=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}$$

حل : ابتدا دامنه‌ی تابع را تعیین می کنیم.

$$x-۱\geq ۰\rightarrow x\geq ۱$$

$$f(x)=\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}\rightarrow f(x)=\sqrt{x-۱+۲\sqrt{x-۱}+۱}$$

$$\rightarrow f(x)=\sqrt{\sqrt[۲]{(x-۱)^{۲}}+۲\sqrt{x-۱}+۱}\rightarrow f(x)=\sqrt{((\sqrt{x-۱}+۱)^{۲}}$$

$$\rightarrow f(x)=\sqrt{x-۱}+۱$$

لذا تابع f یک به یک است و لذا معکوس پذیر می باشد.

$$x\xrightarrow{-۱}x-۱\xrightarrow{\sqrt{\ }}\sqrt{x-۱}\xrightarrow{+۱}\sqrt{x-۱}+۱$$

$$(x-۱)^{۲}+۱\xleftarrow{+۱}(x-۱)^{۲}\xleftarrow{\text{توان۲}}x-۱\xleftarrow{-۱}x$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=(x-۱)^{۲}+۱$$

تهیه کننده : جابر عامری   دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @amerimath

درس چهارم : تبدیل نمودار توابع

برای رسم نمودار بسیاری از توابع می توان از تبدیلات استفاده کرد. در واقع بـه کمـک تبـدیلات مـی تـوان نمودار یک تابع را به کمک نمودار تابعی ساده تر از آن رسم نمود. در اینجا برخی از این تبـدیلات را معرفـی می کنیم.

الف : انتقال های افقی و عمودی

قسمت اوّل : انتقال عمودی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و $(x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد. می تـوان انتقال عمودی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

حالت اوّل : تابع g به صورت $g(x) = f(x) + k$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(x_\circ) = f(x_\circ) + k = y_\circ + k$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ + k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار f است.

حالت دوّم : تابع g به صورت $g(x) = f(x) - k$ تعریف شده باشد.آنگاه

$$g(x_\circ) = f(x_\circ) - k = y_\circ - k$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ - k)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ, y_\circ)$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که :

۱ : برای رسم نمودار تابع $y = f(x) + k$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم.

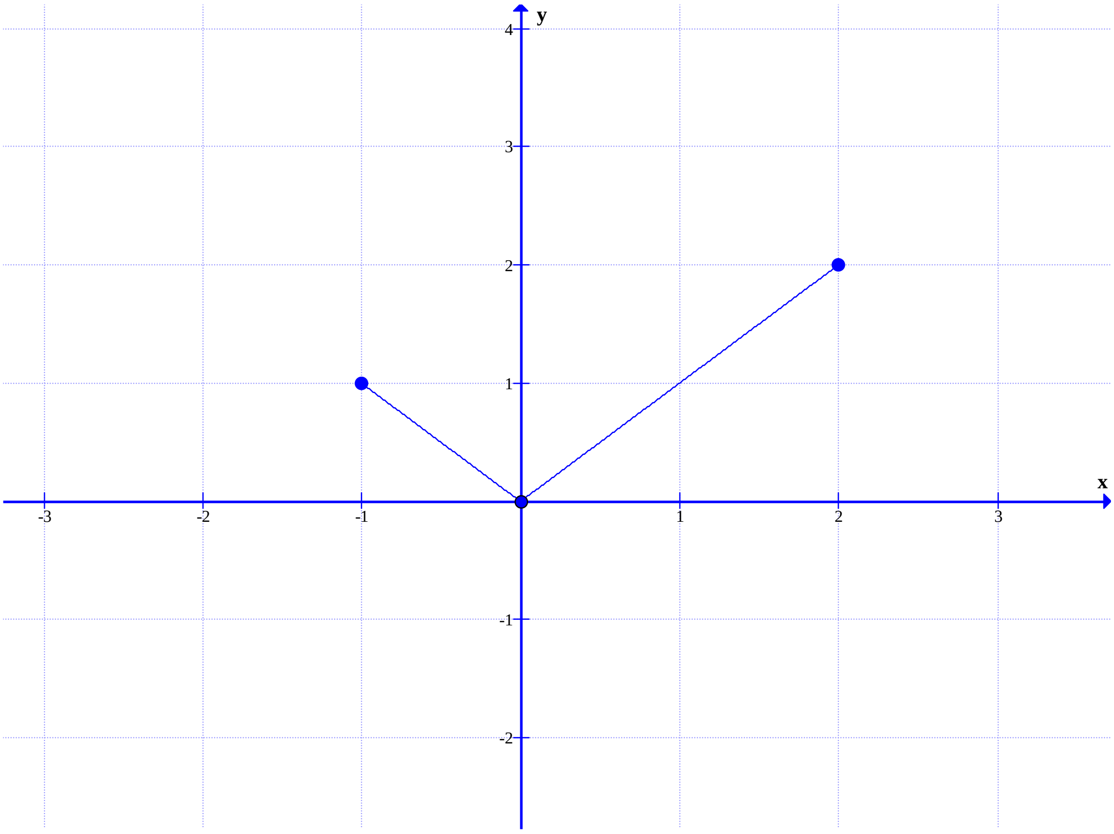
۲ : برای رسم نمودار تابع $y = f(x) - k$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال دهیم.

مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x|$ را در فاصله‌ی $[-۱,۲]$ را رسم کنید. سپس به کمک آن هـر یـک از موارد زیر پاسخ دهید.

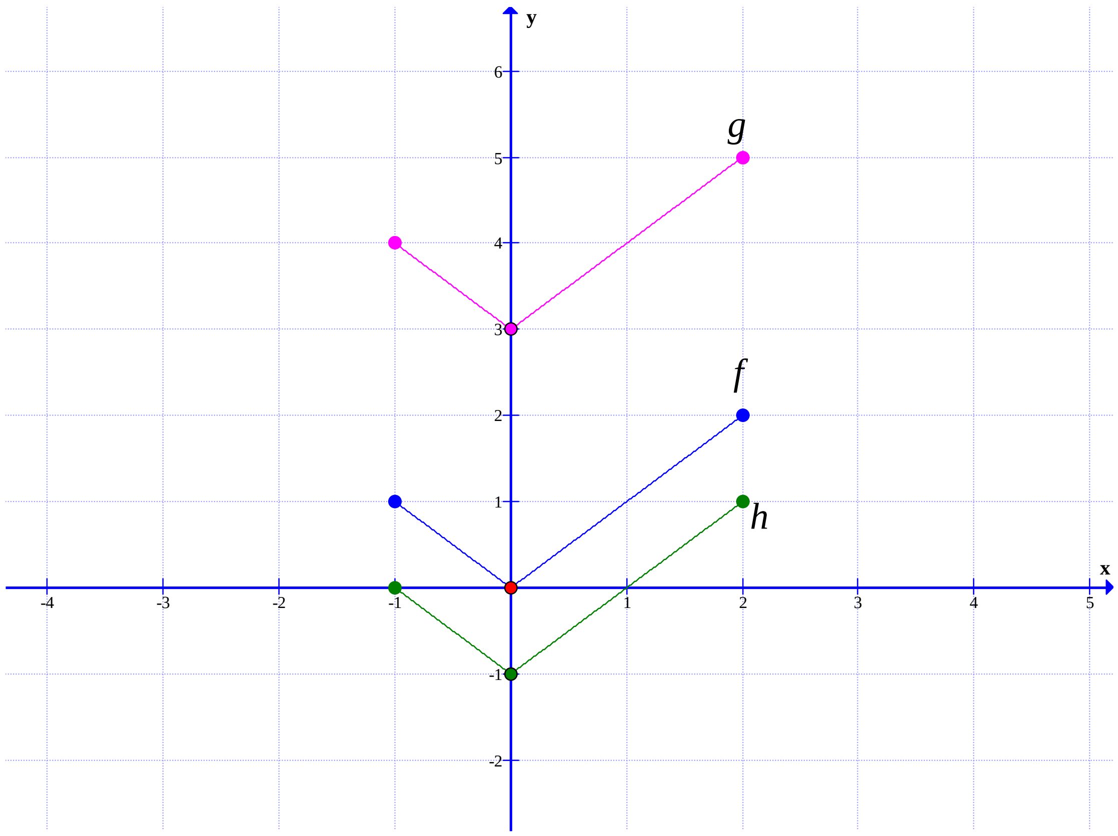
الف : نمودار تابع $g(x) = |x| + ۳$ را رسم کنید.   ب : نمودار تابع $h(x) = |x| - ۱$ را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x|$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می کنیم.

x	-۱	۰	۲
y	۱	۰	۲

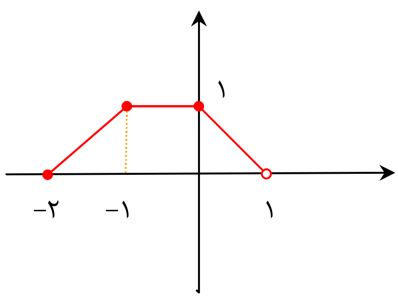


اکنون با توجه به آنچه که گفته شد. برای رسم نمودار تابع $g(x)$ نمودار $f(x)$ را سه واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $h(x)$ نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت پایین منتقل می کنیم.



نتیجه: در انتقال عمودی طول نقاط نمودار تابع اصلی ثابت می مانند و فقط عرض آنها به اندازه‌ی k اضافه یا کم می شود.

تمرین ۱ : تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x) = f(x) - ۲$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

قسمت دوّم : انتقال افقی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و $(x_\circ , y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y = f(x)$ باشد. می توان انتقال افقی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

حالت اوّل : تابع g به صورت $g(x) = f(x+k)$ تعریف شده باشد. ،آنگاه

$$g(x_\circ - k) = f(x_\circ - k + k) = f(x_\circ)$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_\circ - k, y_\circ)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ , y_\circ)$ از نمودار f است.

حالت دوّم : تابع g به صورت $g(x) = f(x-k)$ تعریف شده باشد.آنگاه

$$g(x_\circ + k) = f(x_\circ + k - k) = f(x_\circ)$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_\circ + k, y_\circ)$ نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_\circ , y_\circ)$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که :

۱ : برای رسم نمودار تابع $y = f(x+k)$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به سمت چپ انتقال دهیم.

۲ : برای رسم نمودار تابع $y = f(x-k)$ ، کافی است نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به سمت راست انتقال دهیم.

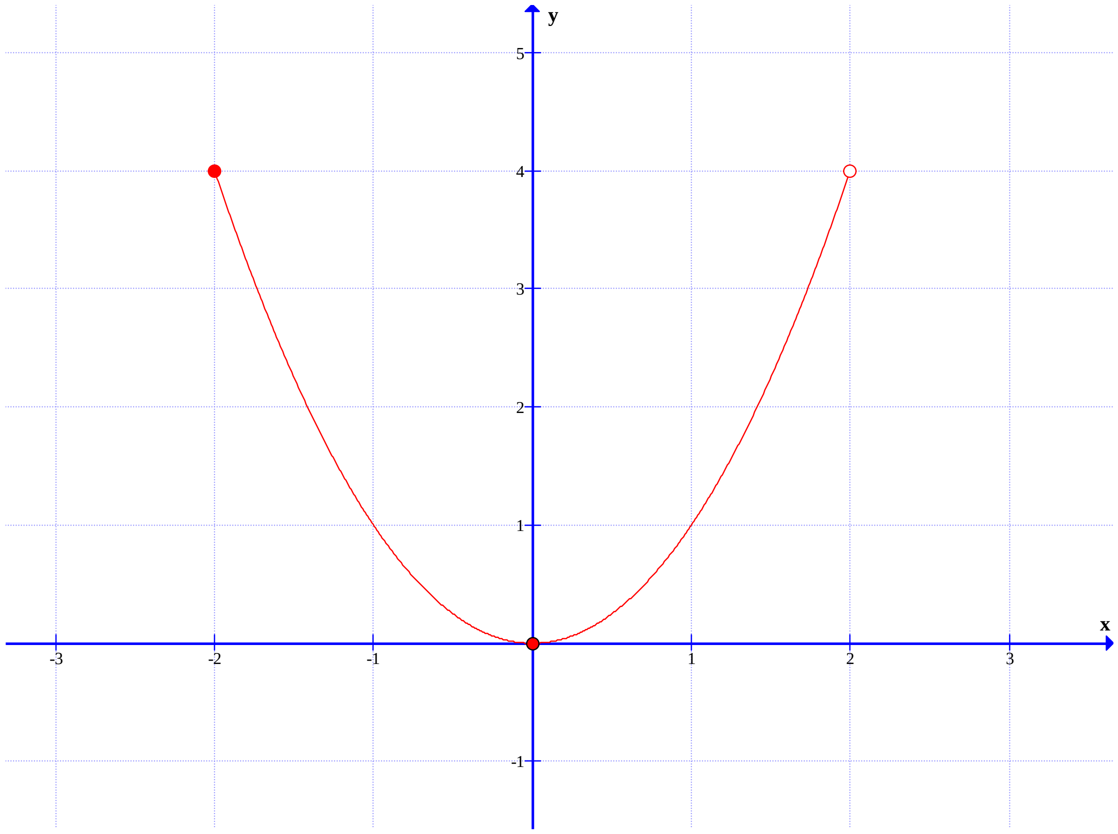
مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^۲$ را در فاصله‌ی $[-۲,۲)$ را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع $g(x) = (x+۳)^۲$ را رسم کنید.

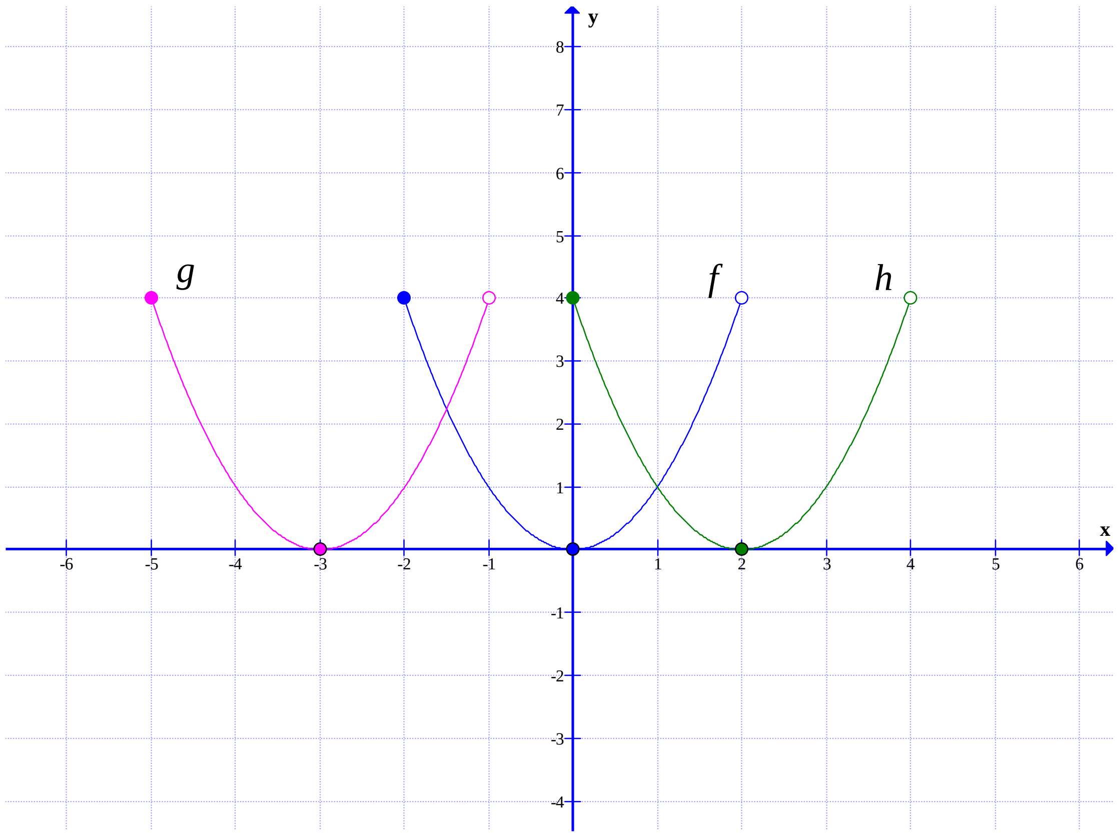
ب : نمودار تابع $h(x) = (x-۲)^۲$ را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^۲$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می کنیم.

x	-۲	۰	۲
y	۴	۰	۴

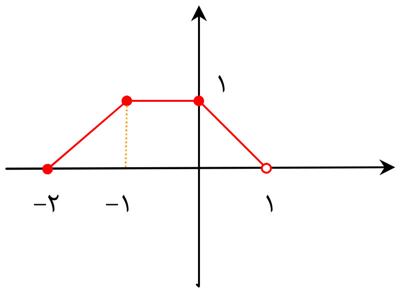


اکنون با توجه به آنچه که گفته شد. برای رسم نمودار تابع $g(x)$ نمودار $f(x)$ را سه واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار $h(x)$ نمودار $f(x)$ را دو واحد به سمت راست منتقل می کنیم.



نتیجه: در انتقال افقی عرض نقاط نمودار تابع اصلی ثابت می مانند و فقط طول آنها بـه انـدازه‌ی k واحـد اضافه یا کم می شود.

تمرین ۲ : تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

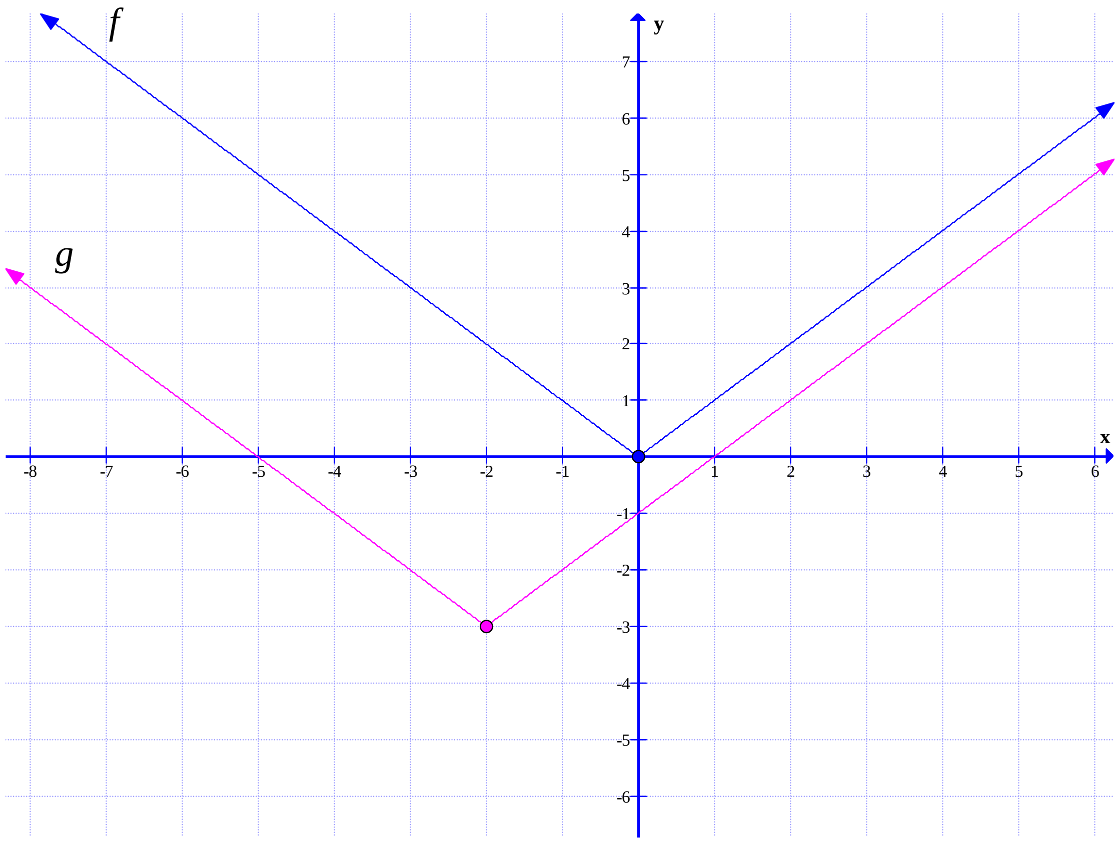
ب : نمودار تابع $g(x)=f(x-۲)$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

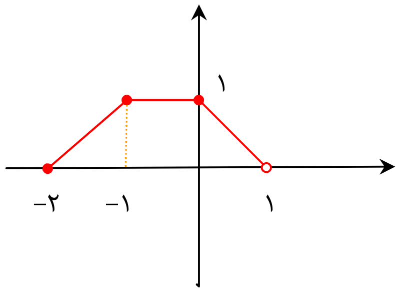
توجه : گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع هم انتقال افقی و هم انتقال عمودی داشته باشیم[1]. بـه مثال زیر توجه کنید.

مثال : برای رسم نمودار تابع $g(x)=|x+۲|-۳$ ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را دو واحد در راستای افقی به سمت چپ و سپس سه واحد در راستای قائم به سمت پایین منتقل می کنیم.



[1] . لازم نیست ترتیبی برای انتقال افقی و عمودی در نظر بگیریم.

تمرین ۳ : تابع $f(x)$ در شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x)=f(x-۲)+۱$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

تمرین ۴ : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sin x$ را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید و سپس به کمک آن نمودار توابع زیر را نیز رسم نمایید.

الف) $g(x)=\sin x+۲$ ب) $h(x)=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ ج) $k(x)=\sin(x+\frac{\pi}{۲})+۱$

***

ب : انبساط و انقباض عمودی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و $(x_۰,y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد. می توان انبساط و انقباض عمودی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

در صورتی که تابع g به صورت $g(x)=kf(x)$ تعریف شده باشد،آنگاه

$$g(x_۰)=kf(x_۰)=ky_۰$$

بنابر این نقطه‌ی $(x_۰,ky_۰)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را k برابر کنیم ولی طول نقاط را ثابت نگه داریم.

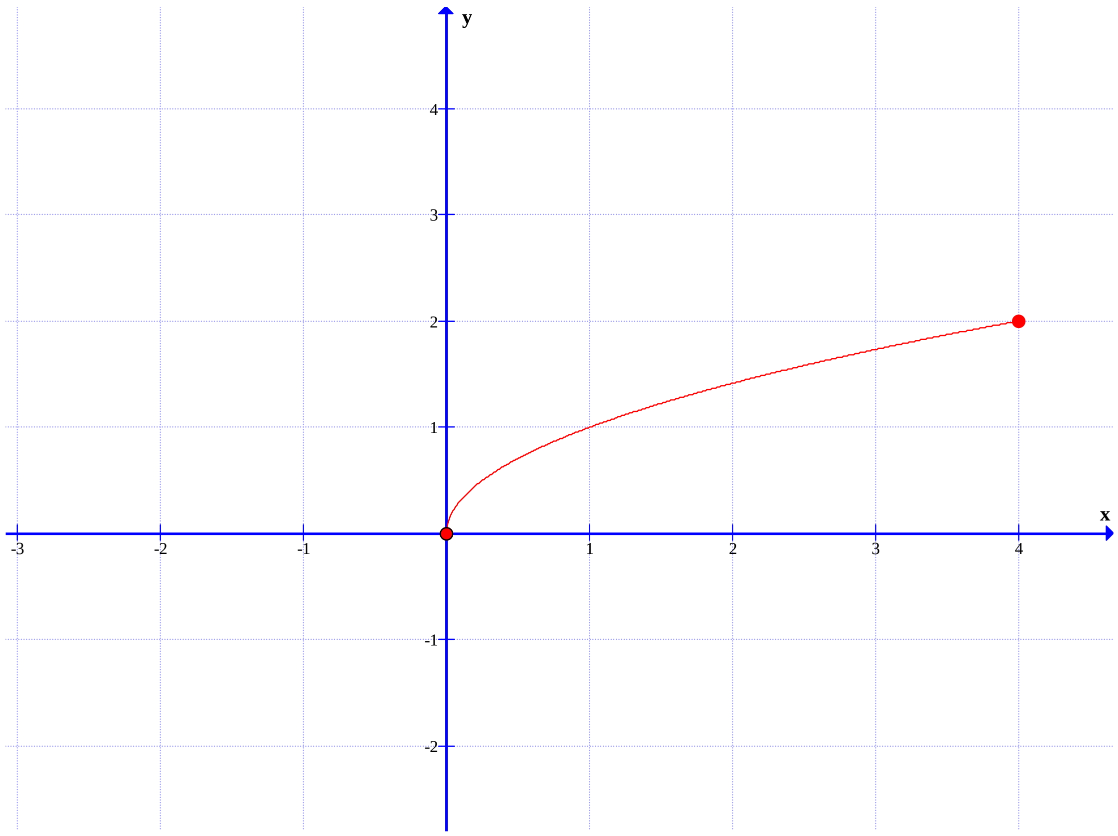
مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در فاصله‌ی $[۰,۴]$ را رسم کنید. سپس به کمک آن هر یک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع $g(x)=۳\sqrt{x}$ را رسم کنید.

ب : نمودار تابع $h(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{x}$ را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می کنیم.

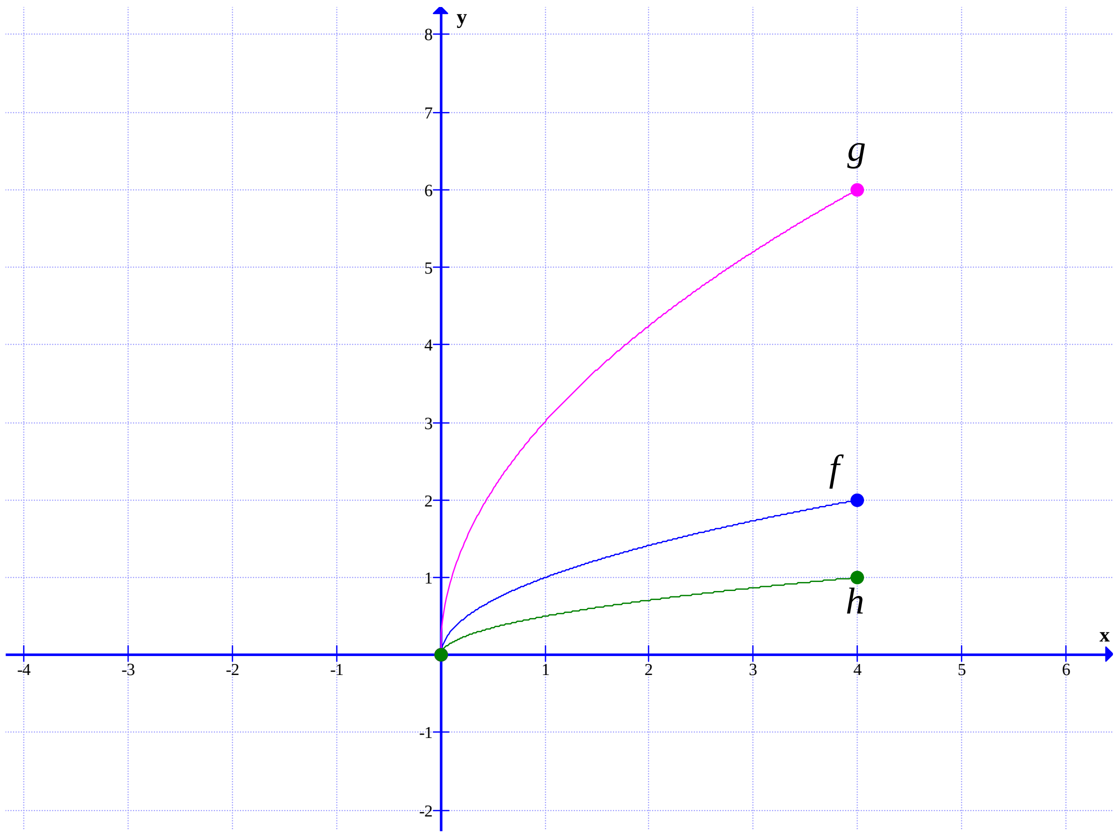
x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲



اکنون برای رسم نمودار توابع h و g طول نقاط نمودار تابع f را ثابت نگه می داریم ولی عـرض نقـاط را در ضریب $f(x)$ ضرب می کنیم.

g				
	x	۰	۱	۴
	y	۰	۳	۶

h				
	x	۰	۱	۴
	y	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱



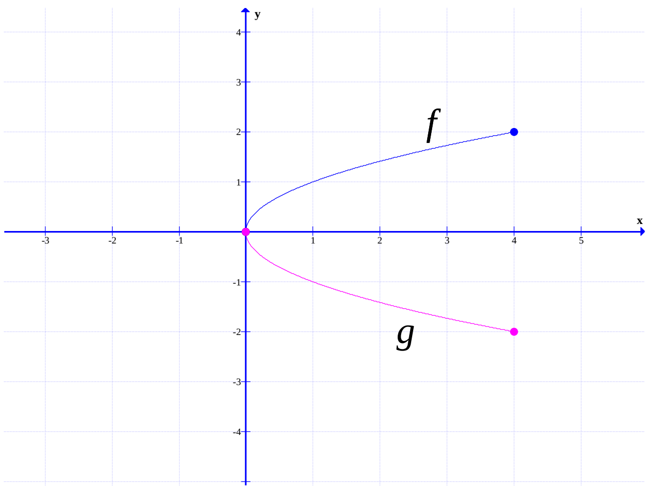
توجه :

۱ : اگر $k>۱$ باشد. نمودار $y=kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$ حاصل می شود.

۲ : اگر $۰<k<۱$ باشد. نمودار $y=kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ حاصل می شود.

۳ : اگر عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع $y=-f(x)$ به دست می آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور x ها است.

در شکل زیر نمودار دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=-\sqrt{x}$ را ملاحظه نمایید.



تمرین ۵ : نمودار تابع $f(x)=\cos x$ را در فاصله‌ی $[0,2\pi]$ را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x)=2\cos x$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

***

ج : انبساط و انقباض افقی

اگر k یک عدد مثبت در نظر گرفته شود و (x_0,y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد. می توان انبساط و انقباض افقی را برای تابع g در حالت های زیر بررسی کرد.

در صورتی که تابع g به صورت $g(x)=f(kx)$ تعریف شده باشد ،آنگاه

$$g(\frac{1}{k}x_0)=f(\frac{1}{k}\times kx_0)=f(x_0)$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{1}{k}x_0,y_0)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی (x_0,y_0) از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را ثابت نگه داشته ، ولی طول نقاط را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

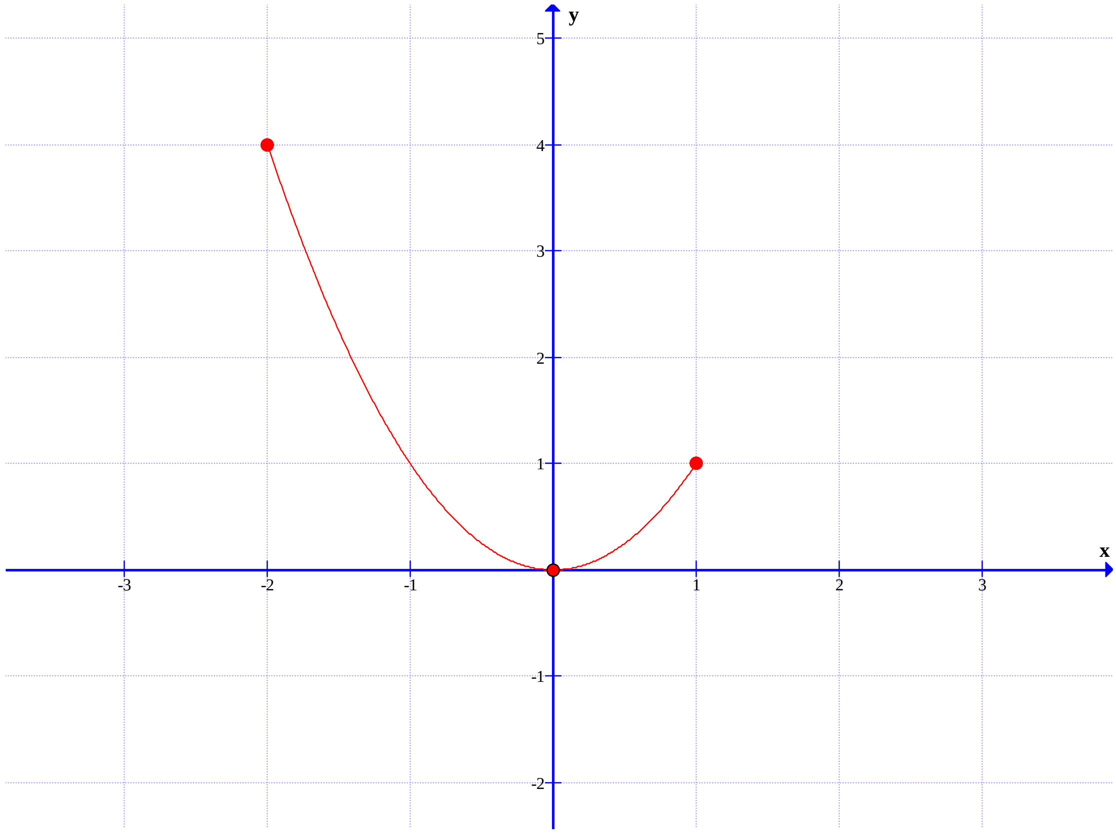
مثال : ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^2$ را در فاصله‌ی $[-2,1]$ را رسم کنید. سپس بـه کمـک آن هـر یـک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف : نمودار تابع $g(x)=(2x)^2$ را رسم کنید.

ب : نمودار تابع $h(x)=(\frac{1}{3}x)^2$ را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^2$ را در فاصله‌ی داده شده رسم می کنیم.

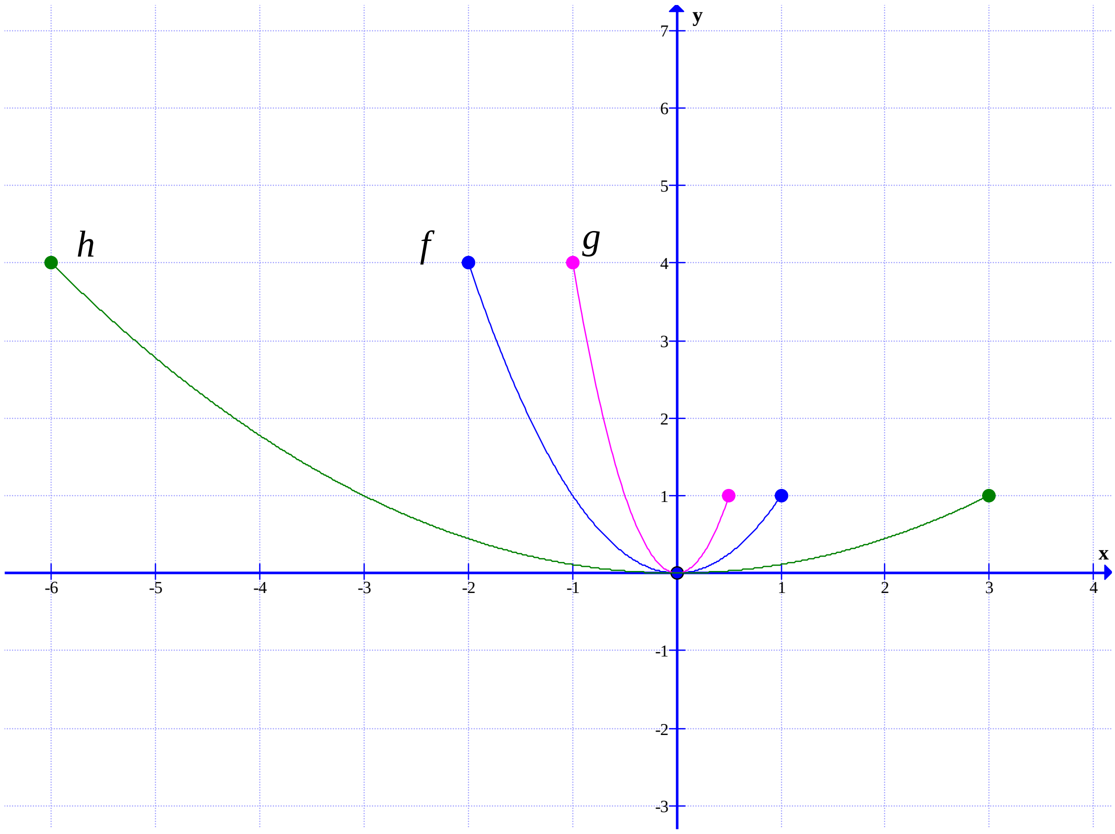
x	-۲	۰	۱
y	۴	۰	۱



اکنون برای رسم نمودار توابع h و g عرض نقاط نمودار تابع f را ثابت نگه می داریم ولی طـول نقـاط را در معکوس ضریب x ضرب می کنیم.

g	x	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$
	y	۴	۰	۱

h	x	-۶	۰	۳
	y	۴	۰	۱



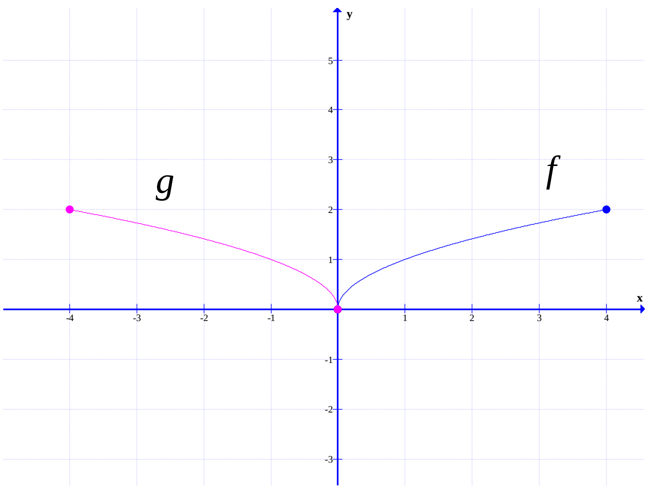
توجه :

۱ : اگر $k > 1$ باشد. نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

۲ : اگر $0 < k < 1$ باشد. نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

۳ : اگر طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط نمودار تابع $y = f(-x)$ بـه دسـت مـی آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y ها است.

در شکل زیر نمودار دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{-x}$ را ملاحظه نمایید.



تمرین ۶ : نمودار تابع $f(x)=\sin x$ را در فاصله‌ی $[0,2\pi]$ را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه و برد تابع $f(x)$ را بنویسید.

ب : نمودار تابع $g(x)=\sin 2x$ را رسم کنید.

ج : دامنه و برد تابع $g(x)$ را بنویسید.

د : با مقایسه‌ی دامنه و برد توابع $f(x)$ و $g(x)$ چه نتیجه می گیرید.

توجه : گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع، انبساط و انقباض های افقی و عمودی را با همدیگر انجام دهیم. برای مثال اگر نقطه‌ی (x_0,y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=3f(2x)$ تعریف شده باشد، آنگاه

$$g(\frac{x_0}{2})=3f(2\times\frac{x_0}{2})=3f(x_0)$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{x_0}{2},3y_0)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی (x_0,y_0) از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=3f(2x)$، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را سه برابر کرده و طول نقاط را در $\frac{1}{2}$ ضرب می کنیم.

توجه : گاهی لازم است، برای رسم نمودار یک تابع، انبساط و انقباض های افقی و عمودی را به همراه انتقال عمودی یا افقی استفاده کنیم.

مثال الف : برای مثال اگر نقطه‌ی (x_0,y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=f(2x+1)$ تعریف شده باشد، آنگاه

$$g(\frac{x_0-1}{2})=f(2\times\frac{x_0-1}{2}+1)=f(x_0-1+1)=f(x_0)$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{x_0-1}{2},y_0)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی (x_0,y_0) از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=f(۲x+۱)$، کافی است، عرض نقاط نمودار $f(x)$ را ثابت نگه داشته ، ولی ابتدا از طول نقاط یک واحد از آن کم کرده و سپس در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می کنیم.

مثال ب : اگر نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=f(۲x)+۱$ تعریف شده باشد. آنگاه

$$g(\frac{x_۰}{۲})=f(۲\times\frac{x_۰}{۲})+۱=f(x_۰)+۱=y_۰$$

بنابراین نقطه‌ی $(\frac{x_۰}{۲},y_۰+۱)$ از نمودار تابع g متناظر با نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ از نمودار f است.

با توجه به مطلب می توان نتیجه گرفت که:

برای رسم نمودار تابع $y=f(۲x)+۱$، کافی است، طول نقاط نمودار $f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کرده و به عرض نقاط یک واحد اضافه کنیم.

توجه : برای رسم نمودار تابعی نظیر $g(x)=۳f(\frac{۵x+۳}{۴})-۵$ به کمک نمودار تابع $f(x)$ می توان از **ترفند تغییر متغیر** نیز استفاده کنید. این ترفند برای تعیین نقاط g به کمک نقاط متناظر آنها در f بکار می رود. بدین ترتیب که :

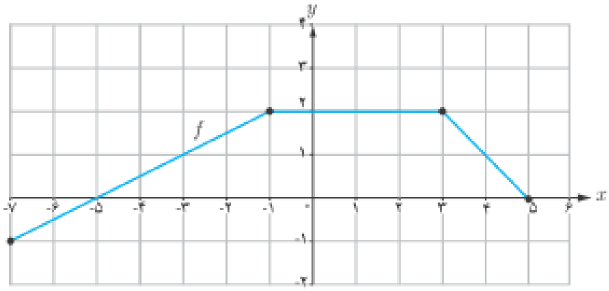
الف : عرض نقاط f را ابتدا سه برابر و سپس ۵ واحد اضافه می کنیم.

ب : عبارت $\frac{۵x+۳}{۴}$ را برابر t قرار می دهیم و x را محاسبه می کنیم.

$$\frac{۵x+۳}{۴}=t\rightarrow ۵x+۳=۴t\rightarrow x=\frac{۴t-۳}{۵}$$

یعنی طول نقاط f را ابتدا ۴ برابر کرده و سپس ۳ واحد اضافه می کنیم و در نهایت بر ۵ تقسیم می کنیم.

تمرین ۷ : اگر نمودار تابع f به مقابل باشد. نمودار توابع زیر را رسم کنید.



الف) $g(x)=f(۲x+۱)$

ب) $h(x)=f(۲x)-۳$

ج) $k(x)=۲f(x)-۱$

نتیجه : خلاصه‌ی آنچه که در این درس بیان شده است برای تابع $y=f(x)$ و با فرض مثبت بودن عدد k به شکل زیر بیان می شود.

<table dir="rtl">
<tr><th>تابع جدید</th><th colspan="2">نحوه‌ی تبدیل</th><th>نتیجه</th></tr>
<tr><td>$y=f(x)+k$</td><td rowspan="3">طول نقاط ثابت می ماند.</td><td>به عرض نقاط k واحد
اضافه می شود.</td><td>نمودار به اندازه‌ی k واحد
بالا می رود.</td></tr>
<tr><td>$y=f(x)-k$</td><td>از عرض نقاط k واحد
کم می شود.</td><td>نمودار به اندازه‌ی k واحد
پایین می رود.</td></tr>
<tr><td>$y=kf(x)$</td><td>عرض نقاط در k
ضرب می شود.</td><td>اگر $۰<k<۱$
نمودار در جهت عمودی منقبض می شود.
اگر $k>۱$
نمودار در جهت عمودی منبسط می شود.</td></tr>
<tr><td>$y=f(x+k)$</td><td rowspan="3">عرض نقاط ثابت می ماند.</td><td>از طول نقاط k واحد
کم می شود.</td><td>نمودار به اندازه‌ی k واحد
به عقب می رود.</td></tr>
<tr><td>$y=f(x-k)$</td><td>به طول نقاط k واحد
اضافه می شود.</td><td>نمودار به اندازه‌ی k واحد
به جلو می رود.</td></tr>
<tr><td>$y=f(kx)$</td><td>طول نقاط در $\frac{۱}{k}$
ضرب می شود.</td><td>اگر $۰<k<۱$
نمودار در جهت افقی منبسط می شود.
اگر $k>۱$
نمودار در جهت افقی منقبض می شود.</td></tr>
</table>

تمرین برای حل :

۸ : نقطه‌ی $(-۸,۶)$روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد. در هر یک از توابع زیر تعیین کنید که این نقطه بـه چه نقطه ای متناظر می شود.

۱ -۸) $g(x)=f(x)-۱$

۲ -۸) $g(x)=f(x)+۲$

۳ -۸) $g(x)=۳f(x)$

۴ -۸) $g(x)=f(۲x)$

۵ -۸) $g(x)=۳f(x-۱)$

۶ -۸) $g(x)=۵f(x+۱)+۲$

۹ : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم کنید. سپس به کمک تبدیلات نمودار هر یک از توابع آن را رسم نمایید.

۱ -۹) $g(x)=\sqrt{۲+x}$

۲ -۹) $g(x)=۲+\sqrt{x}$

۳ -۹) $g(x)=-۲\sqrt{x}$

۴ -۹) $g(x)=۲+\sqrt{x-۱}$

۵ -۹) $g(x)=\sqrt{۱-x}$

۶ -۹) $g(x)=\sqrt{۲x+۱}-۳$

۱۰ : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\cos x$ را در فاصله‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$ رسم کنید. سپس بـه کمـک تبـدیلات نمودار هر یک از توابع آن را رسم نمایید.

الف) $g(x)=\cos ۲x-۱$

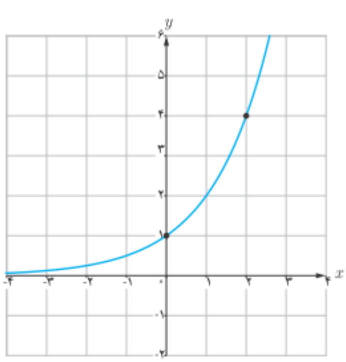
ب) $h(x)=۲\cos\frac{x}{۳}$

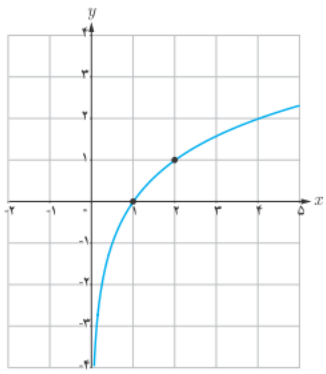
۱۱: در زیر نمودار توابع $y=۲^x$ و $y=\log_۲^x$ و $y=\cos x$ رسم شده اند. نمودار توابع زیر را به کمک تبدیلات رسم کنید.

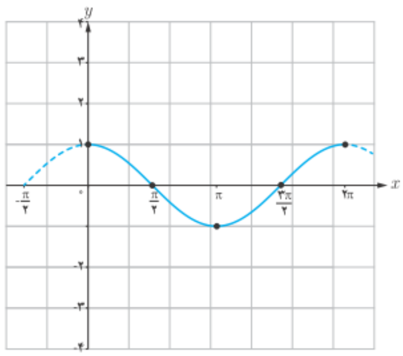
الف) $y=۲^{x-۱}+۲$

ب) $y=\log_۲^{x+۲}$

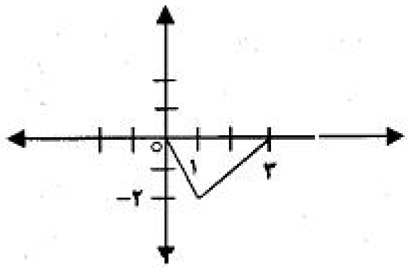
ج) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$







۱۲ : در زیر نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. با استفاده از تبدیلات، ابتدا نمودار تابع $y = -۲f(x-۳)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.



۱۳ : تابع $y = f(x)$ با دامنه $[-۲,۱]$ و برد $(۱,۵]$ را در نظر بگیرید. به کمک ویژگی های تبدیلات، دامنه و برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $g(x) = ۲f(x-۱) - ۳$

ب) $h(x) = f(\frac{۱}{۲}x) + ۱$

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان