

# ریاضی ۱

پایه می دهم « رشته های علوم تجربی و ریاضی و فیزیک »

## فصل ۲ : مثلثات

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

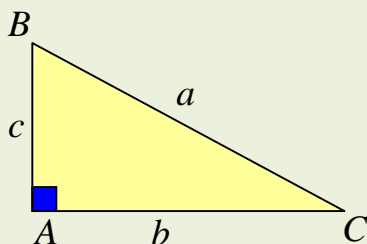
مهر ۱۳۹۹

## درس اول : نسبت های مثلثاتی

مثلثات شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می پردازد. یکی از اهداف این علم ، اندازه گیری فاصله ها به صورت غیر مستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی ، فیزیک ، نقشه برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد.

### قسمت اول : تعریف نسبت های مثلثاتی یک زاویه حاده در مثلث قائم الزاویه

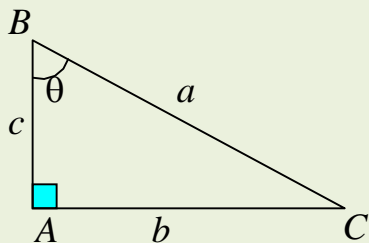
هر مثلث که یک زاویه ی قائمه داشته باشد، را مثلث قائم الزاویه می نامند. در هر مثلث قائم الزاویه ، ضلع روبرو به زاویه ی قائمه را وتر می گویند.



در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است. (رابطه ی فیثاغورس)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

برای هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه نسبت های مثلثاتی زیر را می توان بدین ترتیب تعریف کرد.



سینوس هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه ی ضلع مقابل زاویه براندازه ی وتر برابر است.

$$\sin\theta = \frac{b}{a} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

کسینوس هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه ی ضلع مجاور زاویه براندازه ی وتر برابر است.

$$\cos\theta = \frac{c}{a} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

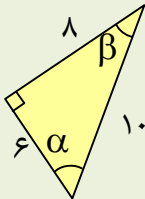
تانژانت هر زاویه ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه ی ضلع مقابل زاویه بر اندازه ی ضلع مجاور آن برابر است.

$$\tan \theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

کتانژانت هر زاویه‌ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه‌ی ضلع مجاور زاویه بر اندازه‌ی ضلع مقابل آن برابر است.

$$\cot \theta = \frac{c}{b} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

**تمرین ۱:** با توجه به شکل مقابل تساوی های زیر را کامل کنید.



۱)  $\sin \alpha =$

۴)  $\tan \alpha =$

۷)  $\sin \beta =$

۲)  $\cos \alpha =$

۵)  $\cos \beta =$

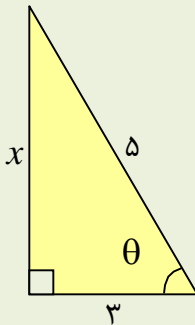
۸)  $\cot \alpha =$

۳)  $\tan \beta =$

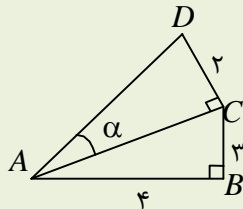
۶)  $\cot \beta =$

**نتیجه:** اگر دو زاویه متمم یکدیگر باشند، سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و همچنین تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. (چرا؟)

**تمرین ۲:** با توجه به شکل مقابل، نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی  $\theta$  را به دست آورید.



**تمرین ۳:** در شکل مقابل مقدار  $\tan \alpha$  را بدست آورید.



**تمرین ۴:** ثابت کنید که سینوس و کسینوس هر زاویه‌ی حاده از یک مثلث قائم الزاویه، همواره از یک کوچکترند.

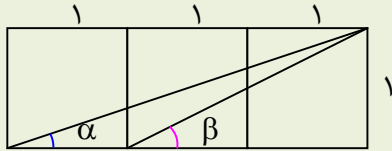
تمرین ۵: در تساوی های زیر جای خالی را کامل کنید.

الف)  $\sin(۳۳^\circ) = \cos(\dots)$

ب)  $\tan(\dots) = \cot(۵۶^\circ)$

تمرین برای حل:

۶: در شکل مقابل سه مربع به ضلع یک کنار هم قرار گرفته اند. حاصل  $\tan \alpha + \tan \beta$  را به دست آورید.



۷: اگر  $x$  یک زاویه ی حاده از یک مثلث قائم الزاویه باشد و رابطه ی  $\frac{\sin(۳۹^\circ)}{\cos x} = ۱$  در آن برقرار باشد.

مقدار  $x$  کدام است؟

۶۱° (۴)

۵۱° (۳)

۴۹° (۲)

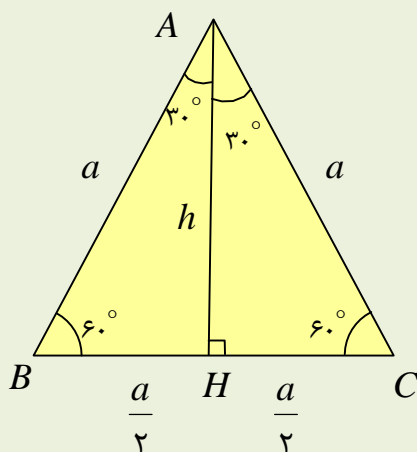
۳۹° (۱)

\*\*\*

قسمت دوم: محاسبه ی مقادیر نسبت های زاویه های مهم

در ادامه می خواهیم مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های مهم را محاسبه کنیم.

الف: محاسبه ی مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های ۳۰ و ۶۰ درجه



می دانیم که در هر مثلث متساوی الاضلاع نیمساز هر زاویه و

ارتفاع و میانه ی ضلع نظیر بر هم منطبق هستند. لذا برای مثلث

متساوی الاضلاع مقابل می توان نوشت:

$$\Delta(ABH): AH^2 + BH^2 = AB^2 \rightarrow h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \rightarrow h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$

$$\rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} \rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

حال می توان نوشت:

$$\sin(30^\circ) = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(30^\circ) = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{2a}{2\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot(30^\circ) = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{2a} = \sqrt{3}$$

همچنین :

$$\sin(60^\circ) = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

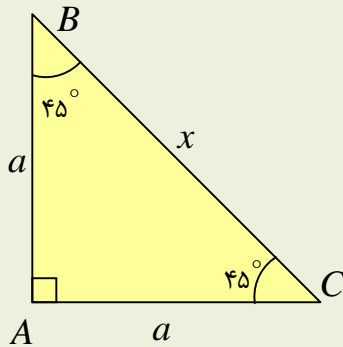
$$\cos(60^\circ) = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(60^\circ) = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{2a} = \sqrt{3}$$

$$\cot(60^\circ) = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{2a}{2\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**ب:** محاسبه ی مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه ی ۴۵ درجه

می دانیم که در هر مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، اندازه ی دو زاویه ی مجاور به قاعده برابر ۴۵ درجه است. بر این اساس می توان نوشت:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \rightarrow x^2 = a^2 + a^2 \rightarrow x^2 = 2a^2 \rightarrow x = \sqrt{2}a$$

حال می توان نوشت:

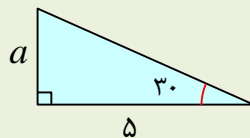
$$\sin(45) = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(45) = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(45) = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot(45) = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a} = 1$$

**تمرین ۸:** با توجه به شکل مقابل مقدار  $a$  را تعیین کنید.

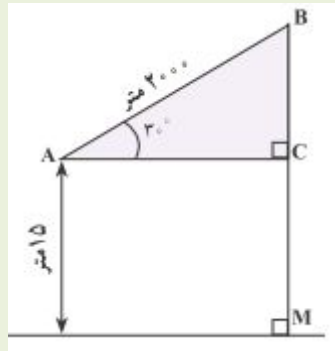


**تمرین ۹:** یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه ی ۳۰ درجه پرتاب می شود. تعیین کنید.

پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟

حل: ابتدا برای مسئله ی داده شده یک شکل هندسی ترسیم می کنیم. سپس به کمک آن مدل ریاضی

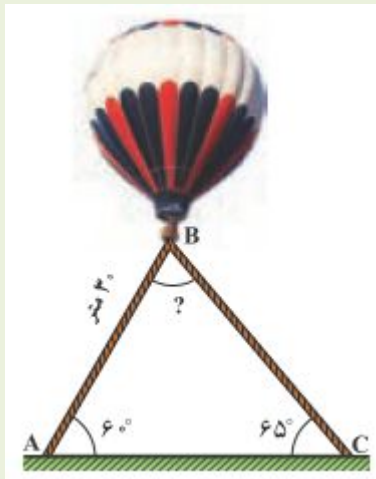
ساخته و مسئله را حل می کنیم.



$$\Delta(ABC) : \sin(30) = \frac{BC}{AB} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{2000} \rightarrow BC = \frac{1 \times 2000}{2} = 1000 \text{ m}$$

لذا ارتفاع موشک می شود :

$$BM = BC + CM = 1000 + 15 = 1015 \text{ m}$$



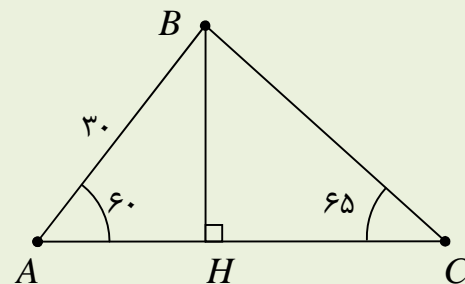
**تمرین ۱۰ :** بالنی با دو طناب به شکل زیر به زمین بسته شده

است. طول یکی از طناب ها ۳۰ متر است. طول تقریبی طناب دوّم

را به دست آورید. ( $\sin(65^\circ) = 0.9$ )

حل : ابتدا ارتفاع  $BH$  را رسم می کنیم.

$$\Delta(ABH) : \sin(60) = \frac{BH}{AB}$$



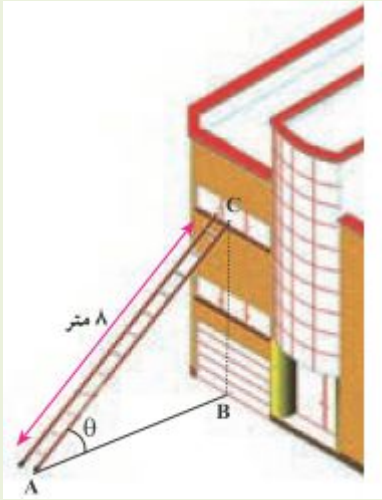
$$\frac{\sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{30} \rightarrow BH = \frac{30 \cdot \sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

$$\Delta(CBH) : \sin(65) = \frac{BH}{BC} \xrightarrow{\sin(65) = 0.9} \frac{9}{10} = \frac{15\sqrt{3}}{BC} \rightarrow BC = \frac{150\sqrt{3}}{9} = \frac{50\sqrt{3}}{3}$$

تمرین ۱۱: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = 2 \sin(30^\circ) + \frac{1}{2} \tan(45^\circ) + \cos^2(45^\circ)$$

تمرین برای حل:



۱۲: مطابق شکل زیر، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره‌ی

ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه‌ی نردبان با سطح زمین ۳۰ درجه باشد.

الف: ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید.

ب: فاصله‌ی پای نردبان تا ساختمان را تعیین کنید.

۱۳: نسرين می خواهد ارتفاع یک تیر برق که طول سایه‌ی آن ۳ متر است را حساب کند. او طوری ایستاد

که انتهای سایه‌ی او بر انتهای سایه‌ی تیر برق منطبق شود. اگر قد نسرين ۱/۵ متر و طول سایه‌ی او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

۱۴: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف)  $\sin(60^\circ) \cos(30^\circ) + \sin(30^\circ) \cos(60^\circ)$

ب)  $\tan(45^\circ) + 3 \cos(30^\circ) - 2 \sin(30^\circ)$

۱۵: یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه‌ی هواپیما با افق

حدود ۱۳ درجه باشد. حساب کنید هواپیما در چه فاصله‌ی ای از نقطه‌ی A فرود می آید؟

$$(\tan(13^\circ) = 0.23)$$





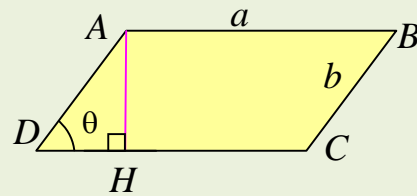
قسمت سوم : کاربرد نسبت های مثلثاتی در محاسبه ی مساحت

گاهی می توان به کمک نسبت های مثلثاتی مساحت، مثلث یا متوازی الاضلاع را محاسبه نمود. به تمرین های بعد توجه نمایید.

**تمرین ۱۶ :** ثابت کنید که مساحت هر متوازی الاضلاع برابر حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه ی بین آن دو ضلع است.

حل :

$$\Delta(ADH) : \sin\theta = \frac{AH}{AD} \rightarrow AH = AD \times \sin\theta$$



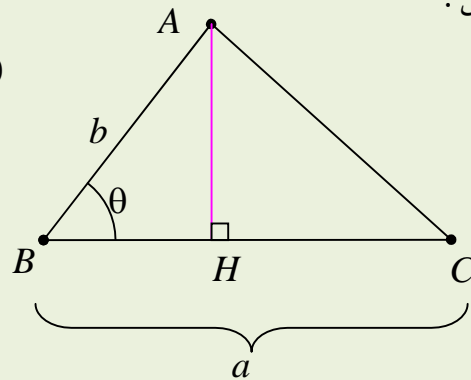
$$S = DC \times AH = (DC) \times (AD \times \sin\theta) = DC \times AD \times \sin\theta$$

$$\Rightarrow S = ab \sin\theta$$

**تمرین ۱۷ :** ثابت کنید که مساحت هر مثلث برابر نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه ی بین آن دو ضلع است.

حل :

$$\Delta(ABH) : \sin\theta = \frac{AH}{AB} \rightarrow AH = AB \times \sin\theta$$



$$S = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} BC \times AB \times \sin\theta$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} ab \sin\theta$$

**تمرین ۱۸ :** مساحت مثلثی را حساب کنید که اندازه ی دو ضلع آن ۶ و ۸ سانتی متر بوده و زاویه ی بین آنها

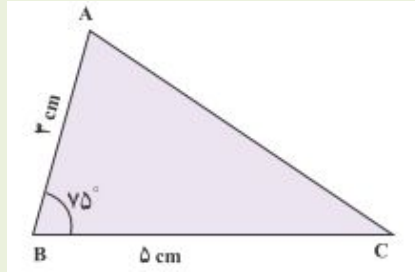
$$50^\circ \text{ درجه باشد. } (\sin(50^\circ) = 0.76)$$

**تمرین ۱۹ :** باغی به شکل دوزنقه وجود دارد که طول های اضلاع موازی آن ۳۰۰۰ و ۲۰۰۰ متر و دو ضلع دیگر هر یک ۱۰۰۰ متر است. اگر یکی از زاویه های پایه ۶۰ درجه باشد. مساحت باغ را حساب کنید.

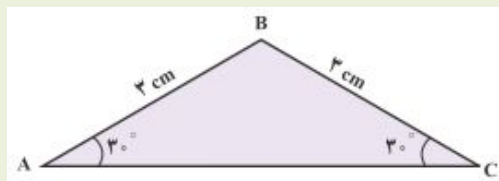
\*\*\*

تمرین برای حل :

۲۰: مساحت مثلث  $ABC$  در شکل زیر را به دست آورید.  $(\sin(75^\circ) = 0.96)$



۲۱: مساحت مثلث  $ABC$  در شکل زیر را به دست آورید.



۲۲: یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع  $a$  ، را در نظر بگیرید.

الف : ثابت کنید مساحت این مثلث برابر  $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$  است.

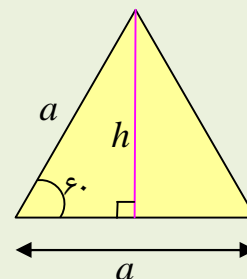
ب : ثابت کنید که اندازه‌ی ارتفاع مثلث برابر  $\frac{\sqrt{3}}{2} a$  است.

حل :

الف :

$$S = \frac{1}{2}(a)(a)\sin(60^\circ) = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$S = \frac{1}{2}ah \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{1}{2}ah \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



ب :

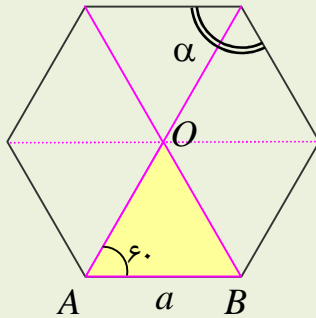
۲۳: مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را حساب کنید که اندازه‌ی هر ضلع آن ۱۰ سانتی متر باشد.

۲۴ : مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع  $a$  را حساب کنید.

حل : ابتدا اندازه‌ی هر زاویه‌ی شش ضلعی منتظم را تعیین می‌کنیم.

$$\alpha = \frac{(n-2) \times 180}{n} = \frac{(6-2) \times 180}{6} = 120^\circ$$

از طرفی واضح است که بزرگترین قطر هر شش ضلعی منتظم محور تقارن است. لذا بزرگترین قطر، نیمساز



زاویه‌های نظیر آن است. پس با توجه به شکل زیر مثلث  $OAB$  دو زاویه‌ی

$60^\circ$  دارد، پس زاویه‌ی  $\alpha$  نیز  $60^\circ$  درجه می‌باشد. چون مثلث

$OAB$  سه زاویه‌ی مساوی دارد، در نتیجه متساوی الاضلاع است.

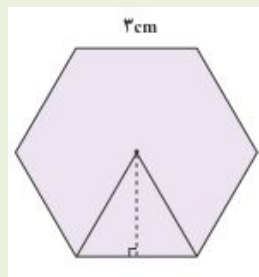
از این موضوع نتیجه می‌شود که هر شش ضلعی منتظم توسط قطرهای

بزرگ آن به شش مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع  $a$  تبدیل می‌شود.

بنابراین مساحت آن شش برابر مساحت یک مثلث می‌باشد.

$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

۲۵ : مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



\*\*\*



نتیجه :

الف : مساحت مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع  $a$ ، برابر  $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$  است.

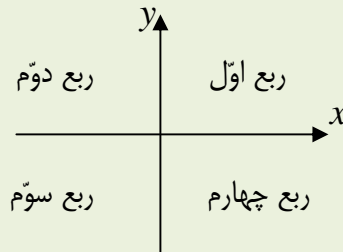
ب : مساحت شش ضلعی منتظم به طول ضلع  $a$ ، برابر  $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$  است.

## درس دوم : دایره ی مثلثاتی

در ادامه ی بحث مثلثات به معرفی نسبت های مثلثاتی در دایره ی مثلثاتی می پردازیم.

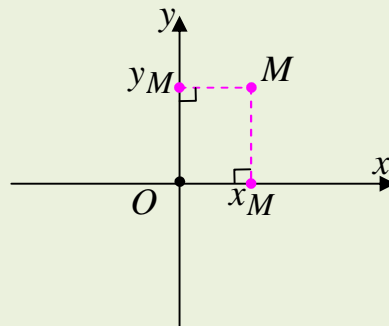
## قسمت اول : رابطه ی بین مختصات نقطه و نسبت های مثلثاتی

به یاد دارید که صفحه ی محور های مختصات از دو محور عمود بر هم تشکیل می شود. محور افقی را محور طول ها و محور قائم را محور عرض ها می نامند. این دو محور صفحه را به چهار قسمت تبدیل می کنند، هر یک از این قسمت ها را یک ناحیه یا ربع می نامند. طبق قرار داد، ربعی که در آن طول و عرض هر دو مثبت باشند را ربع اول می گویند و بقیه ی ربع ها را نیز برخلاف حرکت عقربه های ساعت نامگذاری می کنند. در شکل زیر این چهار ناحیه را می توان مطابق شکل زیر مشاهده کرد.



بدیهی است که هر نقطه روی صفحه، مانند  $M$  با دو عدد حقیقی مشخص می شود. تصویر نقطه ی  $M$  روی محور طول ها را طول  $(x_M)$  و تصویر نقطه ی  $M$  روی محور عرض ها را عرض  $(y_M)$  می نامند.

$$M = \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad M \begin{vmatrix} x_M \\ y_M \end{vmatrix} \quad \text{یا} \quad M(x_M, y_M)$$



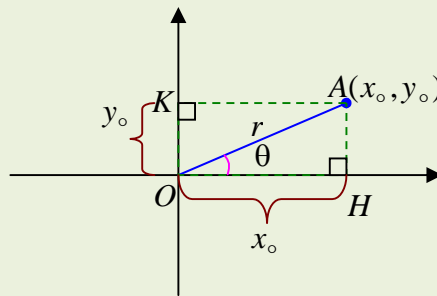
طول و عرض نقطه را **مختصات نقطه** می نامند. واضح است که :

الف : هر نقطه که روی محور طول ها قرار دارد، عرض آن صفر است و برعکس

ب : هر نقطه که روی محور عرض ها قرار دارد، طول آن صفر است و برعکس

ج : نقطه ی تقاطع دو محور که مبدأ مختصات نام دارد، طول و عرض آن صفر است.

با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی روی مثلث قائم الزاویه می توان تعریف می توان روابط زیر را نوشت.



با توجه به مثلث  $OAH$  داریم.

$$\sin \theta = \frac{AH}{OA} \rightarrow \sin \theta = \frac{y_0}{r} \qquad \cos \theta = \frac{OH}{OA} \rightarrow \cos \theta = \frac{x_0}{r}$$

$$\cot \theta = \frac{OH}{AH} \rightarrow \cot \theta = \frac{x_0}{y_0} \qquad \tan \theta = \frac{AH}{OH} \rightarrow \tan \theta = \frac{y_0}{x_0}$$

همچنین :

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2$$

**تمرین ۱:** اگر  $A(3,4)$  نسبت های مثلثاتی زاویه ای که پاره خط  $OA$  با محور طول ها در جهت مثبت

می سازد را بدست آورید.

حل :

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2 \rightarrow r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\sin \theta = \frac{y_0}{r} = \frac{4}{5} \qquad \text{و} \qquad \cos \theta = \frac{x_0}{r} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{y_0}{x_0} = \frac{4}{3} \qquad \text{و} \qquad \cot \theta = \frac{x_0}{y_0} = \frac{3}{4}$$

**تمرین برای حل :**

**۲:** اگر  $A(-6,8)$  نسبت های مثلثاتی زاویه ای که پاره خط  $OA$  با محور طول ها در جهت مثبت می سازد

را بدست آورید.

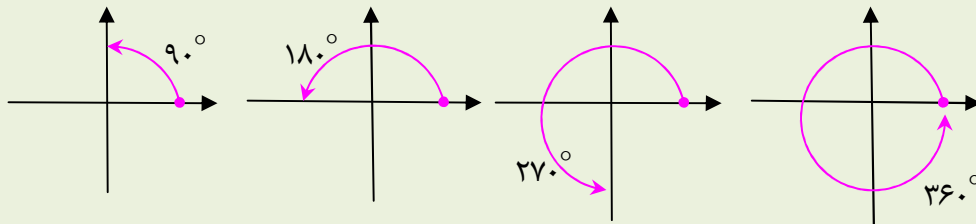
**۳:** اگر  $A(-4,-3)$  نسبت های مثلثاتی زاویه ای که پاره خط  $OA$  با محور طول ها در جهت مثبت می

سازد را بدست آورید.

\*\*\*

قسمت دوم: محاسبه‌ی نسبت های مثلثاتی زاویه های مرزی

در ادامه می خواهیم نسبت های مثلثاتی زاویه های صفر درجه ، ۹۰ ، ۱۸۰ ، ۲۷۰ و ۳۶۰ درجه را محاسبه کنیم. برای نمایش این زاویه ها یک ضلع زاویه را روی قسمت مثبت محور طول ها قرار می دهیم و ضلع دیگر را به اندازه ی زاویه در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت حرکت می دهیم.



چون ضلع دوم این زاویه ها بر یکی از محور های مختصات منطبق هستند، آنها را زاویه های مرزی می نامند.

الف: اگر نقطه ای روی محور طول ها منطبق باشد. عرض آن برابر صفر است و زاویه ای که پاره خط واصل آن تا مبدأ مختصات با محور طول ها زاویه‌ی صفر یا ۱۸۰ درجه می سازد.

$\angle\theta = 0^\circ$ و $x_o = r$ $\sin\theta = \frac{y_o}{r} = \frac{0}{r} = 0$ $\cos\theta = \frac{x_o}{r} = \frac{r}{r} = 1$ $\tan\theta = \frac{y_o}{x_o} = \frac{0}{r} = 0$ $\cot\theta = \frac{x_o}{y_o} = \frac{x_o}{0} = \text{نامعین}$	$\angle\theta = 180^\circ$ و $x_o = -r$ $\sin\theta = \frac{y_o}{r} = \frac{0}{r} = 0$ $\cos\theta = \frac{x_o}{r} = \frac{-r}{r} = -1$ $\tan\theta = \frac{y_o}{x_o} = \frac{0}{r} = 0$ $\cot\theta = \frac{x_o}{y_o} = \frac{x_o}{0} = \text{نامعین}$
--	---

توجه به همین شکل برای حالتی که  $\angle\theta = 360^\circ$  می توان نتایج مشابه حالت صفر درجه را بدست آورد.

ب: اگر نقطه ای روی محور عرض ها منطبق باشد. طول آن برابر صفر است و زاویه ای که پاره خط واصل آن تا مبدأ مختصات با محور طول ها زاویه ی ۹۰ یا ۲۷۰ درجه می سازد.

$\angle\theta = 90^\circ$ و $y_o = r$ $\sin\theta = \frac{y_o}{r} = \frac{r}{r} = 1$ $\cos\theta = \frac{x_o}{r} = \frac{0}{r} = 0$ $\tan\theta = \frac{y_o}{x_o} = \frac{r}{0} = \text{نامعین}$ $\cot\theta = \frac{x_o}{y_o} = \frac{0}{r} = 0$	$\angle\theta = 270^\circ$ و $y_o = -r$ $\sin\theta = \frac{y_o}{r} = \frac{-r}{r} = -1$ $\cos\theta = \frac{x_o}{r} = \frac{0}{r} = 0$ $\tan\theta = \frac{y_o}{x_o} = \frac{-r}{0} = \text{نامعین}$ $\cot\theta = \frac{x_o}{y_o} = \frac{0}{-r} = 0$
---	---

بر این اساس مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های مهم را می توان به صورت جداول زیر تنظیم نمود.

جدول الف) مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های مهم

اندازه ی زاویه بر حسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	نامعین
cot	نامعین	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰

جدول ب) مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های مرزی

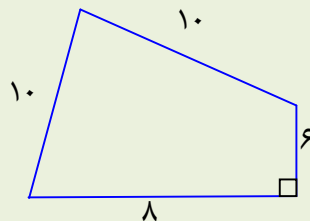
اندازه ی زاویه برحسب درجه	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin	۰	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	نامعین	۰	نامعین	۰
cot	نامعین	۰	نامعین	۰	نامعین

\*\*\*

**تمرین ۴:** مساحت مثلثی را حساب کنید که اندازه ی اضلاع آن ۸ و ۶ سانتی متر و زاویه ی بین آنها ۶۰ درجه باشد.

**تمرین برای حل:**

**۵:** مساحت شکل مقابل را حساب کنید.



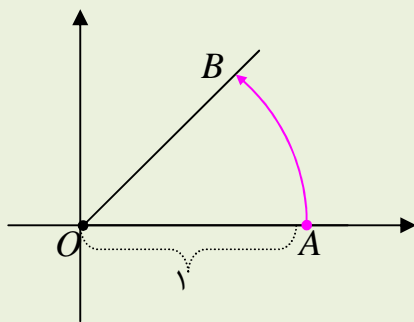
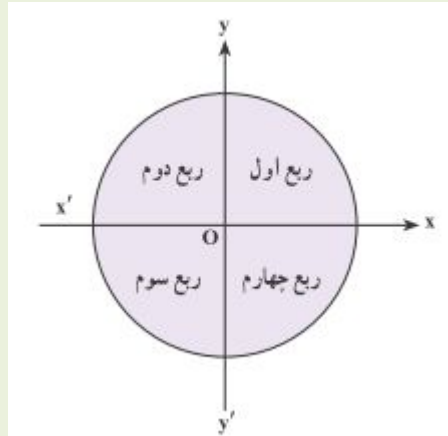
**۶:** مساحت متوازی الاضلاعی را حساب کنید که اندازه ی دو ضلع آن  $7\sqrt{3}$  و ۸ سانتی متر و زاویه ی بین آنها ۱۲۰ درجه است.

\*\*\*



### قسمت سوم : دایره‌ی مثلثاتی

دایره‌ی مثلثاتی، دایره‌ای است که مرکز آن مبدأ مختصات و اندازه‌ی شعاع آن یک واحد طول باشد، را دایره‌ی مثلثاتی یا دایره‌ی استاندارد می‌نامند.



در هر دایره‌ی مثلثاتی برای تشکیل زاویه، نقطه‌ی  $A(1,0)$  را مبدأ حرکت در نظر می‌گیرند. حال اگر نقطه‌ی  $A$  را حول مرکز دایره دوران دهیم تا نقطه‌ی  $B$  بدست آید، در این صورت زاویه‌ی  $AOB$  حاصل می‌شود.

تذکر :

۱ : اگر دوران در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، زاویه را مثبت و اگر در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، زاویه را منفی در نظر می‌گیرند.

۲ : اگر نقطه‌ی  $A$  دوران داده نشود، زاویه صفر می‌باشد. اگر نقطه‌ی  $A$  را به اندازه‌ی یک دور کامل دوران دهیم به محل اولیه‌ی خود بر می‌گردد. یک دوران کامل زاویه‌ای برابر  $360^\circ$  درجه تشکیل می‌دهد.

**تمرین ۷ :** زاویه‌های  $75^\circ$  و  $135^\circ$  و  $-120^\circ$  و  $225^\circ$  را روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص کنید.

\*\*\*

اکنون می توان نسبت های مثلثاتی را روی دایره ی مثلثاتی نیز تعریف کرد.

اگر نقطه ی  $A(x_0, y_0)$  روی دایره ی استاندارد قرار گیرد. در این حالت می توان نوشت:

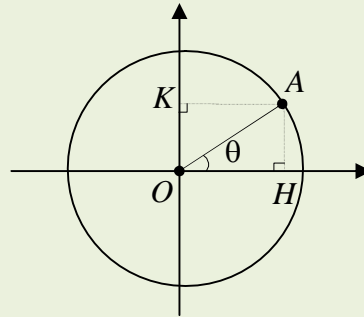
$$OA = r = ۱$$

$$\sin \theta = \frac{y_0}{r} = \frac{y_0}{۱} = y_0$$

$$\cos \theta = \frac{x_0}{r} = \frac{x_0}{۱} = x_0$$

$$\tan \theta = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{x_0}{y_0} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$



همچنین با توجه به رابطه ی فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه ی  $OAH$  می توان نوشت:

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2 \rightarrow \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = ۱$$

به همین جهت است که محور طول ها را محور کسینوس ها و محور عرض ها را محور سینوس ها می نامند.

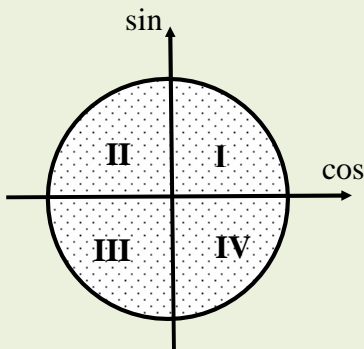
### علامت نسبت های مثلثاتی

گاهی لازم می شود، که علامت نسبت های مثلثاتی را در نواحی

متخلف را داشته باشیم. با توجه به تعریف قبل می توان جدول زیر را

برای تشخیص علامت نسبت های مثلثاتی در دایره ی مثلثاتی تنظیم

نمود.<sup>۱</sup>



	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

<sup>۱</sup>. برخی برای حفظ کردن علامت های جدول، به ترتیب نواحی و فقط برای خانه های مثبت نسبت های سینوس، کسینوس و تانژانت، از حروف کلمه ی **هستک** استفاده می کنند.

همچنین با توجه به تعاریف فوق واضح است که سینوس و کسینوس هر زاویه، عددی است که در فاصله‌ی  $[-۱, ۱]$  قرار می‌گیرد.

$$-۱ \leq \sin \theta \leq ۱ \quad \text{و} \quad -۱ \leq \cos \theta \leq ۱$$

**تمرین ۸:** اگر یک ضلع زاویه‌ی  $\theta$  در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد و  $\sin \theta = \frac{4}{5}$  باشد. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

**تمرین ۹:** اگر یک ضلع زاویه‌ی  $\theta$  در ربع سوم دایره‌ی مثلثاتی باشد و  $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  باشد. سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

\*\*\*

**تمرین برای حل :**

**۱۰:** اگر  $\cos \theta = -\frac{2}{5}$  آنگاه در مورد ناحیه‌ی  $\theta$  که انتهای ضلع زاویه‌ی  $\theta$  در آن قرار دارد، بحث کنید.

**۱۱:** زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

**۱۲:** حدود زاویه‌ی  $\theta$  را طوری تعیین کنید که  $\tan \theta < 0$  و  $\sin \theta > 0$  باشد.

**۱۳:** اگر  $\sin \theta$  و  $\tan \theta$  هم علامت باشند، آنگاه  $\theta$  در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار دارد؟

**۱۴:** در کدام ربع از دایره‌ی مثلثاتی  $\cos \theta \cdot \cot \theta > 0$  است؟

**۱۵:** اگر  $\sin \theta = m + 3$  باشد. حدود  $m$  را تعیین کنید.

**۱۶:** اگر  $\cos \alpha = 2m - 5$  باشد. حدود  $m$  را تعیین کنید.

**۱۷:** بیشترین و کمترین مقدار عبارت  $A = \frac{3 - 5 \cos x}{2}$  را به دست آورید.

**۱۸:** اگر  $\sin x + \cos y = 2$ ، آنگاه ثابت کنید که  $\sin x = \cos y = 1$

\*\*\*

قسمت چهارم: رابطه ی شیب خط و تانژانت زاویه

در سال گذشته به معادله ی خط و مفهوم شیب خط آشنا شده اید. می دانید که اگر  $m$  شیب خط گذرا از نقطه ی  $A(x_0, y_0)$  باشد، معادله ی خط به صورت زیر است.

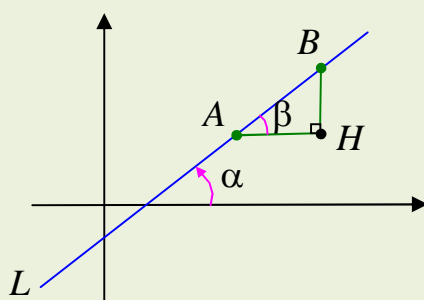
$$y = m(x - x_0) + y_0$$

همچنین اگر دو نقطه ی  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  دو نقطه ی دلخواه از یک خط باشند، شیب آن خط به صورت است.

$$m = \frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**تمرین ۱۹:** معادله ی خطی را بنویسید که از دو نقطه ی  $A(3, 5)$  و  $B(1, -3)$  بگذرد.

بنابر تعریف شیب خط و با در نظر گرفتن تعریف تانژانت یک زاویه ، واضح است که شیب یک خط با تانژانت زاویه ای که آن خط با محور طولها در جهت مثبت می سازد، برابر می باشد. به شکل زیر توجه کنید.



$$\angle \alpha = \angle \beta$$

$$\rightarrow \tan \alpha = \tan \beta$$

$$m = \frac{BH}{AH} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan \beta \rightarrow m = \tan \alpha$$

**تمرین ۲۰:** معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی  $A(1, 3)$  بگذرد و با محور طول ها در جهت مثبت زاویه ی  $30^\circ$  درجه تشکیل دهد.

**تمرین ۲۱:** معادله ی خطی را بنویسید که از نقطه ی  $(2, 3)$  بگذرد و با محور طول ها در جهت مثبت زاویه ی  $45^\circ$  درجه بسازد.

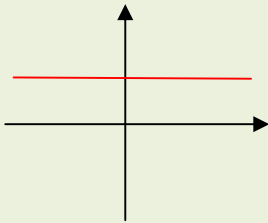
**تمرین ۲۲:** دو نقطه ی  $A(2, \sqrt{3})$  و  $B(0, -\sqrt{3})$  داده شده اند. اندازه ی زاویه ای که خط  $AB$  با محور طول ها در جهت مثبت را بیابید.

**توجه:** اگر  $m$  شیب خط و  $n$  عرض مبدأ آن باشد، معادله ی خط در حالت کلی به صورت زیر است.

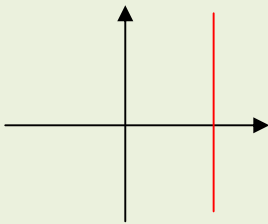
$$y = mx + n$$

نتیجه :

الف : شیب هر خط موازی محور طول ها برابر صفر است. (چرا؟)

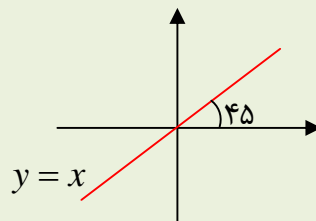


ب : شیب هر خط موازی محور عرض ها نامعین است. (چرا؟)



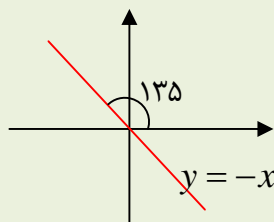
ج : معادله‌ی خط نیمساز ربع اول و سوم به صورت  $y = x$  می باشد. بنابراین شیب نیمساز ربع اول و سوم

برابر ۱ است.



د : معادله‌ی خط نیمساز ربع دوم و چهارم به صورت  $y = -x$  می باشد. بنابراین شیب نیمساز ربع دوم و

چهارم برابر -۱ است.



نتیجه: چون خط نیمساز ربع دوم و چهارم با جهت مثبت محور طول ها زاویه‌ی ۱۳۵ درجه می سازد. بنابراین:

$$\tan 135^\circ = -1$$

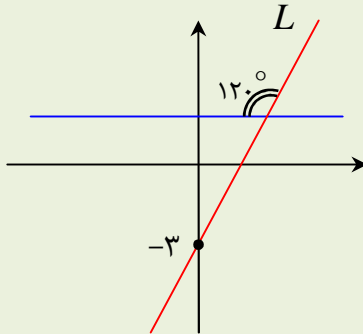
**تمرین ۲۳:** معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی  $A(-2, 3)$  می گذرد و با جهت مثبت محور طول ها

زاویه‌ی ۱۳۵ درجه می سازد.

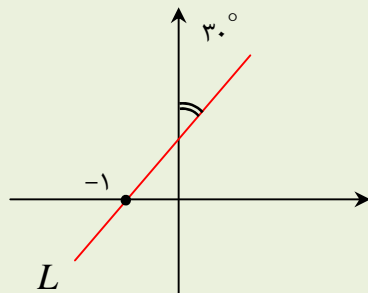
\*\*\*

تمرین برای حل :

۲۴ : با توجه به شکل مقابل، معادله ی خط  $L$  را بدست آورید.



۲۵ : با توجه به شکل مقابل، معادله ی خط  $L$  را بدست آورید.



**توجه :** اگر معادله ی خطی به صورت  $ax + by + c = 0$  باشد. شیب خط به شکل زیر است.

$$m = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{b}$$

۲۶ : زاویه ای که خط  $\sqrt{3}x - 3y + 1 = 0$  با جهت مثبت محور طول ها می سازد را تعیین کنید.

۲۷ : خط  $kx + (2k - 1)y + 2 = 0$  داده شده است. مقدار  $k$  را به قسمی تعیین کنید که این خط با

جهت مثبت محور طول ها زاویه ی  $135^\circ$  درجه بسازد.

\*\*\*

## تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

## درس سوم: روابط بین نسبت های مثلثاتی

در ادامه به بررسی و شناخت روابط بین نسبت های مثلثاتی یک زاویه می پردازیم.

## قسمت اول: روابط بین نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

پیش از این نسبت های مثلثاتی را در مثلث قائم الزاویه تعریف کردیم. بین این نسبت های مثلثاتی هر مثلث قائم الزاویه روابط مهم و کاربردی وجود دارد. برخی از این روابط برای زاویه ی حاده ی  $\theta$  در هر مثلث قائم الزاویه به شرح زیر هستند.

$$۱) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = ۱$$

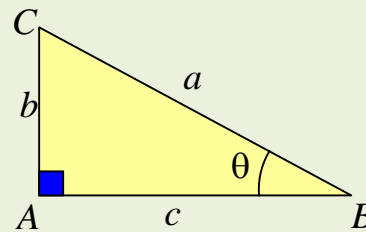
$$۲) \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$۳) \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$۴) ۱ + \tan^2 \theta = \frac{۱}{\cos^2 \theta}$$

$$۵) ۱ + \cot^2 \theta = \frac{۱}{\sin^2 \theta}$$

$$۶) \tan \theta \cdot \cot \theta = ۱$$



اثبات هر یک از این روابط به ترتیب زیر است.

اثبات ۱:

$$\sin \theta = \frac{b}{a}$$

$$\cos \theta = \frac{c}{a}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = ۱$$

اثبات ۲:

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{a \cdot b}{a \cdot c} = \frac{b}{c} = \tan \theta$$

اثبات ۳ :

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{a \cdot c}{a \cdot b} = \frac{c}{b} = \cot \theta$$

اثبات ۴ :

$$1 + \tan^2 \theta = 1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 + \frac{b^2}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos \theta}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

اثبات ۵ :

$$1 + \cot^2 \theta = 1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = 1 + \frac{c^2}{b^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin \theta}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

اثبات ۶ :

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = \left(\frac{b}{c}\right) \left(\frac{c}{b}\right) = 1$$

\*\*\*

**تمرین ۱ :** ثابت کنید که سینوس و کسینوس هر زاویه ی حاده از یک مثلث قائم الزاویه ، همواره از یک

کوچکترند.

**حل :** می دانیم که در هر مثلث قائم الزاویه هر ضلع زاویه ی قائمه از وتر کوچکتر است. لذا :

$$AC < BC \rightarrow \frac{AC}{BC} < 1 \rightarrow \sin \theta < 1$$

$$AB < BC \rightarrow \frac{AB}{BC} < 1 \rightarrow \cos \theta < 1$$

**تمرین ۲ :** در مثلث  $ABC$  که در آن  $\angle A = 90^\circ$  ، ثابت کنید:  $\frac{\cos^2 B + \sin^2 C}{1 - \sin^2 C} = 2 \tan^2 C$

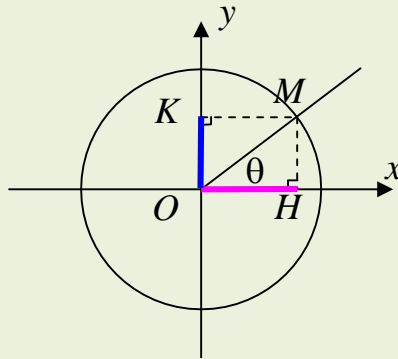


قسمت دوم : اتحاد های مثلثاتی

برای درک بهتر اتحادهای مثلثاتی و تعمیم روابط موجود در مثلث قائم الزاویه ، به تمام زاویه ها ، ابتدا مجدداً نسبت های مثلثاتی را در دایره ی مثلثاتی تعریف می کنیم.

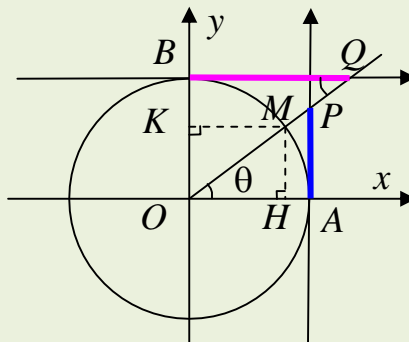
در هر دایره ی مثلثاتی نسبت های مثلثاتی هر زاویه مانند  $\theta$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$\sin\theta = OK \quad \text{و} \quad \cos\theta = OH$$



حال اگر دو محور دیگر به دستگاه فوق مطابق شکل اضافه کنیم. خواهیم داشت.

$$\tan\theta = AP \quad \text{و} \quad \cot\theta = BQ$$



دلیل این تعریف به صورت زیر است.

چون دو مثلث  $OMH$  و  $OAP$  به حالت تساوی دو زاویه متشابهند، بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{MH}{OH} = \frac{AP}{OA} \xrightarrow{OA=1} \frac{MH}{OH} = AP$$

از طرفی در  $OMH$  می توان نوشت :

$$\tan\theta = \frac{MH}{OH}$$

و لذا :

$$\tan\theta = AP$$

همچنین چون دو مثلث  $OMH$  و  $OBQ$  به حالت تساوی دو زاویه متشابهند، بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{OH}{MH} = \frac{BQ}{OB} \xrightarrow{OB=1} \frac{OH}{MH} = BQ$$

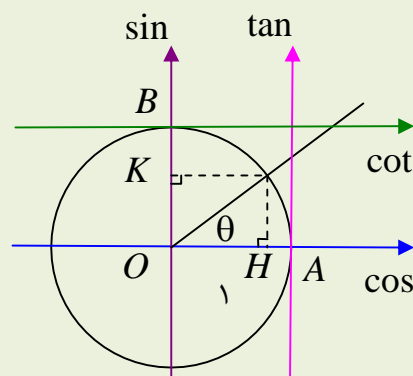
از طرفی در  $OMH$  می توان نوشت :

$$\cot\theta = \frac{OH}{MH}$$

و لذا :

$$\cot\theta = BQ$$

با توجه به این تعاریف است که نام محور ها را می توان به صورت زیر نیز در نظر گرفت.



**تمرین ۳:** زاویه ی ۶۰ درجه را در دایره ی مثلثاتی مشخص و نسبت های مثلثاتی آن را روی شکل نشان

دهید.

**تمرین ۴:** زاویه ی ۱۲۰ درجه را در دایره ی مثلثاتی مشخص و نسبت های مثلثاتی آن را روی شکل نشان

دهید.

**تمرین ۵:** نسبت های مثلثاتی زاویه ی ۱۳۵ درجه را به کمک دایره ی مثلثاتی تعیین کنید.

**تمرین برای حل :**

**۶:** زاویه ی ۳۰۰ درجه را در دایره ی مثلثاتی مشخص و نسبت های مثلثاتی آن را روی شکل نشان دهید.

**۷:** زاویه ی ۲۱۰ درجه را در دایره ی مثلثاتی مشخص و نسبت های مثلثاتی آن را روی شکل نشان دهید.

\*\*\*

### اتحاد های بنیادی مثلثات

با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در دایره ی مثلثاتی ، می توان اتحاد های زیر را که تعمیم روابط موجود در مثلث قائم الزاویه می باشند را بیان نمود.

۱. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	۳. $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	۵. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
۲. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	۴. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	۶. $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

**نتیجه :** اگر  $\alpha$  یک زاویه ی دلخواه باشد. در این صورت:

الف)  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

ب)  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

ج)  $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$

د)  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

**تمرین ۸:** اگر  $\tan \theta = 3$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{3 \sin \theta + 4 \cos \theta}{4 \cos \theta - 3 \sin \theta}$  را به دست آورید.

**تمرین ۹:** اگر  $\sin \theta = \frac{2}{3}$  و زاویه ی  $\theta$  در ربع دوّم قرار دارد. در این صورت سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

**تمرین ۱۰:** اگر  $\sin x = -\frac{3}{4}$  و  $270^\circ < x < 360^\circ$  ، آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

**تمرین ۱۱:** اگر  $\tan \theta + \cot \theta = 5$  و زاویه ی  $\theta$  در ربع اوّل دایره ی مثلثاتی قرار داشته باشد. حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف)  $A = \sin \theta \times \cos \theta$

ب)  $B = \sin \theta + \cos \theta$

**تمرین ۱۲:** حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2$$

تمرین ۱۳: با فرض بامعنی بودن هر کسر، تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

تمرین ۱۴: با فرض بامعنی بودن هر کسر، تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \tan\alpha\right)(1 - \sin\alpha) = \cos\alpha$$

تمرین ۱۵: تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$$

تمرین ۱۶: با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف)  $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$

ب)  $\tan\alpha = \frac{1 + \tan\alpha}{1 + \cot\alpha}$

ج)  $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$

د)  $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

ه)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

\*\*\*

تمرین برای حل :

۱۷: اگر  $\sin\theta = -\frac{4}{5}$  و انتهای ضلع زاویه ی  $\theta$  در ربع سوم قرار دارد. در این صورت سایر نسبت های

مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

۱۸: اگر  $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$  باشد، آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی زاویه ی  $24^\circ$  درجه را تعیین کنید.

۱۹: اگر  $\sin\alpha \cos\alpha = \frac{2}{5}$  باشد، حاصل عبارت  $\sin\alpha + \cos\alpha$  را محاسبه کنید.

۲۰: درستی هر یک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

$$۱) \tan \alpha + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$۲) \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{2}{\sin \theta}$$

$$۳) \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{1 - \sin^2 x} = \tan^2 x$$

$$۴) \tan x - \cot x = (\sin x - \cos x) \left( \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right)$$

\*\*\*

## تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان