

# ریاضی ۲

پایه می یازدهم « رشته می علوم تجربی »

**فصل ۲ : هندسه**

**تهیه کننده : جابر عامری**

**تهیه کننده : جابر عامری**

**عضو گروه ریاضی دوره دوّم متوسطه**

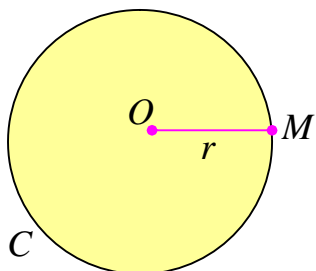
**استان خوزستان**

**مهر ۱۳۹۹**

## درس اول: ترسیم های هندسی

آشنایی با مفاهیم هندسی برای یادگیری و درک عمیق دیگر مفاهیم ریاضیات موثر است. در این فصل، برخی از مفاهیم مقدماتی هندسه بررسی می کنیم.

### قسمت اول: دایره



دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به یک فاصله باشند. نقطه ثابت را مرکز و فاصله ثابت را شعاع می نامند. دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $r$  را به صورت  $C(O, r)$  نمایش می دهند.

### تمرین ۱: دایره ای شعاع ۲ سانتی رسم کنید. سپس

- الف: نقطه ای تعیین کنید که فاصله آن تا مرکز دایره ۳ سانتی متر باشد.  
ب: نقطه ای تعیین کنید که فاصله آن تا مرکز دایره  $1/5$  سانتی متر باشد.  
ج: نقطه ای تعیین کنید که فاصله آن تا مرکز دایره ۲ سانتی متر باشد.

**نتیجه:** هر دایره صفحه را به سه بخش مجزا تقسیم می کند.

الف: نقاط خارج دایره: فاصله این نقاط تا مرکز دایره از شعاع بزرگتر

$$\text{است. } (OA > r)$$

ب: نقاط روی دایره: فاصله این نقاط تا مرکز دایره برابر شعاع است.

$$(OB = r)$$

ج: نقاط داخل دایره: فاصله این نقاط تا مرکز دایره از شعاع کوچکتر

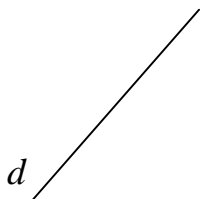
$$\text{است. } (OC < r)$$

### تمرین برای حل:

**۲:** خط  $d$  در شکل مقابل را در نظر بگیرید. تمام نقاطی که به فاصله ۲

سانتی متر از خط  $d$  هستند را مشخص کنید. این نقاط چه شکلی یا شکل

هایی را تشکیل می دهند؟



۳: نقطه‌ی  $P$  به فاصله‌ی ۱ سانتی متر از خط  $d$  قرار دارد.

الف: تمام نقاطی که به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از نقطه‌ی  $P$  هستند را مشخص کنید.

ب: تمام نقاطی از خط  $d$  را که به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از  $P$  هستند را تعیین کنید.

۴: پاره خط  $AB$  به طول ۵ سانتی متر در نظر بگیرید. سپس نقاطی را تعیین کنید که از  $A$  به فاصله‌ی ۴

سانتی متر و از  $B$  به فاصله‌ی ۵ سانتی متر باشند. (مسئله چند جواب دارد؟)

۵: مثلی رسم کنید که طول اضلاع آن ۴ و ۵ و ۷ سانتی متر باشند.

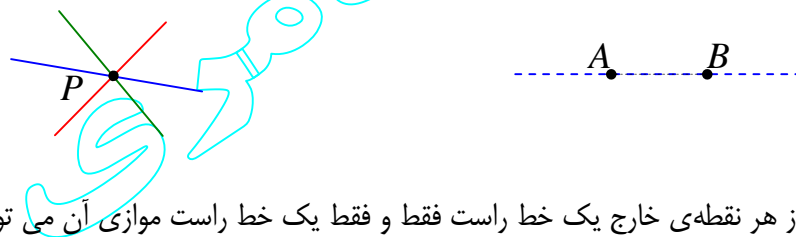
\*\*\*

### قسمت دوم: مفهوم اصل:

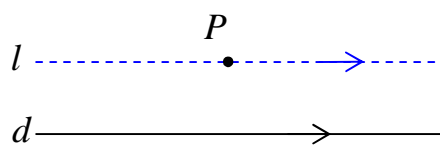
هر واقعیت که بدیهی بوده و نیازمند استدلال نباشد را اصل می نامند. برای مثال به اصول زیر توجه کنید.

اصل ۱: از یک نقطه روی صفحه، چند خط می گذرد.

اصل ۲: از هر دو نقطه‌ی متمایز روی صفحه فقط و فقط یک خط راست می گذرد.



اصل ۳: از هر نقطه‌ی خارج یک خط راست فقط و فقط یک خط موازی آن می توان رسم کرد<sup>۱</sup>.

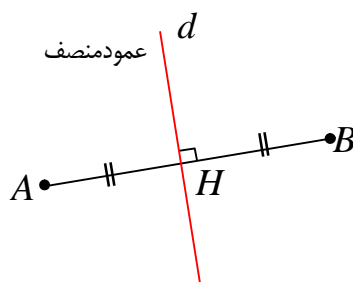


\*\*\*

### قسمت سوم: عمود منصف پاره خط و خواص آن

هر خط که هم از نقطه‌ی وسط یک پاره خط بگذرد و هم عمود بر آن

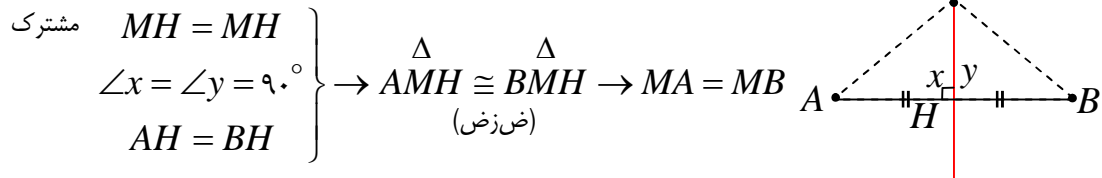
باشد را عمود منصف آن پاره خط می نامند.



<sup>۱</sup>. اصل توازی اقلیدس

**تمرین ۶:** ثابت کنید که هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط قرار دارد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

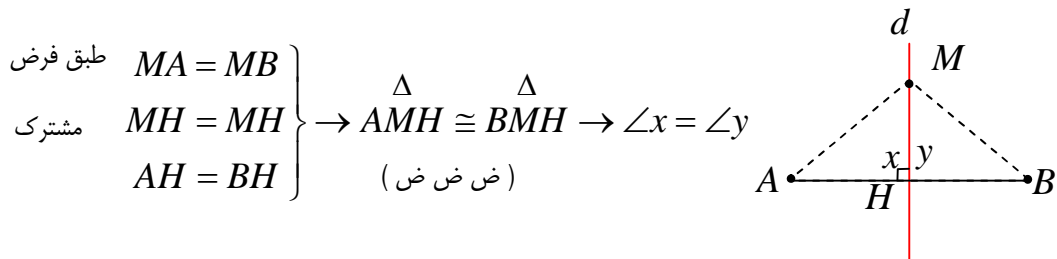
اثبات:



\*\*\*

**تمرین ۷:** اگر نقطه ای از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، آن نقطه روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.

اثبات: از نقطه ی  $M$  خطی چنان رسم می کنیم که از نقطه ی وسط پاره خط  $AB$  بگذرد. پس:



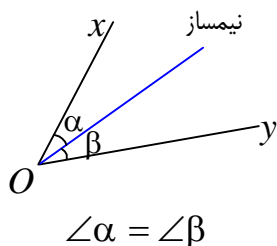
از طرفی طبق اصل زاویه ی نیم صفحه، واضح است که  $\angle x + \angle y = 180^\circ$  پس:

$$\angle x = \angle y = 90^\circ \rightarrow d \perp AB$$

و چون  $d \perp AB$  و  $AH = BH$  پس  $d$  عمود منصف  $AB$  است.

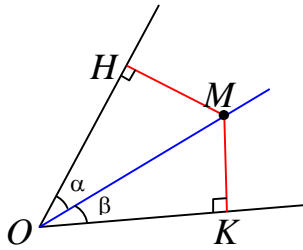
\*\*\*

### قسمت چهارم: نیمساز زاویه



تعریف: نیمساز زاویه خطی است که از رأس زاویه می گذرد و آن را به دو زاویه ی مساوی تقسیم می کند.

**تمرین ۸:** هرگاه نقطه‌ای از دو ضلع زاویه‌ای به یک فاصله باشد آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.



فرض :  $MH = MK$

حکم :  $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

اثبات : دو مثلث  $OMH$  و  $OMK$  قائم‌الزاویه هستند پس

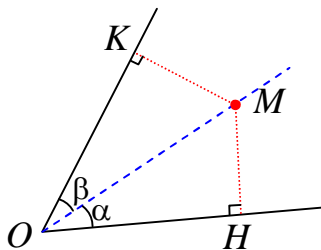
$$\left. \begin{array}{l} MH = MK \\ \text{مشترک } OM = OM \end{array} \right\} \rightarrow \triangle OMH \cong \triangle OMK \rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

(وتر و یک ضلع)

**تمرین ۹:** هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

حکم :  $MK = MH$

اثبات : دو مثلث  $\triangle OHM$  و  $\triangle OKM$  قائم‌الزاویه هستند. پس :

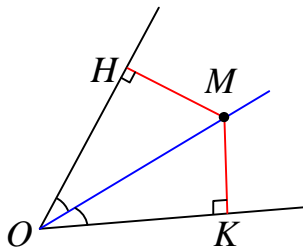


$$\left. \begin{array}{l} \angle \alpha = \angle \beta \\ \text{وتر مشترک } OM = OM \end{array} \right\} \rightarrow \triangle OHM \cong \triangle OKM \rightarrow MH = MK$$

(وتر و یک زاویه ی حاده)

**تمرین ۱۰:** در شکل مقابل، نقطه‌ی  $M$  روی نیمساز زاویه قرار دارد.

اگر  $MH = m^2 - ۱$  و  $MK = ۳۵$  مقدار  $m$  را تعیین کنید.

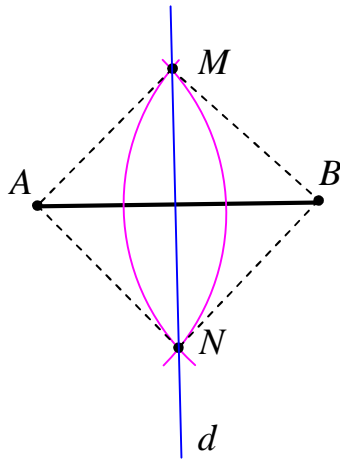


\*\*\*

## قسمت پنجم: آشنایی با چند ترسیم هندسی

گاهی برای حل مسائل مختلف لازم است از ترسیم های هندسی استفاده شود. بدین معنی که در اینگونه مسائل شکل هایی را رسم می کنیم که دارای ویژگی معینی باشند و بعد از ترسیم و با استفاده از ویژگی های شکل به پاسخ مسئله می رسیم. توجه داشته باشیم که ابزارهای مورد استفاده در اینگونه مسائل فقط خط کش و پرگار<sup>۲</sup> می باشند. از خط کش برای رسم خط راست و از پرگار برای رسم دایره با شعاع معین استفاده می شود.

## ۱: روش رسم عمود منصف یک پاره خط

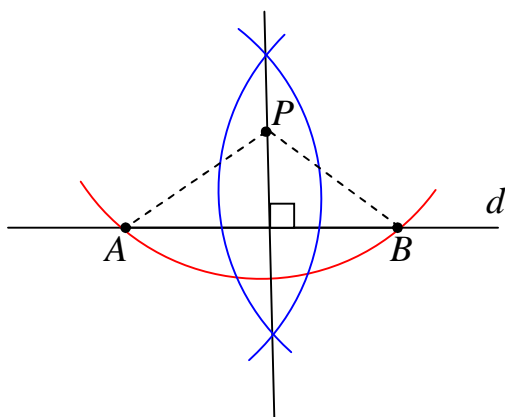


ابتدا پرگار را به اندازه ای باز می کنیم که شعاع آن از نصف طول پاره خط بیشتر باشد، سپس از دو سر پاره خط  $AB$  دو کمان با شعاع های مساوی رسم کرده تا این دو کمان همدیگر را در نقاط  $M$  و  $N$  قطع کنند. چون دو نقطه ی  $M$  و  $N$  از دو سر پاره خط  $AB$  به یک فاصله اند. پس روی عمود منصف  $AB$  قرار دارند. لذا خط گذرا از این دو نقطه یعنی  $d$  عمود منصف  $AB$  است.

**تمرین ۱۱:** ابتدا یک پاره خط به طول ۴ سانتی متر بکشید، سپس به کمک خط کش و پرگار عمود منصف آن را رسم کنید.

\*\*\*

## ۲: رسم خطی عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه ی خارج آن

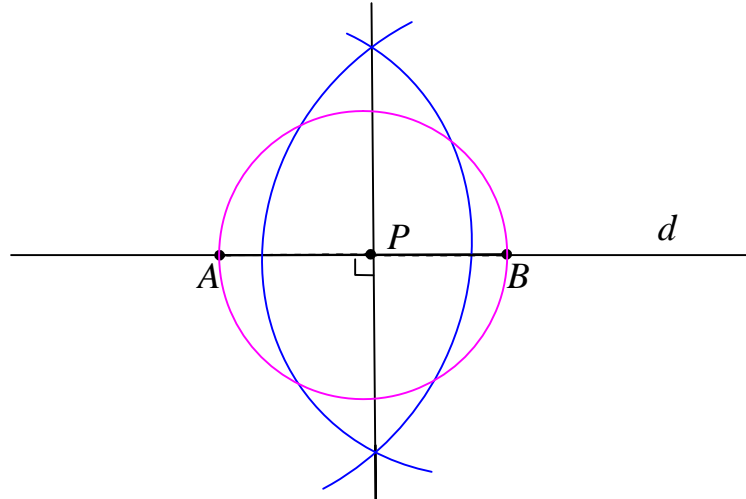


از نقطه ی  $P$  یک کمان را طوری رسم می کنیم که خط  $d$  را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع کند. اکنون عمود منصف پاره خط  $AB$  را رسم می کنیم که جواب مسئله است.

<sup>۲</sup>. خط کش غیر مدرج فرض می شود، مگر آنکه اندازه ی پاره خط قید شود.

۳: رسم خطی عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه‌ی روی آن

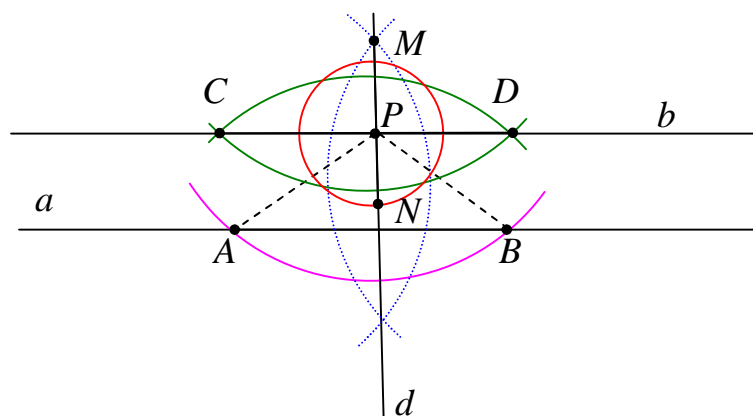
به مرکز نقطه‌ی  $P$  دایره‌ی ای رسم کرده تا خط  $d$  را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع کند. اکنون عمود منصف پاره خط  $AB$  را رسم می‌کنیم که جواب مسئله است.



\*\*\*

۴: رسم خط موازی یک خط داده شده از یک نقطه‌ی خارج آن

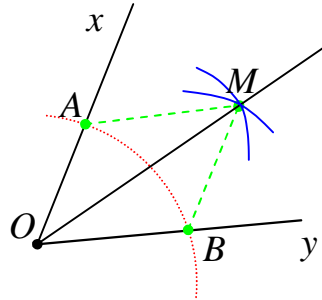
ابتدا از نقطه‌ی  $P$  واقع در خارج خط  $a$  یک خط مانند  $d$  عمود بر  $a$  رسم می‌کنیم. این خط از نقطه‌ی  $P$  می‌گذرد. اکنون از نقطه‌ی  $P$  واقع بر  $d$  خط  $b$  را عمود بر  $d$  رسم می‌کنیم. چون  $d \perp a$  و  $d \perp b$  پس  $a \parallel b$  و لذا  $b$  جواب مسئله است.



\*\*\*

۵: رسم نیمساز یک زاویه

از رأس زاویه ی  $xOy$  یک کمان را طوری رسم می کنیم که اضلاع زاویه را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع کند. اکنون از نقاط  $A$  و  $B$  دو کمان با شعاع مساوی رسم می کنیم که همدیگر را در نقطه ای مانند  $M$  قطع کنند. چون دو مثلث  $OAM$  و  $OBM$  به حالت (ض ض ض) همبسته هستند. لذا  $\angle AOM = \angle BOM$  یعنی  $OM$  نیمساز زاویه ی  $xOy$  می باشد و جواب مسئله است.

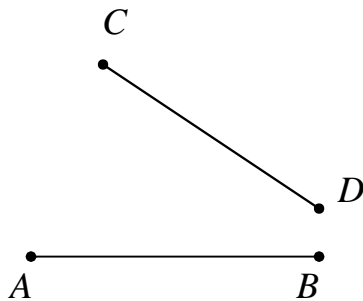


\*\*\*

تمرین برای حل :

۱۲: دو پاره خط  $AB$  و  $CD$  مطابق شکل مقابل داده شده اند.

نقطه ای بیابید که از دو نقطه ی  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از دو نقطه -  
ی  $C$  و  $D$  نیز به یک فاصله باشد.



۱۳: مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را  $ABC$  بنامید. عمود منصف

های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه ی برخورد آنها را  $O$  بنامید. به مرکز  $O$  و به شعاع  $OA$  یک دایره رسم کنید. نقاط  $B$  و  $C$  نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۱۴: مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را  $ABC$  بنامید. نیمسازهای دو زاویه ی این مثلث را رسم کنید و نقطه ی برخورد آنها را  $O$  بنامید. از نقطه ی  $O$  بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را  $H$  بنامید. به مرکز  $O$  و به شعاع  $OH$  دایره ای رسم کنید. اضلاع مثلث  $ABC$  نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



۱۵: فرض کنید نقطه‌ی  $P$  به فاصله‌ی ۴ سانتی متر از خط  $d$  باشد. در هر مورد روش رسم یک مثلث متساوی الساقین که نقطه‌ی  $P$  یک رأس باشد را توضیح دهید.

$d$

الف) قاعده‌ی این مثلث بر خط  $d$  منطبق باشد.

ب) قاعده‌ی این مثلث بر خط  $d$  منطبق بوده و طول ساق آن ۶ سانتی متر باشد.

ج) قاعده‌ی این مثلث بر خط  $d$  منطبق بوده و مساحت آن ۸ سانتی مترمربع باشد.

$P$  •

۱۶: سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست، در نظر بگیرید، سپس نقطه‌ی ای پیدا کنید که از این سه نقطه به یک فاصله باشد. (روش کار را توضیح دهید).

\*\*\*

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره دوم متوسطه

استان خوزستان

## درس دوم : مقدمات استدلال و قضیه ی تالس

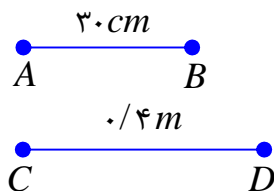
در این درس ابتدا با مفهوم نسبت و تناسب و همچنین استدلال و انواع آن آشنا می شویم. سپس با بیان ویژگی خطوط موازی و قضیه ی تالس و کاربردهای آن، این مفاهیم را به صورت دقیق بررسی می کنیم.

## قسمت اول : نسبت و تناسب

نسبت دو کمیت کسری است که صورت و مخرج آن اندازه های آن دو کمیت بر حسب یک واحد باشند.

مثلاً: کسر  $\frac{a}{b}$  را نسبت  $a$  بر  $b$  گویند هرگاه  $a$  و  $b$  بر حسب یک واحد باشند.

مثال : نسبت اندازه پاره خط  $AB$  بر پاره خط  $CD$  را با توجه به شکل مقابل بنویسید.



$$\frac{AB}{CD} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$$

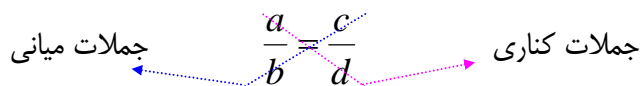
نتیجه : نسبت دو کمیت یک عدد حقیقی است و به واحد اندازه گیری آنها بستگی ندارد.

بیان تساوی دو نسبت را تناسب گویند.

مثلاً: تساوی دو نسبت  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{c}{d}$  ،  $b, d \neq 0$  را یک تناسب گویند.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

در یک تناسب مانند تناسب فوق جملات  $a$  و  $d$  را طرفین (جملات کناری) و  $b$  و  $c$  را وسطین (جملات میانی) می نامند.



## خاصیت اصلی تناسب

در هر تناسب حاصل ضرب دو جمله ی کناری با حاصل ضرب دو جمله ی میانی آن برابر است.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow ad = bc$$

اثبات : چون  $b, d \neq 0$  پس  $bd \neq 0$ . حال کافی است دو طرف تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  را در  $bd$  ضرب کنیم.

خواهیم داشت :

$$bd \left(\frac{a}{b}\right) = bd \left(\frac{c}{d}\right) \rightarrow ad = bc$$

### خواص دیگر تناسب

۱ : در یک تناسب می توان جای دو جمله میانی و یا دو جمله کناری را عوض کرد و تناسب جدیدی به

دست آورد. ( $a, b, c, d \neq 0$ )

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{جابجایی جملات میانی}} \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{جابجایی جملات کناری}} \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{جابجایی جملات میانی و جابجایی جملات کناری}} \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

نتیجه: در یک تناسب می توان هر دو نسبت را معکوس کرد و تناسب جدیدی به دست آورد.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (a, b, c, d \neq 0)$$

۲ : در یک تناسب از ترکیب نسبت در صورت (یا در مخرج) تناسبی جدید به وجود می آید. ( $b, d \neq 0$ )

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

۳ : در یک تناسب ، نسبت مجموع صورتها به مجموع مخرجها برابر هر یک از نسبت های تناسب است.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \rightarrow \frac{a+c}{b+d} = k \quad (b, d \neq 0)$$

توجه : خاصیت ۳ برای چند نسبت مساوی نیز قابل تعمیم است.

تمرین ۱: با توجه به خواص تناسب، در هر مورد جای خالی را کامل کنید.

$$\text{الف) } \frac{5}{14} = \frac{15}{42} \rightarrow 5 \times \dots = 15 \times \dots$$

$$\text{ب) } 3 \times 40 = 12 \times 10 \rightarrow \frac{3}{\dots} = \frac{12}{\dots}$$

$$\text{پ) } \frac{7}{10} = \frac{21}{30} \rightarrow \frac{10}{7} = \dots$$

$$\text{ت) } \frac{6}{11} = \frac{18}{33} \rightarrow \frac{6}{18} = \dots, \quad \frac{33}{11} = \dots$$

$$\text{ث) } \frac{4}{14} = \frac{10}{35} \rightarrow \frac{14}{14} = \dots, \quad \frac{4}{18} = \dots$$

$$\text{ج) } \frac{5}{12} = \frac{10}{24} \rightarrow \frac{-7}{12} = \dots, \quad \frac{5}{-7} = \dots$$

تمرین ۲: اگر  $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$  مقدار  $\frac{a+b}{a-b}$  را به دست آورید.

حل:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{3+4}{4} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{3-4}{4} \rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{-1}{4}$$

$$\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{-1}{4}} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = -7$$

تمرین برای حل:

۳: در هر مورد مقدار مجهول را بیابید.

$$\text{الف) } \frac{x}{3} = \frac{9}{10}$$

$$\text{ب) } \frac{y}{y+2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ج) } \frac{z+1}{z} = \frac{4}{z}$$

$$\text{د) } \frac{2a+1}{18} = \frac{35}{b} = \frac{5}{2}$$

۴ : محیط مستطیلی ۲۱۰ سانتی متر و نسبت طول به عرض آن  $\frac{۴}{۳}$  است. مساحت این مستطیل را به دست آورید.

۵ : متناظر با تساوی زیر یک تناسب بنویسید.

$$۵x + y = ۲x + ۷y$$

۶ : اگر  $\frac{x}{۲} = \frac{y}{۳} = \frac{z}{۶} = \frac{۳}{۵}$  ، حاصل  $x + y + z$  را به دست آورید.

۷ : در هر مورد مقدار عددی  $\frac{a}{b}$  را به دست آورید.

$$\frac{۳a + ۱۰}{۱۰ + ۲a} = \frac{۳b + ۷}{۷ + ۲b} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{a}{۱۰ + a} = \frac{b}{۸ + b} \quad (\text{الف})$$

\*\*\*

## قسمت دوم : استدلال در ریاضی و هندسه

### استدلال و انواع آن

عمل ارائه‌ی دلیل برای اثبات درستی یک گزاره به کمک دانسته‌های قبلی را استدلال می‌نامند. به طور کلی دو نوع استدلال وجود دارد.

#### الف: استدلال استقرایی :

روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای تعداد محدودی مشاهده را استدلال استقرایی می‌نامند.

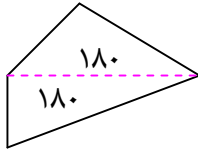
#### ب : استدلال استنتاجی :

روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای حقایق پذیرفته شده را استدلال استنتاجی می‌نامند.

\*\*\*

**مثال :** رحمان وقتی در مورد مجموع زاویه‌های داخلی یک چهار ضلعی محدب با پژمان و پیمان صحبت می‌کرد. آنها گفتند مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰ درجه است و استدلالی که بکار بردند متفاوت بود.

**استدلال پژمان:** در تمام چهارضلعی هایی از قبیل مربع ، مستطیل ، لوزی ، متوازی الاضلاع با توجه به اینکه زاویه های مجاور مکمل یکدیگرند، مجموع زاویه های داخلی  $360^\circ$  درجه است، لذا مجموع زاویه های داخلی هر چهارضلعی محدب  $360^\circ$  درجه است.



**استدلال پیمان:** با توجه به اینکه مجموع زاویه های داخلی هر مثلث  $180^\circ$  درجه است. لذا با رسم یک قطر در هر چهارضلعی محدب می توان آن را به دو مثلث تبدیل کرد. لذا مجموع زاویه های داخلی چهارضلعی محدب برابر مجموع زاویه های داخلی این دو مثلث می باشد، در نتیجه برابر  $360^\circ$  درجه است.

با توجه به تعریف ارائه شده برای انواع استدلال ، واضح است که استدلال پژمان استقرایی و استدلال پیمان استنتاجی است.(چرا؟)

**تمرین ۸:** تفاوت های بین انواع استدلال را بنویسید.

حل:

استقرایی	از جزء به کل است.	متکی بر تعداد محدودی مشاهده است.	تجربی است.	نتایج آن احتمالی است.
استنتاجی	از کل به جزء است.	متکی بر حقایق پذیرفته شده است.	منطقی است.	نتایج آن قطعی است.

**توجه:** چون استدلال استقرایی مبتنی بر تجربه بوده و تمام حالات ممکن را بررسی نمی کند پس نتایج بدست آمده از آن قطعی نیست ولی در استدلال استنتاجی نتایج بدست آمده همواره قطعی هستند، زیرا این استدلال مبتنی بر حقایق بوده و تجربی نمی باشد.

\*\*\*

**مثال نقض:** نتایج بدست آمده از استدلال استقرایی قطعی نیستند و گاهی قابل رد هستند. برای رد یک نتیجه ی کلی که از استدلال استقرایی بدست می آید، ارائه ی یک مثال نقض کافی است. مثال نقض ، مثالی است که نشان می دهد یک نتیجه گیری کلی نادرست است.

**مثال:** گزاره ی زیر را در نظر بگیرید.

حاصل جمع هر دو عدد گنگ ، یک عدد گنگ است.

این گزاره درست نیست، زیرا اعداد  $\sqrt{2}$  و  $-\sqrt{2}$  هر دو گنگ هستند ولی حاصل جمع آنها برابر صفر است که یک عدد گویا می باشد.

$$(\sqrt{2}) + (-\sqrt{2}) = 0$$

**تمرین ۹:** با یک مثال نقض گزاره های زیر را رد کنید.

الف : مربع هر عدد بزرگتر یا مساوی آن عدد است.

ب : حاصل عبارت  $p = x^2 + x + 41$  به ازاء اعداد طبیعی همواره یک عدد اول است.

حل:

الف: این گزاره نادرست است زیرا:  $(0/5)^2 = 0/25$  در حالی که  $0/5 \neq 0/25$ .

ب: این گزاره نادرست است زیرا اگر عدد ۴۱ را به جای  $x$  قرار دهیم حاصل ۱۷۶۳ می شود که عدد اول

نیست. (بر ۴۱ بخش پذیر است).

\*\*\*

**تمرین برای حل:** برای رد درستی هر یک از گزاره های کلی زیر یک مثال نقض ارائه کنید.

۱۰: از وصل کردن هر سه رأس یک هفت ضلعی منتظم، یک مثلث متساوی الساقین تشکیل می گردد.

۱۱: هر دو مثلث که مساحت های برابر داشته باشند، هم نهشت هستند.

۱۲: در هر مثلث هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچکتر است.

۱۳: همه ی اعداد اول فرد هستند.

۱۴: هیچ عدد اول بزرگتر از ۱۲۷ وجود ندارد.

**نتیجه:** برای پذیرفتن درستی یک گزاره لازم است استدلال کرد و این استدلال باید استنتاجی باشد ولی

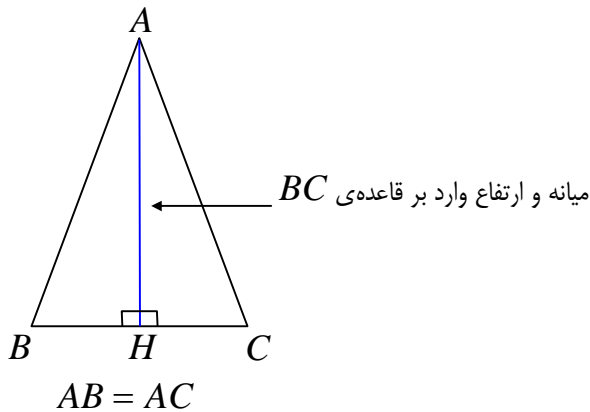
برای رد درستی یک گزاره ارائه ی یک مثال نقض کافی است.

**تمرین ۱۵:** از دو گزاره ی زیر آنکه درست است، ثابت کنید و آنکه نادرست است با یک مثال نقض رد کنید.

الف : در هر مثلث میانه ی وارد بر یک ضلع از ارتفاع نظیر همان ضلع بزرگتر است.

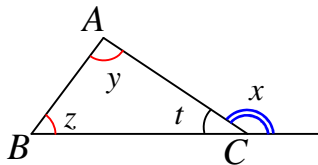
ب : در هر مثلث ، اندازه ی هر زاویه ی خارجی برابر مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاور آن است.

حل:



الف: این گزاره نادرست است، زیرا در مثلث متساوی الساقین<sup>۱</sup> میانۀ و ارتفاع وارد بر قاعدۀ بر هم منطبق هستند و لذا با هم مساویند.

ب: این گزاره درست است. برای اثبات آن از تعریف زاویۀ خارجی و همچنین مجموع زاویۀ های داخلی استفاده می کنیم.



$$\left. \begin{array}{l} x + t = 180 \\ y + z + t = 180 \end{array} \right\} \rightarrow x + t = y + z + t \rightarrow x = y + z$$

\*\*\*

### مفهوم قضیه

هر گزاره ی درست و کلی که به کمک استدلال استنتاجی بدست می آید را **قضیه** می نامند.

مثال:

۱: در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

۲: مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

۳: در هر مثلث مجموع اندازه های هر دو ضلع از اندازه ی ضلع سوم بزرگتر است.

۴: برای هر دو عدد حقیقی و مثبت  $x$  و  $y$  همواره  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$  است.

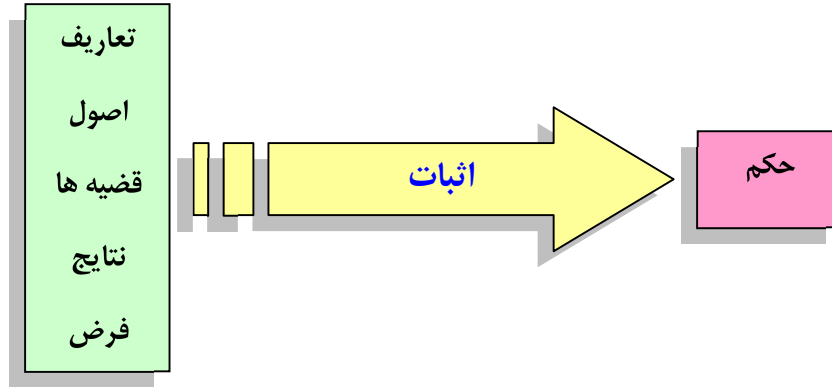
۵: برای هر دو مجموعه ی  $A$  و  $B$  همواره  $A - B = A \cap B'$

<sup>۱</sup> . در مثلث متساوی الاضلاع میانۀ و ارتفاع تمام اضلاع بر هم منطبق هستند.





قضیه ها در ریاضی و هندسه باید اثبات شوند، به عبارتی دیگر برای درستی آنها باید استدلال کرد. هر حرکت مرحله به مرحله و منطقی که به کمک استدلال استنتاجی، منجر به رسیدن به حکم قضیه شود را اثبات قضیه گویند.



بدیهی است که تشخیص فرض و حکم هر قضیه برای اثبات آن قضیه مهم است. اولین گام در اثبات هر قضیه تعیین فرض و حکم آن است. آخرین مرحله در اثبات هر قضیه رسیدن به حکم آن است.

\*\*\*

**قضیه ی عکس:** اگر جای فرض و حکم یک قضیه را جابجا کنیم، یک گزاره ی شرطی جدید بدست می آید که آن را عکس قضیه می نامیم. عکس قضیه، ممکن است درست و ممکن است نادرست باشد. در صورتی که عکس یک قضیه درست باشد، آن را قضیه ی عکس می نامند.

مثال :

**قضیه :** اگر مثلثی متساوی الساقین باشد، آنگاه در آن دو زاویه ی مجاور به قاعده مساویند.

**قضیه ی عکس :** اگر در مثلثی دو زاویه مساوی باشند، آنگاه آن مثلث متساوی الساقین است.

در مثال فوق عکس قضیه ی داده شده، درست است و لذا خود یک قضیه می باشد. در مثال زیر عکس قضیه درست نیست.

مثال:

**قضیه :** اگر دو زاویه متقابل به رأس باشند، آنگاه آن دو زاویه مساویند.

**عکس قضیه :** اگر دو زاویه مساوی باشند، آنگاه آن دو زاویه متقابل به رأس هستند.

**تمرین ۱۷ :** عکس هر یک از قضیه های زیر را بنویسید.

الف) اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می کنند.

ب) اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

ج) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه ی آن نیز برابر خواهند بود.

\*\*\*

**قضیه ی دو شرطی :** اگر عکس یک قضیه ی شرطی خود یک قضیه ی شرطی باشد. به کمک یکی از الگو

های زیر می توان آن دو قضیه را ترکیب کرد و به صورت یک قضیه بیان نمود. این قضیه را قضیه ی دو

شرطی می نامند.

\* اگر  $p$  آنگاه  $q$  و برعکس

\*  $p$  اگر و تنها اگر  $q$

\*  $p$  شرط لازم و کافی است برای  $q$

**مثال :**

**قضیه:** اگر مثلثی قائم الزاویه باشد، آنگاه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است.

**قضیه ی عکس :** اگر در مثلثی مربع یک ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد، آنگاه آن مثلث

قائم الزاویه است.

**قضیه ی دو شرطی:**

\* اگر مثلثی قائم الزاویه باشد، آنگاه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است و برعکس.

\* مثلث قائم الزاویه است اگر و تنها اگر مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر باشد.

\* قائم الزاویه بودن مثلث شرط لازم و کافی است برای اینکه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر

باشد.

**مثال :** هر یک از قضیه های زیر دو شرطی هستند.

الف) دو ضلع از یک مثلث برابرند، اگر و تنها اگر زاویه های روبرو به این دو ضلع با هم برابر باشند.

ب) در مثلث متساوی الاضلاع ، یک پاره خط نیمساز است، اگر و تنها اگر میانه باشد.

**تمرین برای حل :** قضیه های زیر را در نظر بگیرید. سپس :

الف : عکس هر کدام را بنویسید.

ب : با ترکیب قضیه و عکس آن یک قضیه‌ی دو شرطی بیان کنید.

**۱۸ :** در هر مثلث ، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه‌ی روبرو به آنها نیز برابرند.

**۱۹ :** اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهاش عمود منصف یکدیگرند.

**۲۰ :** در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

**۲۱ :** اگر دو دایره شعاع های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت های آنها نیز برابر هستند.

**توجه :** برای اثبات یک قضیه‌ی دوشروطی باید قضیه های تشکیل دهنده‌ی آن را جداگانه ثابت کرد. یعنی ابتدا فرض و حکم را تعیین می کنیم و قضیه را ثابت می کنیم. سپس با جابجا کردن فرض و حکم قضیه‌ی عکس را نیز اثبات کرد.

\*\*\*

**عکس نقیض یک قضیه :** اگر فرض و حکم قضیه ای را جابجا و نقیض کنیم، گزاره‌ی حاصل همواره

درست خواهد بود. این گزاره را قضیه‌ی عکس نقیض می نامند.

مثال :

**قضیه:** اگر مثلثی قائم الزاویه باشد، آنگاه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است.

**قضیه‌ی عکس نقیض :** اگر در مثلثی مربع یک ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر نباشد، آنگاه

آن مثلث قائم الزاویه نیست.

**توجه :** اثبات یک قضیه به معنی اثبات عکس نقیض آن می باشد و ضرورتی به اثبات عکس نقیض آن

نیست.

\*\*\*

### برهان خلف ( اثبات غیر مستقیم )

گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه نشان می دهیم که خلاف حکم آن درست نیست و سپس نتیجه می گیریم با این شرایط خود حکم درست است. این روش استدلال که نوعی استدلال استنتاجی است را برهان خلف یا اثبات غیر مستقیم می نامند.

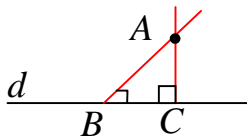
روند کار در این روش بدین ترتیب است که ابتدا خلاف حکم را تشکیل می دهیم و آن را فرض خلف می نامیم، سپس استدلال خود را با تکیه بر این فرض ادامه می دهیم. در نهایت به خلاف فرض یا یک قضیه ی اثبات شده ی قبلی یا خلاف یک اصل (حقیقت) می رسیم. در آخر فرض خلف را باطل می کنیم و خود حکم را می پذیریم.

\*\*\*

**مثال ۱ :** ثابت کنید که، از یک نقطه ی غیر واقع بر یک خط راست نمی توان بیش از یک خط عمود بر آن

رسم کرد.

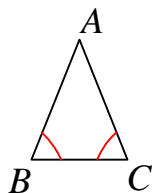
اثبات به روش برهان خلف : فرض می کنیم که این حکم نادرست است و از یک نقطه ی دلخواه مانند  $A$  واقع بر خارج خط  $d$  می توان دو عمود بر آن رسم کرد. در این صورت یک مثلث تشکیل می شود که دو زاویه ی قائمه دارد. لذا مجموع



زاویه های داخلی این مثلث بیش از  $180^\circ$  درجه خواهد شد و این غیر ممکن است. پس فرض خلف نمی تواند درست باشد و حکم درست است.

\*\*\*

**مثال ۲ :** ثابت کنید که، اگر در مثلث  $ABC$  ،  $AB \neq AC$  آنگاه  $\angle B \neq \angle C$

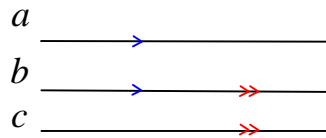


اثبات: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که  $\angle B = \angle C$  باشد. یعنی مثلث  $ABC$  دو زاویه ی مساوی دارد. بنابراین مثلث متساوی الساقین است. لذا  $AB = AC$  و این

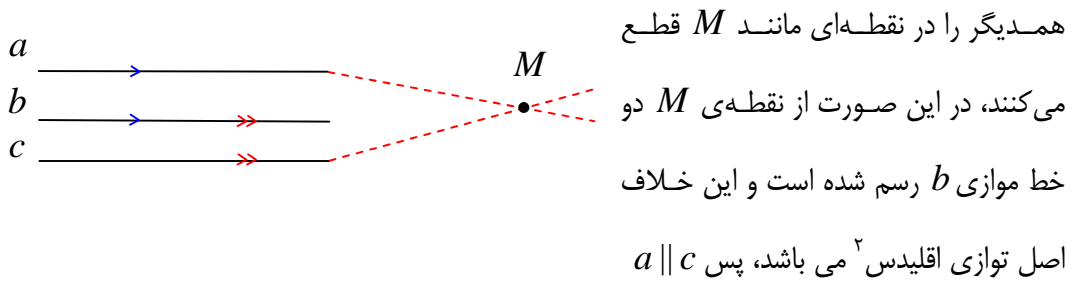
خلاف فرض می باشد و نمی تواند درست باشد.

**تمرین ۲۲:** ثابت کنید که هر دو خط که با خط سوم موازی باشند، خود با هم موازیند.

**اثبات:** در این مسئله از اینکه  $b \parallel c$  و  $a \parallel b$  می‌خواهیم ثابت کنیم.  $a \parallel c$



برای اثبات به روش برهان خلف عمل می‌کنیم. فرض کنیم که خط  $a$  موازی  $c$  نباشد. لذا این دو خط

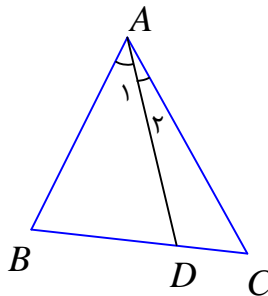


**تمرین برای حل:** به روش برهان خلف، گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

**۲۳:** اگر  $n$  یک عدد طبیعی و  $n^2$  عددی فرد باشد، آنگاه  $n$  نیز فرد است.

**۲۴:** فرض کنیم  $AD$  نیمساز زاویه‌ی  $A$  از مثلث  $ABC$  باشد. اگر  $BD \neq DC$  باشد، آنگاه

$$AB \neq AC$$

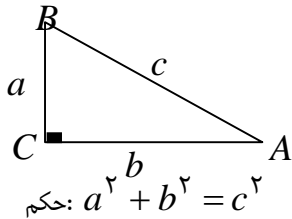


\*\*\*

<sup>2</sup>. مطابق اصل توافقی اقلیدس، از هر نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست، نمی‌توان بیش از یک خط عمود بر آن رسم کرد.

قسمت سوم : قضیه فیثاغورس

در ادامه یکی از قضیه های اساسی در مورد مثلث قائم الزاویه معروف به قضیه فیثاغورس را بیان و اثبات می کنیم.



قضیه (قضیه فیثاغورس): در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با

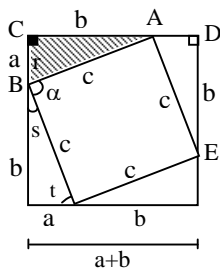
مجموع مربعهای دو ضلع دیگر آن برابر است.

حکم:  $a^2 + b^2 = c^2$

اثبات :

مرحله ۱: مربعی به ضلع  $a + b$  رسم می کنیم، سپس در این مربع چهار مثلث قائم الزاویه با اضلاع  $a$  و  $b$  تشکیل می دهیم.

مرحله ۲: بنا به حالت (ضضض) این چهار مثلث با همدیگر و با مثلث اصلی همپهشت هستند.



$$\left. \begin{array}{l} BC = AD \\ \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ AC = DE \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADE \text{ (ضضض)}$$

پس دارای وترهایی برابر C می باشند.

مرحله ۳: چهارضلعی حاصل از چهار وتر مربع است. زیرا

الف: چهارضلع مساوی دارد. ب: یک زاویه قائمه دارد.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{S} + \hat{t} = 90^\circ \\ \hat{r} = \hat{t} \end{array} \right\} \rightarrow \hat{S} + \hat{r} = 90^\circ \xrightarrow{\hat{r} + \hat{\alpha} + \hat{S} = 180^\circ} \hat{\alpha} = 90^\circ$$

مرحله ۴: طبق اصل مجموع مساحت ها می توان نوشت:

مساحت ۴ مثلث همپهشت + مساحت مربع کوچک = مساحت مربع بزرگ

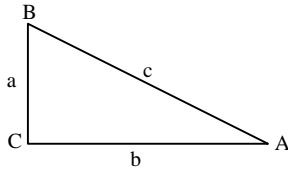
$$(a + b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right)$$

$$\rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

\*\*\*

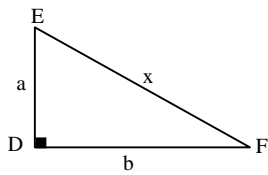
### قضیه (عکس قضیه ی فیثاغورس):

اگر در مثلثی مربع بزرگترین ضلع با مجموع مربع های دو ضلع دیگر برابر باشد آن مثلث قائم الزویه و زاویه روبرو به ضلع بزرگتر قائمه است.



$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ : فرض}$$

**اثبات:** مثلثی قائم الزویه به نام DEF طوری رسم می کنیم که اضلاع زاویه ی قائمه ی آن b و a باشند. آنگاه



داریم

$$a^2 + b^2 = x^2$$

و با مقایسه با فرض قضیه می توان نوشت

$$x^2 = c^2 \rightarrow x = c$$

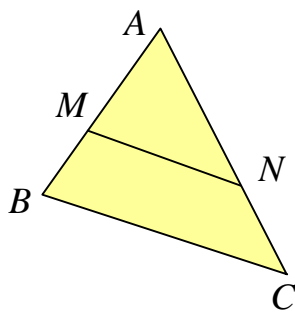
لذا مثلث های ABC و DEF بنا به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند و چون زاویه D قائمه است پس زاویه متناظر آن یعنی زاویه C نیز قائمه است.

\*\*\*

### قسمت چهارم: خطوط موازی و قضیه ی تالس

**قضیه (قضیه ی تالس):** اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را

قطع کند روی آنها پاره خط های متناسب بوجود می آورد.

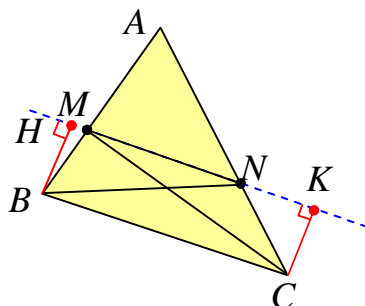


$$\text{فرض: } MN \parallel BC$$

$$\text{حکم: } \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

اثبات:

مرحله ی اول:



نقطه ی N را به B و همچنین نقطه ی M را به C وصل می کنیم. دو مثلث MNB و MNC حاصل می شود که ارتفاع نظیر

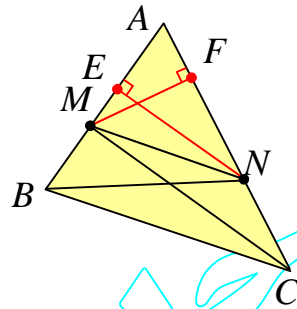


ضلع  $MN$  در هر دو یکسان است. زیرا چهارضلعی  $BHCK$  مستطیل می‌باشد و در مستطیل اضلاع روبرو مساویند ( $BH = CK$ ). لذا طبق آنچه گفته شد داریم :

$$S_{\Delta MNB} = \frac{1}{2} MN \cdot BH = \frac{1}{2} MN \cdot CK = S_{\Delta MNC}$$

مرحله دوم: از نقطه‌ی  $N$  بر ضلع  $AB$  پاره خط  $NE$  را عمود می‌کنیم. پس

$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta MNB}} = \frac{\frac{1}{2} AM \cdot NE}{\frac{1}{2} MB \cdot NE} = \frac{AM}{MB}$$



مرحله سوم: از نقطه‌ی  $M$  بر ضلع  $AC$  پاره خط  $MF$  را عمود می‌کنیم. پس

$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta MNC}} = \frac{\frac{1}{2} AN \cdot MF}{\frac{1}{2} NC \cdot MF} = \frac{AN}{NC}$$

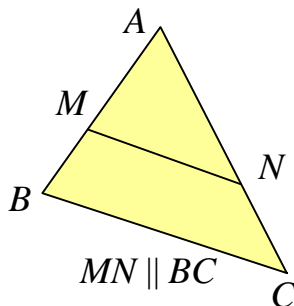
مرحله چهارم: طبق دو مرحله دوم و سوم داریم

$$\left. \begin{array}{l} \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta MNB}} = \frac{AM}{MB} \\ \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta MNC}} = \frac{AN}{NC} \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_{\Delta MNB} = S_{\Delta MNC} \\ \rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \end{array}$$

\*\*\*

نتیجه: رابطه‌ی تالس را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$



اثبات : کافی است نسبت را در مخرج ترکیب کنیم.

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \rightarrow \frac{AM}{AM + MB} = \frac{AN}{AN + NC} \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

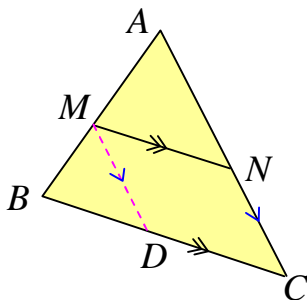
توجه : اگر رابطه ی تالس را به صورت  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$  بنویسیم، می گوییم، رابطه به صورت جزء به جزء

نوشته شده است. در حالی که در حالت  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  رابطه را جزء به کل گویند.

\*\*\*

**قضیه (قضیه ی کلی تالس) :** اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها)

را قطع کند، مثلث دیگری بوجود می آورد که اضلاع آن با اضلاع متناظر از مثلث اصلی متناسبند.



فرض :  $MN \parallel BC$

حکم :  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

**اثبات :** تناسب  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  (۱) طبق قضیه ی تالس بدیهی است. از طرفی اگر از نقطه ی  $M$  پاره خط

$MD$  را موازی  $AC$  رسم کنیم. با استفاده از قضیه ی تالس داریم :

$$MD \parallel AC \rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{BD}{BC} \rightarrow \frac{-BM}{AB} = \frac{-BD}{BC}$$

و با ترکیب نسبت در صورت می توان نوشت:

$$\frac{AB - BM}{AB} = \frac{BC - BD}{BC} \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{DC}{BC}$$

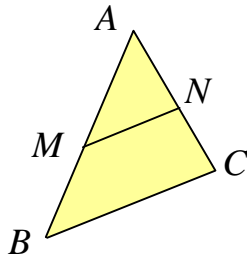
ولی چهارضلعی  $MNCD$  متوازی الاضلاع است پس  $MN = DC$  و لذا

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \quad (۲)$$

حال طبق نتایج ۱ و ۲ به دست آمده می‌توان نوشت:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

\*\*\*

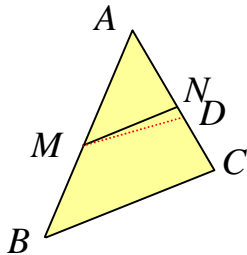


**قضیه (عکس قضیه تالس):** اگر خطی دو ضلع مثلثی (یا امتداد آنها)

را قطع کند و روی آنها پاره‌خط‌های متناسب پدید آورد، آن خط با ضلع سوم

مثلث موازی است.

فرض:  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  حکم:  $MN \parallel BC$



**اثبات:** (به کمک برهان خلف) بگیریم که  $MN$  موازی  $BC$  نباشد. پس از

نقطه‌ی  $M$  خط  $MD$  را چنان رسم می‌کنیم که موازی  $BC$  باشد و  $AC$

(یا امتداد آن را در نقطه‌ی  $D$ ) قطع کند. حال طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

و با مقایسه با فرض می‌توان نوشت:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AD}{AC}$$

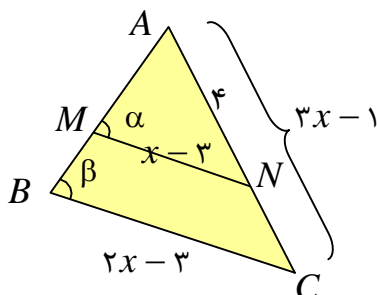
لذا:

$$AN = AD$$

و این وقتی ممکن است که نقطه‌ی  $D$  بر  $N$  منطبق باشد پس پاره‌خط  $MD$  بر  $MN$  منطبق می‌شود و

چون  $MD \parallel BC$  پس  $MN \parallel BC$  و حکم ثابت است.

**تمرین ۲۵:** در شکل زیر زاویه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  مساویند. مقدار  $x$  را به دست آورید.



**حل:** چون زاویه های  $\alpha$  و  $\beta$  لذا خطوط  $MN$  و  $BC$  موازیند. لذا قضیه ی تالس را می توان به صورت زیر نوشت:

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

و چون اندازه های اضلاع  $AM$  و  $AB$  را نداریم. تناسب را به صورت زیر می نویسیم.

$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \rightarrow \frac{4}{3x-1} = \frac{x-3}{2x-3} \rightarrow (x-3)(3x-1) = 4(2x-3)$$

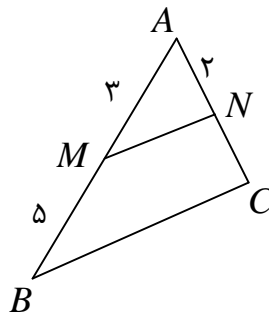
$$\rightarrow 3x^2 - x - 9x + 3 = 8x - 12 \rightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\rightarrow (x-5)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=1 \end{cases}$$

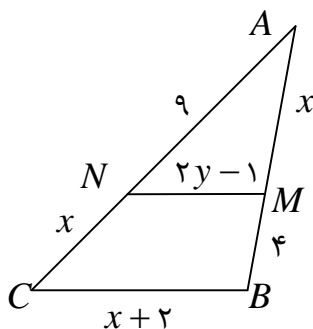
که با توجه به داده های مسئله جواب  $x=1$  قابل قبول نیست.

### تمرین برای حل:

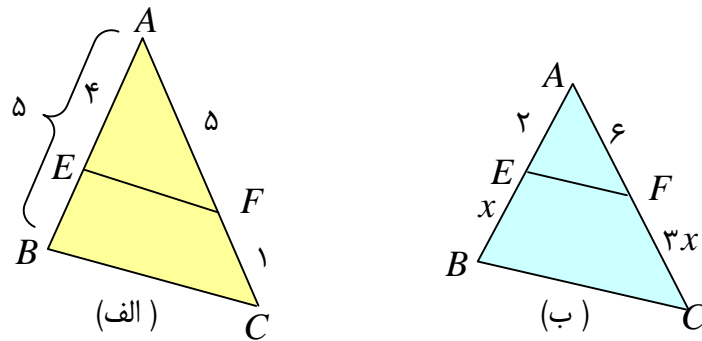
**۲۶:** در شکل زیر  $MN \parallel BC$ ، اندازه های  $AC$  و  $NC$  را به دست آورید.



**۷:** در شکل مقابل  $MN \parallel BC$ ، مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست آورید.

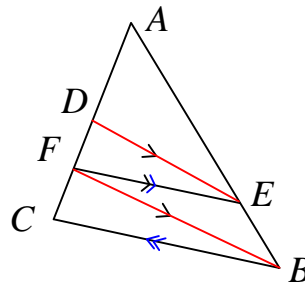


۲۸: در کدام مورد  $EF \parallel BC$  است؟



۲۹: ثابت کنید، در هر مثلث پاره خطی که وسطهای دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

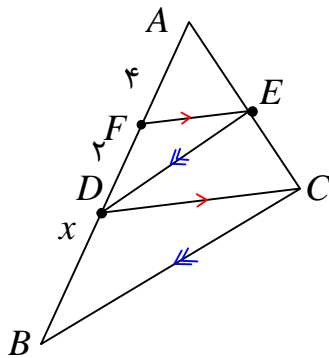
۳۰: در شکل زیر  $DE \parallel FB$  و  $FE \parallel BC$  ثابت کنید که  $\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$



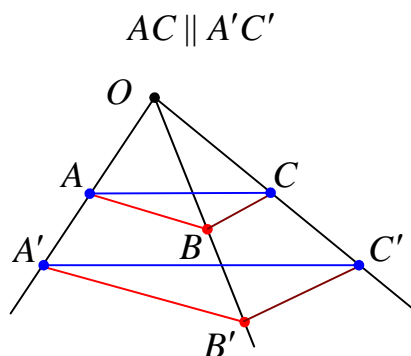
۳۱: با توجه به شکل مقابل اگر  $FE \parallel DC$  و  $DE \parallel BC$

اولاً: ثابت کنید که  $AD^2 = AF \cdot AB$

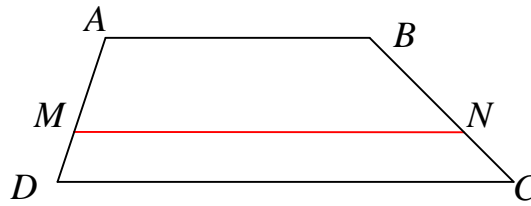
ثانیاً: مقدار  $x$  را به دست آورید.



۳۲: در شکل زیر  $AB \parallel A'B'$  و  $BC \parallel B'C'$  با استفاده از قضیه تالس و عکس آن ثابت کنید:



۳۳: در ذوزنقه‌ی زیر  $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید،  $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$  . ( قضیه‌ی تالس در ذوزنقه )



\*\*\*

تهیه کننده : جابر عامری

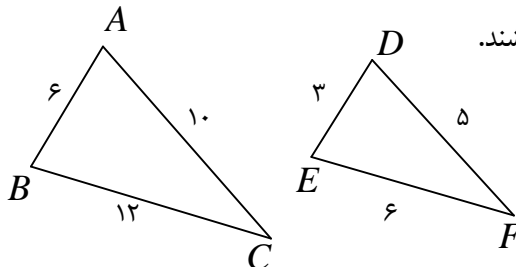
عضو گروه ریاضی دوره دوّم متوسطه

استان خوزستان

## درس سوم : تشابه مثلث ها

در این درس مفهوم تشابه دو مثلث را بررسی نموده و کاربردهایی را پیرامون آن بیان می کنیم.

## قسمت اول : مفهوم تشابه دو مثلث



دو مثلث را **متشابه** گویند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند.

الف : زاویه های متناظر آنها مساوی باشند.

ب : اضلاع متناظر آنها متناسب باشند.

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F \\ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \end{array} \right\} \rightarrow \Delta(ABC) \sim \Delta(DEF)$$

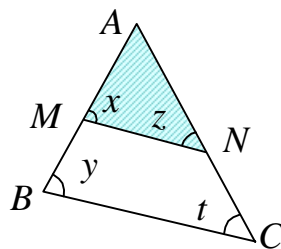
در دو مثلث متشابه ، نسبت دو ضلع متناظر<sup>۱</sup> را نسبت تشابه دو مثلث می نامند. در مثال فوق نسبت تشابه

$$\text{می تواند } k = \frac{6}{3} = 2 \text{ یا } k = \frac{12}{6} = 2 \text{ می باشد.}$$

برای ورود به بحث تشابه مثلث ها ، لازم است ابتدا با قضیه ی اساسی تشابه دو مثلث آشنا شویم.

**قضیه** (قضیه ی اساسی تشابه مثلث ها) : اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود به طوری که دو ضلع

دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند، مثلثی بوجود می آورد که با مثلث اصلی متشابه است.



فرض :  $MN \parallel BC$

حکم :  $\Delta AMN \sim \Delta ABC$

**اثبات** : کافی است که نشان دهیم ، دو شرط مربوط به تعریف تشابه را برقرارند.

شرط اول (تساوی زاویه های متناظر) : زاویه ی  $A$  در دو مثلث مشترک است. از طرفی چون  $MN \parallel BC$

پس  $\angle x = \angle y$  و  $\angle z = \angle t$  . پس زاویه های نظیر مساویند.

<sup>۱</sup> . اضلاع روبرو به زاویه های مساوی

شرط دوم (تناسب اضلاع متناظر):

چون  $MN \parallel BC$  پس طبق قضیه ی تالس داریم  $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$ . در نتیجه اضلاع متناسبند.

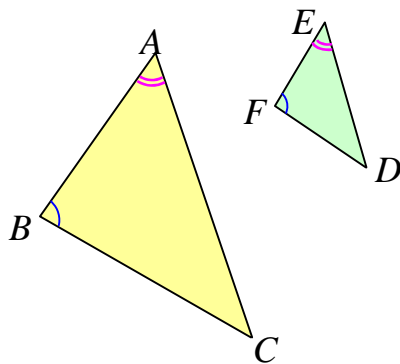
\*\*\*

حال با توجه به قضیه ی اساسی تشابه دو مثلث، می توان سه قضیه ی اصلی برای حالت های مختلف تشابه دو مثلث بیان کرد.

### قضایای اصلی تشابه دو مثلث

**قضیه ی ۱:** اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند آن دو مثلث متشابهند.

(حالت تساوی دو زاویه)



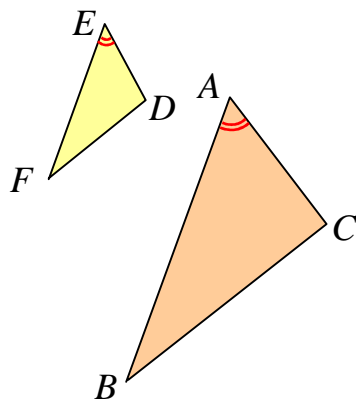
فرض:  $\angle A = \angle E$  و  $\angle B = \angle F$

$$\text{حکم: } \triangle ABC \sim \triangle EFD$$

\*\*\*

**قضیه ی ۲:** اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگری برابر و ضلع های نظیر این زاویه ها

متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابهند.



(حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویه های بین آنها)

$$\text{فرض: } \angle A = \angle E \text{ و } \frac{EF}{AB} = \frac{ED}{AC}$$

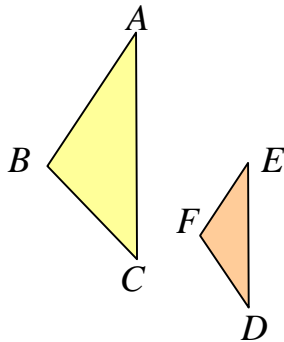
$$\text{حکم: } \triangle ABC \sim \triangle EFD$$

\*\*\*



**قضیه ۳:** هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری متناسب باشند آن دو مثلث متشابه‌اند.

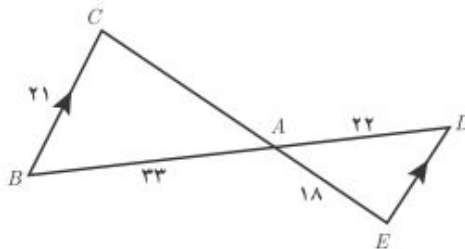
(حالت تناسب سه ضلع)



$$\text{فرض: } \frac{EF}{AB} = \frac{ED}{AC} = \frac{DF}{BC}$$

$$\text{حکم: } \triangle ABC \sim \triangle FED$$

**تمرین ۱:** در شکل زیر  $BC \parallel DE$  است. اندازه‌های پاره‌های  $AC$  و  $DE$  را به دست آورید.



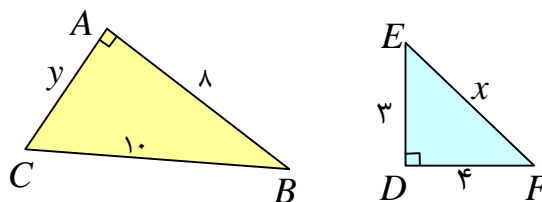
**توجه:** هنگام نوشتن نسبت اضلاع متناظر از دو مثلث متشابه لازم است به دو نکته‌ی زیر توجه نمود.

۱: صورت‌ها مربوط به یک مثلث و مخرج‌ها مربوط به مثلث دیگر باشند.

۲: دو ضلع در یک نسبت (کسر) قرار می‌گیرند، هرگاه روبرو به زاویه‌های مساوی باشند.

**تمرین برای حل:**

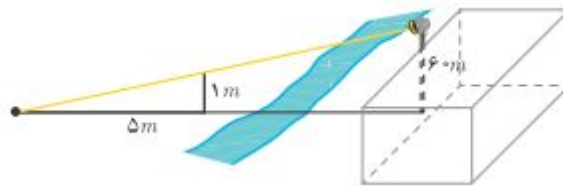
**۲:** آیا دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی زیر متشابه‌ند؟ چرا؟



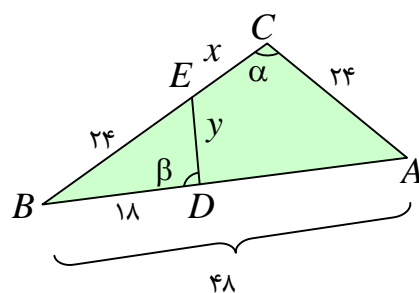
**۳:** بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف

دیگر رودخانه است، می‌خواهد فاصله‌ی خود را تا پایه‌ی نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول

یک متر را روی زمین قرار می دهد و مشاهده می کند که طول سایه ی چوب برابر ۵ متر است. فاصله ی این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟

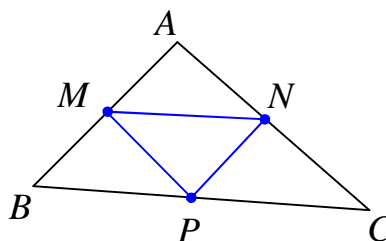


۴: در شکل زیر  $\angle \alpha = \angle \beta$  است. طول  $x$  و  $y$  را پیدا کنید.



۵: در شکل زیر نقاط  $M$  و  $N$  و  $P$  وسط های اضلاع مثلث  $ABC$  می باشند. ثابت کنید:

$$\Delta(ABC) \sim \Delta(MNP)$$

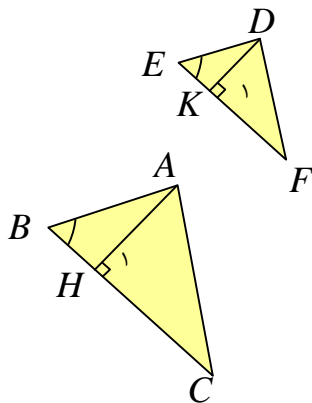


۶: ثابت کنید که دو مثلث متشابه با یک مثلث، خود باهم متشابه اند. در مورد نسبت تشابه آنها چه می توان گفت؟ چرا؟

\*\*\*

قسمت دوم : قضایای محیط و مساحت مثلث های متشابه

قضیه : نسبت ارتفاع های متناظر از دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آن دو مثلث برابر است.



فرض:  $\Delta(ABC) \sim \Delta(DEF)$  و  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$

حکم:  $\frac{AH}{DK} = k$

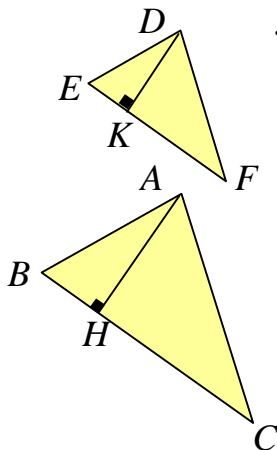
اثبات : چون دو مثلث  $ABC$  و  $DEF$  متشابهند، پس  $\angle B = \angle E$

از طرفی  $\angle H_1 = \angle K_1 = 90^\circ$  لذا

$$\Delta(ABH) \sim \Delta(DEK) \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BH}{EK} = \frac{AH}{DK}$$

و چون  $\frac{AB}{DE} = k$  پس  $\frac{AH}{DK} = k$

قضیه : نسبت مساحت های دو مثلث متشابه با توان دوم نسبت تشابه آنها برابر است.



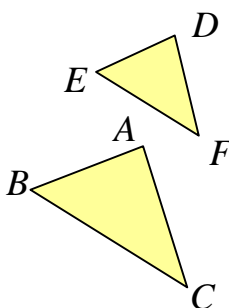
فرض:  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$  و  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$

حکم:  $\frac{S_{\Delta(ABC)}}{S_{\Delta(DEF)}} = k^2$

اثبات : با توجه به قضیه ی قبل داریم :

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DEF}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AH}{\frac{1}{2} EF \cdot DK} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AH}{DK} = k \cdot k = k^2$$

قضیه : نسبت محیط های دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آنها برابر است.



فرض:  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$  و  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$

حکم:  $\frac{P_{\Delta(ABC)}}{P_{\Delta(DEF)}} = k$

اثبات : با توجه به خواص تناسب داریم

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta DEF}} = \frac{AB + BC + AC}{DE + EF + DF} = \frac{k(DE) + k(EF) + k(DF)}{DE + EF + DF}$$

$$= \frac{k(DE + EF + DF)}{(DE + EF + DF)} = k$$

\*\*\*

**تمرین ۷:** نسبت مساحت های دو مثلث متشابه  $\frac{۸۱}{۲۵}$  است، نسبت محیط های این دو مثلث را پیدا کنید.

حل :

نسبت محیط ها  $k^2 = \frac{۸۱}{۲۵} \rightarrow k = \frac{۹}{۵}$

**تمرین ۸:** اگر مثلثی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ با مثلثی دیگر به محیط ۱۸ متشابه باشد.

الف: مساحت مثلث دوم را بدست آورید.

ب: اندازه ی اضلاع مثلث دوم را محاسبه کنید.

حل: در مثلث اول، چون  $۳^2 + ۴^2 = ۵^2$  پس مثلث قائم الزاویه بوده و دوضلع زاویه ی قائمه ی آن ۳ و ۴ می

باشند. در نتیجه مساحت این مثلث برابر  $۶ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴$  است.

مساحت	محیط	ضلع سوم	ضلع دوم	ضلع اول
$S = ۶$	$p = ۱۲$	$c = ۵$	$b = ۴$	$a = ۳$
$S'$	$p' = ۱۸$	$c'$	$b'$	$a'$

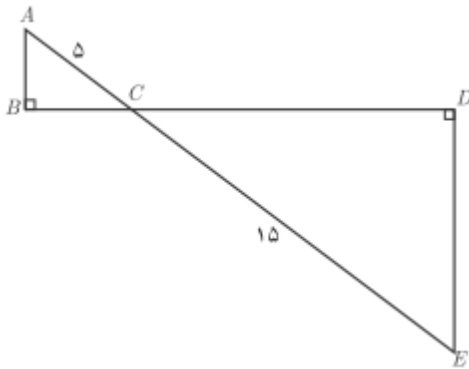
$$k = \frac{p}{p'} = \frac{۱۲}{۱۸} = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{\frac{S}{S'} = k^2} \frac{S}{S'} = \frac{۴}{۹} \xrightarrow{S=۶} \frac{۶}{S'} = \frac{۴}{۹} \rightarrow S' = \frac{۶ \times ۹}{۴} = \frac{۲۷}{۲} = ۱۳ \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{a}{a'} = k \rightarrow \frac{۳}{a'} = \frac{۲}{۳} \rightarrow a' = 4 \frac{۳}{۲} = ۶ \frac{۳}{۲} = ۹ \frac{۳}{۲}$$

$$\frac{b}{b'} = k \rightarrow \frac{۴}{b'} = \frac{۲}{۳} \rightarrow b' = ۶$$

$$\frac{c}{c'} = k \rightarrow \frac{۵}{c'} = \frac{۲}{۳} \rightarrow c' = 7 \frac{۵}{۲}$$

تمرین برای حل:



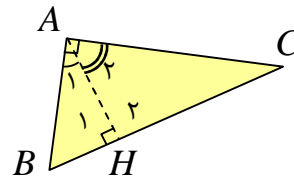
۹: در شکل مقابل دو مثلث قائم الزاویه مشاهده می کنید. نسبت محیط ها و مساحت های آنها را به دست آورید.

\*\*\*

قسمت سوم: برخی روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم الزاویه دیگر تبدیل می کند. این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابهند.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta(ABH): \angle A_1 + \angle B = 90^\circ \\ \Delta(ABC): \angle B + \angle C = 90^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle C \\ \angle H_1 = \angle A = 90^\circ \end{array} \rightarrow \Delta(ABH) \approx \Delta(ABC) \quad (1)$$



$$\left. \begin{array}{l} \Delta(ACH): \angle A_2 + \angle C = 90^\circ \\ \Delta(ABC): \angle B + \angle C = 90^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \angle A_2 = \angle B$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_2 = \angle B \\ \angle H_2 = \angle A = 90^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \Delta(ACH) \approx \Delta(ABC) \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \Delta(ABH) \approx \Delta(ACH)$$

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر میانگین هندسی<sup>۲</sup> بین دو قطعه ایجاد شده روی وتر است.

$$\Delta(ABH) \approx \Delta(ACH) \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \rightarrow AH^2 = BH \times CH$$

<sup>۲</sup> عدد  $x$  را میانگین هندسی بین دو عدد  $a$  و  $b$  گویند، هرگاه  $x^2 = ab$

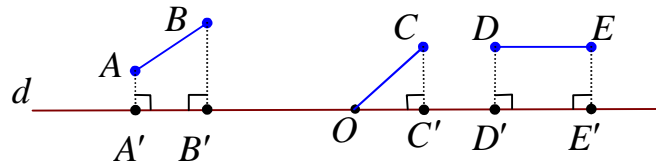
**قضیه:** در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر، با حاصل ضرب دو ضلع زاویه قائمه‌ی مثلث برابر است.

اثبات: کافی است مساحت مثلث قائم الزاویه را به دو شکل متفاوت محاسبه کنیم.

$$\left. \begin{aligned} S(ABC) &= \frac{1}{2}(AB)(AC) \\ S(ABC) &= \frac{1}{2}(AH)(BC) \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{2}(AH)(BC) = \frac{1}{2}(AB)(AC)$$

$$\rightarrow (AH)(BC) = (AB)(AC)$$

**توجه:** اگر  $AB$  پاره خط غیرمنطبق بر خط  $d$  باشد. تصویر پاره خط  $AB$  روی خط  $d$  پاره خطی است مانند  $A'B'$  می‌باشد هرگاه  $AA' \perp d$  و  $BB' \perp d$  باشد.

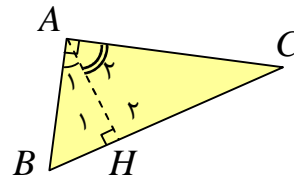


**قضیه:** در هر مثلث قائم الزاویه مربع اندازه‌ی هر ضلع زاویه قائمه با حاصل ضرب اندازه‌ی وتر در اندازه‌ی تصویر همان ضلع بر وتر برابر است.

اثبات:

$$\Delta(ABH) \approx \Delta(ABC) \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{AB}$$

$$\rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \rightarrow AB^2 = BC \times BH$$



$$\Delta(ACH) \approx \Delta(ABC) \rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} = \frac{AH}{AB}$$

$$\rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \rightarrow AC^2 = BC \times CH$$

**قضیه:** در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است (قضیه‌ی فیثاغورس).

اثبات:

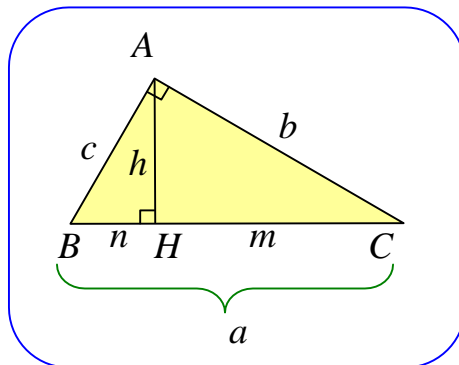
$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = BC \times BH \\ AC^2 = BC \times CH \end{array} \right\} \rightarrow AB^2 + AC^2 = BC \times BH + BC \times CH$$

$$\rightarrow AB^2 + AC^2 = BC(BH + CH) = BC \times BC = BC^2$$

**تمرین ۱۰:** با استفاده از محاسبه‌ی مساحت، ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، حاصل ضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه با حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر برابر است.

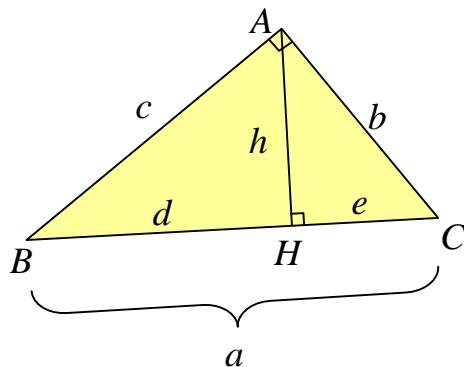
\*\*\*

برخی از روابط طولی مهم در هر مثلث قائم الزاویه



- ۱)  $a^2 = b^2 + c^2$
- ۲)  $b^2 = a \times m$
- ۳)  $c^2 = a \times n$
- ۴)  $h^2 = m \times n$
- ۵)  $a \times h = b \times c$

**تمرین ۱۱:** در هر مورد با توجه به اطلاعات داده شده پیرامون مثلث قائم الزاویه‌ی شکل مقابل، ساده ترین



روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

الف)  $h = 5$  و  $d = 7$  و  $e = ?$

ب)  $d = 5$  و  $e = 3$  و  $b = ?$  و  $c = ?$

ج)  $c = 8$  و  $b = 6$  و  $h = ?$

حل :

الف :

$$h^2 = d \times e \rightarrow (5)^2 = 7 \times e \rightarrow e = \frac{25}{7}$$

ب :

$$b^2 = a \times e \rightarrow b^2 = 8 \times 3 \rightarrow b = 2\sqrt{6}$$

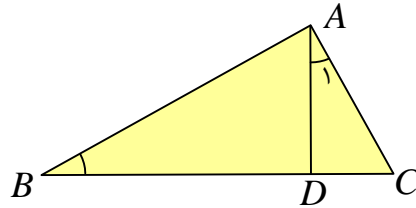
$$c^2 = a \times d \rightarrow c^2 = 8 \times 5 \rightarrow c = 2\sqrt{10}$$

ج :

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 = (6)^2 + (8)^2 \rightarrow a = 10$$

$$a \times h = b \times c \rightarrow (10)(h) = (6)(8) \rightarrow h = \frac{24}{5}$$

**تمرین ۱۲:** در شکل روبرو  $\angle A_1 = \angle B$  و  $AC = 4$  و  $BD = 6$  . طول  $BC$  را به دست آورید.



حل : قرار می دهیم  $BC = x$

$$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle B \\ \angle C = \angle C \end{array} \right\} \rightarrow \Delta(ADC) \approx \Delta(ABC) \rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

$$\rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC} \rightarrow \frac{4}{x} = \frac{x-6}{4} \rightarrow x^2 - 6x = 16 \rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$\rightarrow (x-8)(x+2) = 0 \rightarrow x = 8, x = -2$$

جواب  $x = -2$  غیر قابل قبول است.

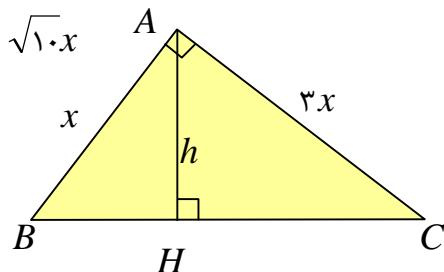
**تمرین ۱۳:** در یک مثلث قائم الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۳ و ۱ و مساحت آن ۶۰ واحد مربع است.

اندازه ی ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

حل :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = x^2 + 9x^2 = 10x^2 \rightarrow BC = \sqrt{10}x$$

$$S = 60 \rightarrow \frac{(x)(3x)}{2} = 60 \rightarrow x^2 = 40 \rightarrow x = 2\sqrt{10}$$



می دانیم که در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر با حاصل ضرب دو ضلع زاویه ی

قائم برابرند. پس :

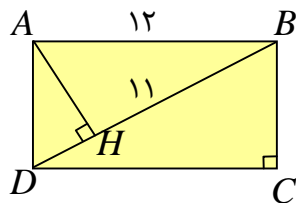


$$(AH)(BC) = (AB)(AC) \rightarrow h(\sqrt{10}x) = (x)(3x)$$

$$\rightarrow h = \frac{3x}{\sqrt{10}} \xrightarrow{x=2\sqrt{10}} h = \frac{3(2\sqrt{10})}{\sqrt{10}} = 6$$

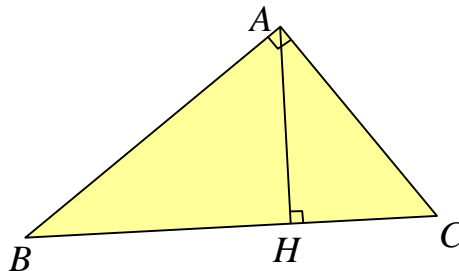
تمرین برای حل :

۱۴: در شکل مقابل، مستطیلی به طول ۱۲ داده شده است. با توجه به اندازه های داده شده ، طول قطر



مستطیل و اندازه‌ی عرض مستطیل را به دست آورید.

۱۵: در مثلث قائم الزاویه زیر، در هر حالت ، اندازه‌ی پاره خط خواسته شده را به دست آورید.



الف)  $AC = ?$  و  $AB = ?$  و  $AH = ?$  و  $BH = 9$  و  $BC = 10$

ب)  $AB = ?$  و  $AH = ?$  و  $BC = ?$  و  $CH = 2$  و  $AC = 5$

پ)  $AH = ?$  و  $BC = ?$  و  $AC = 6$  و  $AB = 8$

ت)  $AC = ?$  و  $BC = ?$  و  $BH = ?$  و  $AH = 6$  و  $AB = 12$

\*\*\*

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره دوم متوسطه

استان خوزستان