

ریاضی ۲

پایه می دوازدهم « رشته می علوم تجربی »

فصل ۲ : مثلثات

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره دوّم متوسطه

استان خوزستان

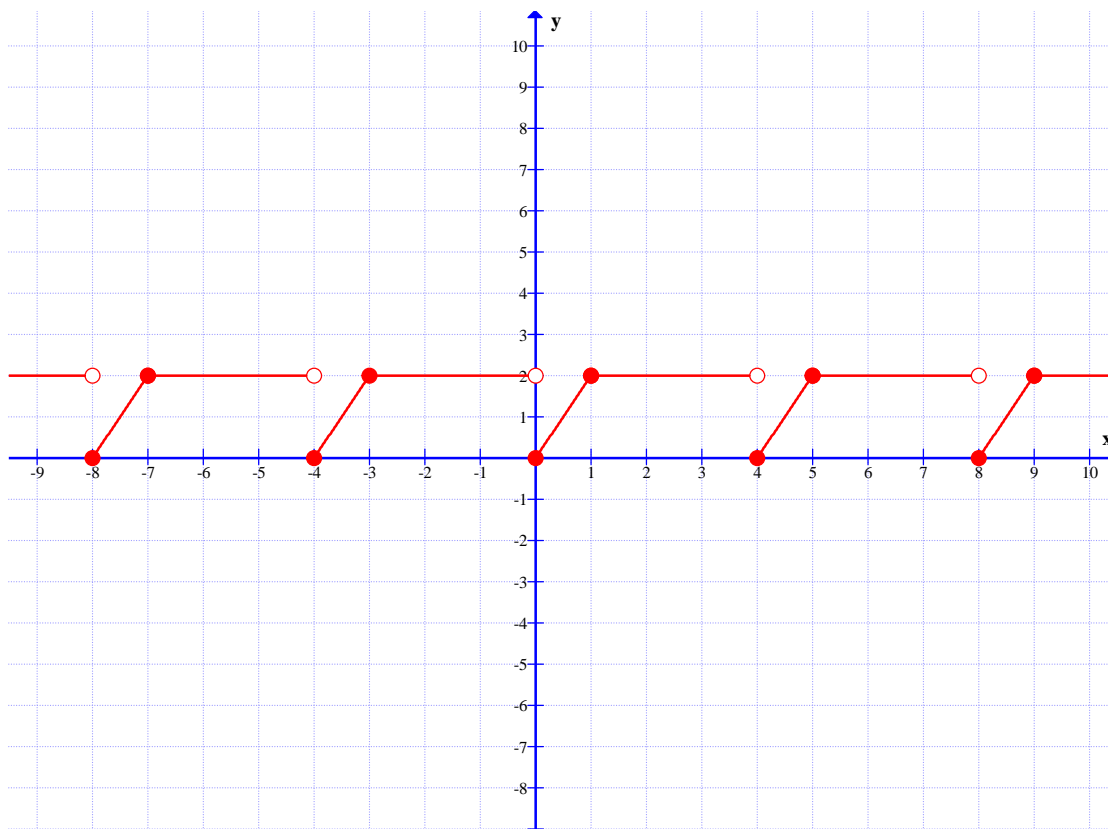
مهر ۱۳۹۹

درس اول: توابع متناوب و دوره ی تناوب

در این درس با مفهوم تناوب و توابع متناوب آشنا می شوید و در ادامه دوره ی تناوب را تعریف می کنیم. سپس روش های تعیین دوره ی تناوب برخی از توابع را نیز بیان می کنیم.

تابع متناوب

به نمودار تابع زیر توجه کنید.



همانطور که مشاهده می کنید. نمودار این تابع در فواصل معینی تکرار می شود.

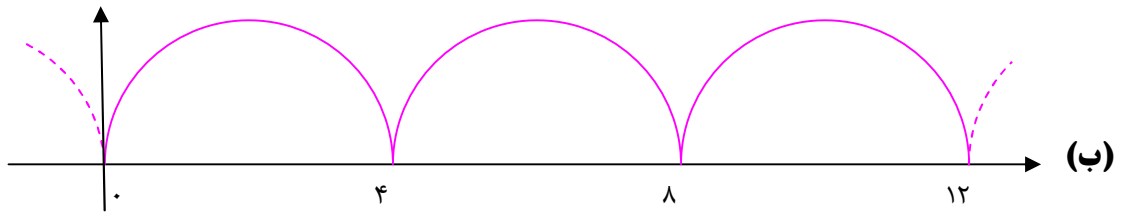
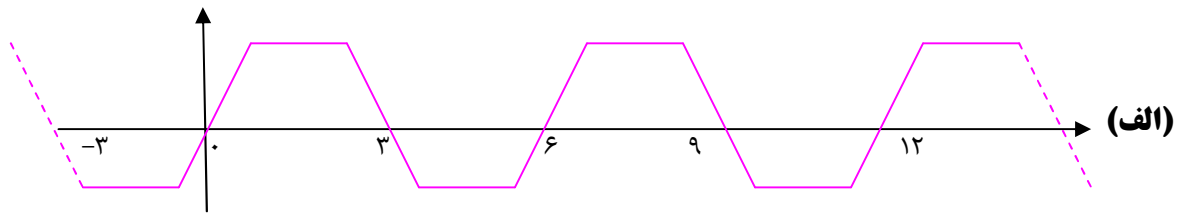
می توان گفت که نمودار تابع در فواصل به طول ۴ و در فواصل به طول ۸ واحدی و ... تکرار می شود.

این چنین توابعی را توابع **متناوب** می نامند. طول کوچکترین فاصله ای که نمودار تابع در آن تکرار می شود را

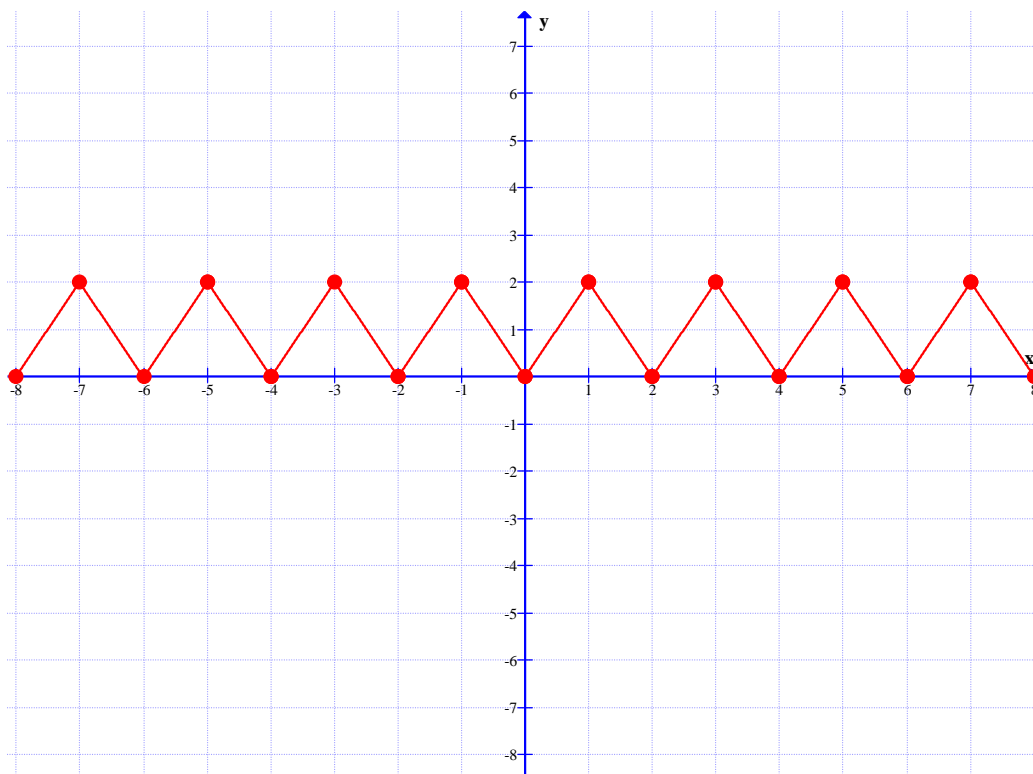
دوره ی تناوب (دوره ی تناوب اصلی) می نامند و آن را با T نمایش می دهند. در تابع فوق دوره ی تناوب

برابر ۴ است.

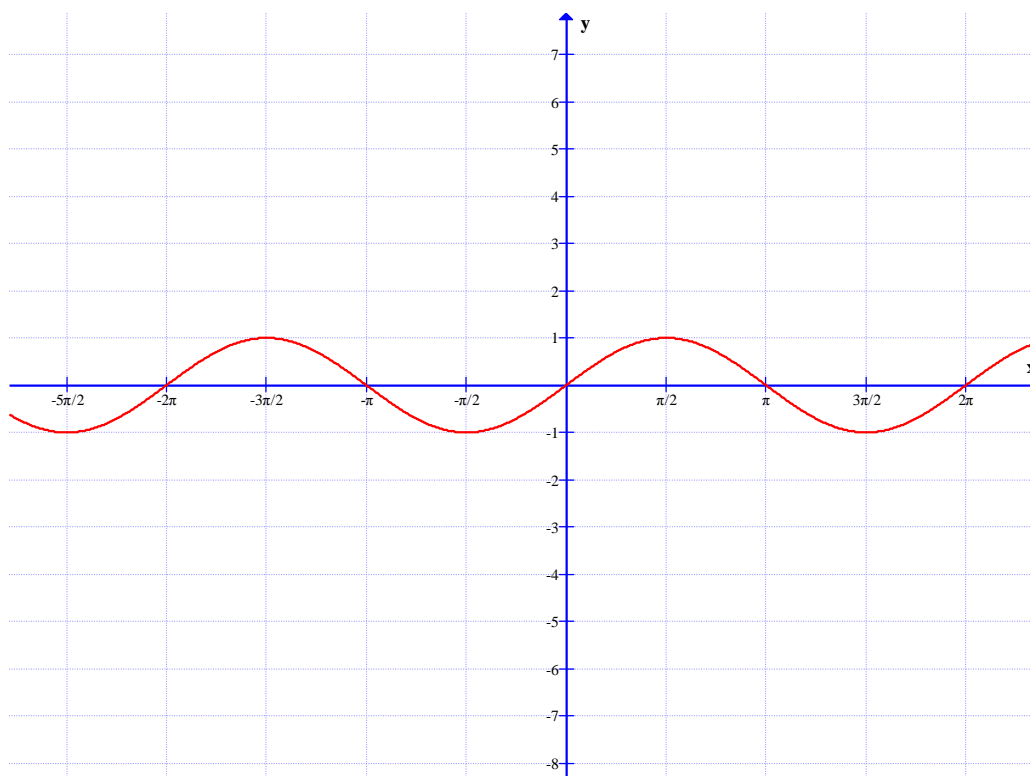
تمرین ۱: توابع زیر متناوب هستند. دوره‌ی تناوب هر یک را تعیین کنید.



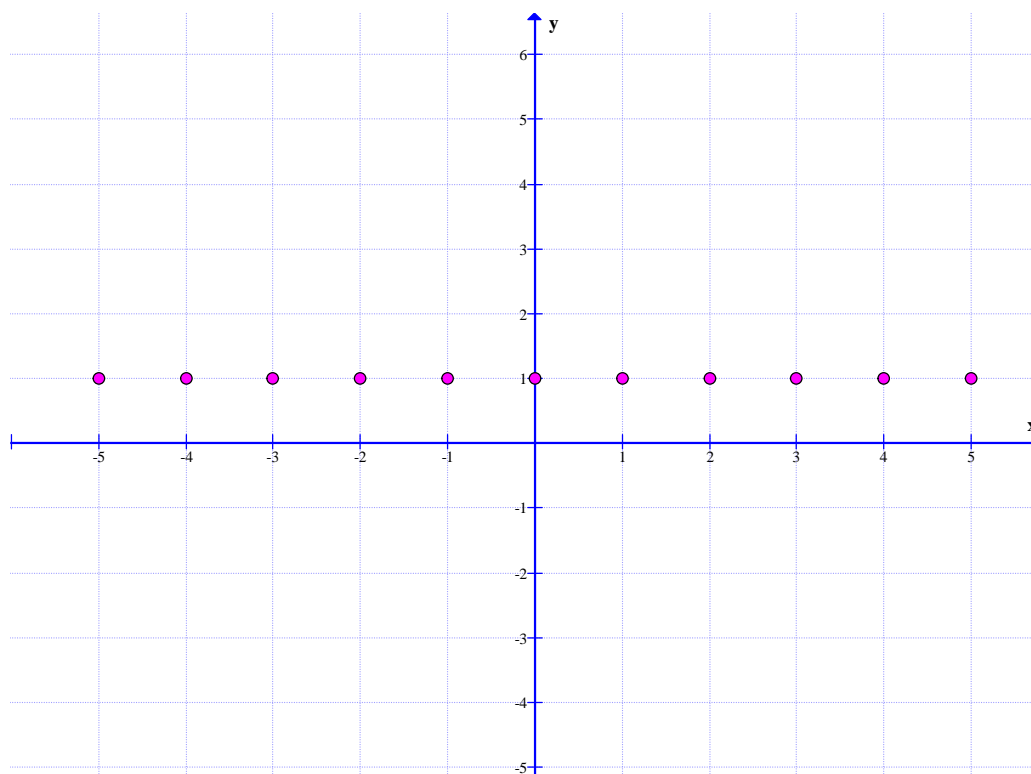
(پ)



(ت)



(ث)



تمرین ۲: به کمک رسم نمودار ثابت کنید که تابع $f(x) = \sin x$ متناوب است. دوره‌ی تناوب اصلی آن را بدست آورید.

نتیجه: در واقع تابع متناوب، تابعی است که در فواصل معینی نمودار آن تکرار می‌شود و دوره‌ی تناوب آن، کوچکترین طول بازه‌ای است که در آن، نمودار تابع تکرار می‌گردد. اکنون تابع متناوب را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

اگر تابع $y = f(x)$ دو شرط زیر را داشته باشد، آن را **متناوب** گویند.

الف) هرگاه عدد مثبتی مانند c وجود داشته باشد، به طوری که وقتی x عضو دامنه باشد، آنگاه $x + c$ نیز عضو دامنه است.

$$x \in D_f \xrightarrow{\exists c > 0} (x + c) \in D_f$$

$$f(x + c) = f(x) \quad \text{ب)}$$

در این صورت کمترین مقدار مثبت c را با T نمایش می‌دهیم و آن را **دوره‌ی تناوب** (دوره‌ی تناوب اصلی) می‌نامیم.

مثال: نشان دهید که توابع زیر متناوب هستند.

الف) $f(x) = \sin x$

ب) $f(x) = \cos x$

حل:

الف: واضح است که برای هر عدد صحیح k تساوی $\sin(2k\pi + x) = \sin x$ برقرار است. لذا می‌توان

$$\text{نوشت } f(2k\pi + x) = f(x)$$

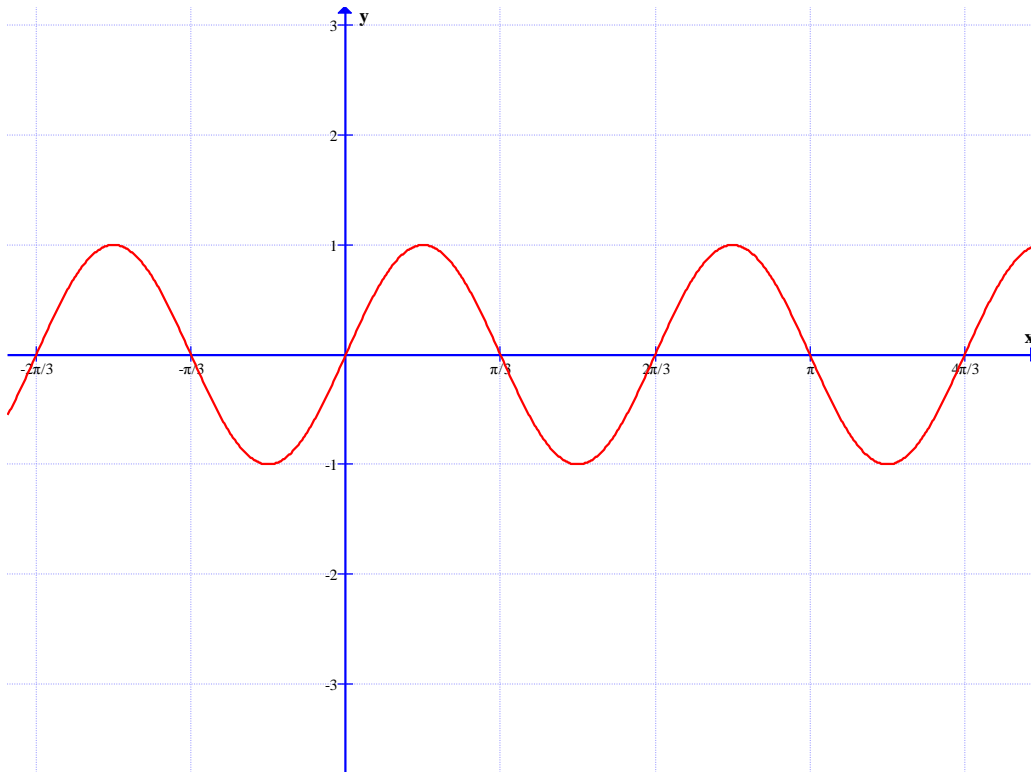
پس طبق تعریف، این تابع متناوب است و دوره‌ی تناوب آن به ازای $k = 1$ برابر $T = 2\pi$ است.

ب: واضح است که برای هر عدد صحیح k تساوی $\cos(2k\pi + x) = \cos x$ برقرار است. لذا می‌توان

$$\text{نوشت } f(2k\pi + x) = f(x)$$

پس طبق تعریف این تابع متناوب است و دوره‌ی تناوب آن به ازای $k = 1$ برابر $T = 2\pi$ است.

تمرین ۳: در زیر نمودار تابع $f(x) = \sin 3x$ را رسم شده است. دوره‌ی تناوب آن را به کمک نمودار تعیین کنید.



تمرین ۴ :

الف : ثابت کنید که تابع $f(x) = 2\sin x$ متناوب است. دوره‌ی تناوب اصلی آن را بدست آورید.
 ب : مقدار ماگزیمم و می نیمم این تابع را تعیین کنید.

تمرین ۵ :

الف : ثابت کنید که تابع $f(x) = \cos 2x$ متناوب است. دوره‌ی تناوب اصلی آن را بدست آورید.
 ب : مقدار ماگزیمم و می نیمم این تابع را تعیین کنید.

توجه : برای توابع $f(x) = a\cos bx + c$ و $f(x) = a\sin bx + c$ می توان گفت که :

الف : مقدار ماگزیمم برابر $|a| + c$ ب : مقدار می نیمم برابر $-|a| + c$

پ : دوره‌ی تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$

مثال : مقدار ماگزیمم و مقدار می نیمم و دوره‌ی تناوب تابع به معادله‌ی $f(x) = -3\cos 2x + 5$ را تعیین کنید.

حل :

$$\max(f) = |a| + c = |-3| + 5 = 8 \text{ مقدار ماکزیمم}$$

$$\min(f) = -|a| + c = -|-3| + 5 = 2 \text{ مقدار می نیمم}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi \text{ دوره‌ی تناوب}$$

مثال: معادله‌ی یک تابع سینوسی را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۱- و مقدار می نیمم آن ۷- و دوره‌ی تناوب آن 4π باشد.

حل :

$$f(x) = a \sin bx + c \quad |a| + c = -1 \text{ مقدار ماکزیمم} \quad -|a| + c = -7 \text{ مقدار می نیمم}$$

با توجه به دو تساوی فوق می توان نتیجه گرفت که $2c = -8$ پس $c = -4$ لذا :

$$|a| - 4 = -1 \rightarrow |a| = 3 \rightarrow a = \pm 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

پس می توان گفت که این تابع به یکی از شکل های زیر است.

$$f(x) = 3 \sin \frac{1}{2}x - 4 \quad \text{یا} \quad f(x) = -3 \sin \frac{1}{2}x - 4$$

توجه : برای نوشتن معادله‌ی توابع مثلثاتی به صورت

$$f(x) = a \sin bx + c \quad \text{یا} \quad f(x) = a \cos bx + c$$

وقتی که مقدار ماکزیمم و مقدار می نیمم و دوره‌ی تناوب معلوم باشد. می توان گفت که :

$$\text{الف : مقدار } b \text{ را مثبت قرار می دهیم و } b = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{ب : } a = \pm \frac{\max(f) - \min(f)}{2} \quad \text{ج : } c = \frac{\max(f) + \min(f)}{2}$$

مثال: معادله‌ی یک تابع سینوسی را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۱- و مقدار می نیمم آن ۷- و دوره‌ی تناوب آن 4π باشد.

حل :

$$a = \pm \frac{\max(f) - \min(f)}{2} = \pm \frac{-1 - (-7)}{2} = \pm 3$$

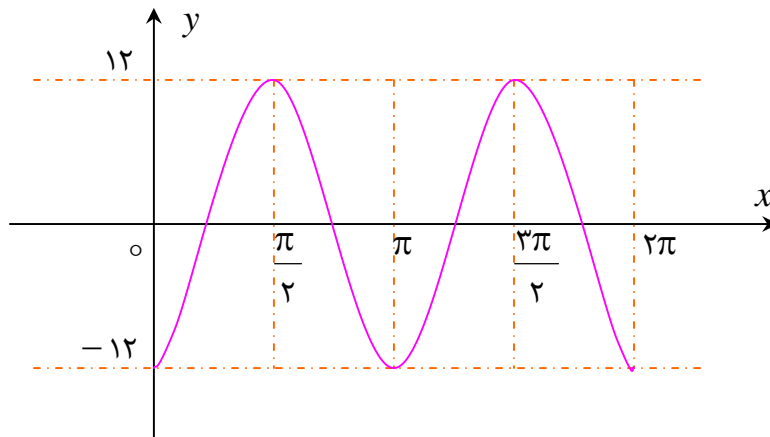
$$b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{\max(f) + \min(f)}{2} = \frac{-1 + (-7)}{2} = -4$$

پس می توان گفت که این تابع به یکی از شکل های زیر است.

$$f(x) = 3 \sin \frac{1}{2}x - 4 \quad \text{یا} \quad f(x) = -3 \sin \frac{1}{2}x - 4$$

مثال: معادله ی یک تابع (سینوسی یا کسینوسی) برای نمودار زیر بنویسید.



حل: بدون در نظر گرفتن انتقال، این تابع می تواند یک تابع کسینوسی باشد و معادله ی آن به صورت

$$y = a \cos bx + c$$

$T = \pi$ خواهد بود. از طرفی با توجه شکل معلوم است که دوره ی تناوب تابع برابر

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

است. از طرفی برای این تابع $T = \pi$ است. پس

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \rightarrow |b| = 2 \rightarrow b = \pm 2$$

برای تعیین مقدار a کافی است مختصات یک نقطه از نمودار تابع را در معادله ی فوق، جایگزین کنیم. در این

جا می توان، نقطه ی $(0, -12)$ را در نظر گرفت.

$$y = a \cos bx \xrightarrow{(0, -12)} -12 = a \cos b(0) \rightarrow -12 = a \times 1 \rightarrow a = -12$$

در نهایت معادله ی تابع را بدین شکل خواهیم داشت.

$$y = -12 \cos 2x$$

توجه: به دلیل متقارن بودن نقاط ماکزیمم و می نیمم این تابع، معلوم می شود که تابع انتقال عمودی ندارد

و لذا $c = 0$ می باشد.

روش دوم: بدون در نظر گرفتن انتقال، این تابع می تواند یک تابع کسینوسی باشد و معادله‌ی آن به

صورت $y = a \cos bx + c$ خواهد بود

$$a = \pm \frac{\max(f) - \min(f)}{2} = \pm \frac{12 - (-12)}{2} = \pm 12$$

$$b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$c = \frac{\max(f) + \min(f)}{2} = \frac{12 + (-12)}{2} = 0$$

پس می توان گفت که این تابع به یکی از شکل های زیر است.

$$f(x) = 12 \cos 2x \quad \text{یا} \quad f(x) = -12 \cos 2x$$

اما چون نمودار تابع از نقطه‌ی $(0, -12)$ می گذرد، پس فقط معادله‌ی تابع $f(x) = -12 \cos 2x$ قابل

قبول است.

تمرین برای حل:

۶: دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

۱) $y = 3 \sin(2x) - 2$

۵) $y = 1 + 2 \sin 7x$

۲) $y = \pi \sin(-x) + 1$

۶) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$

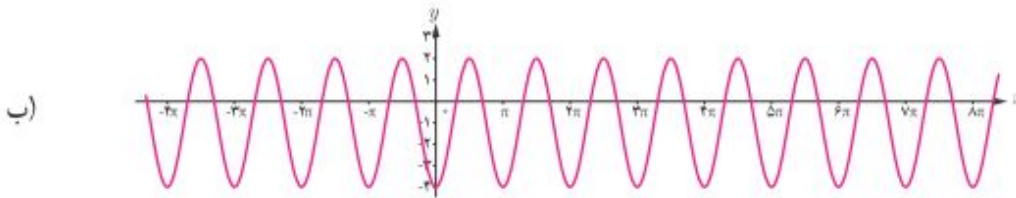
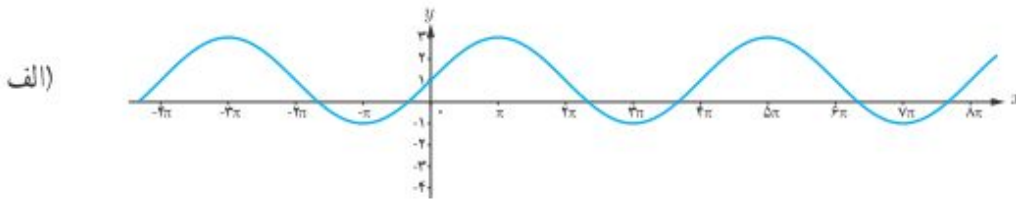
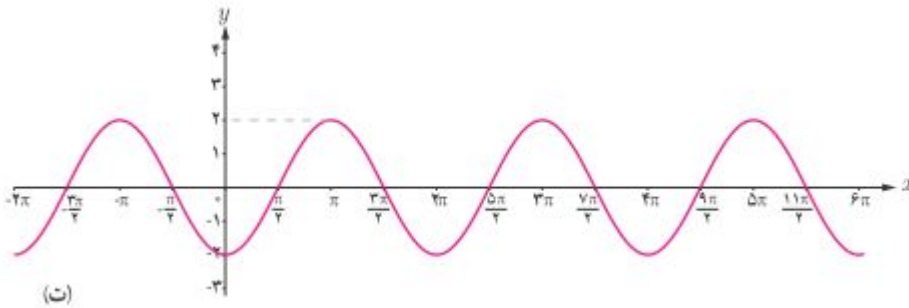
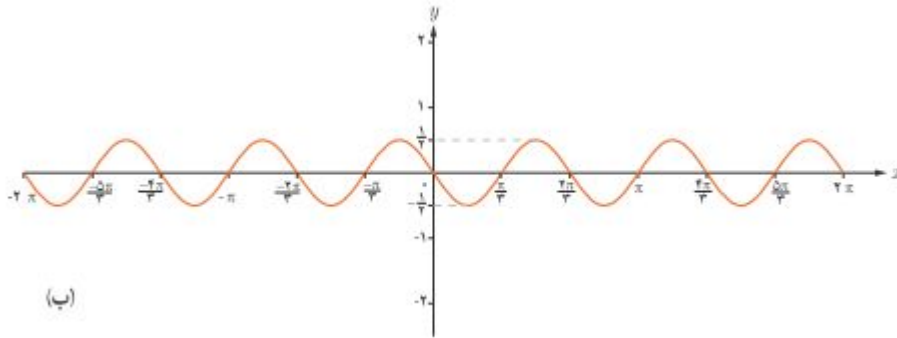
۳) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

۷) $y = -\pi \sin \frac{1}{2}(x - 2)$

۴) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

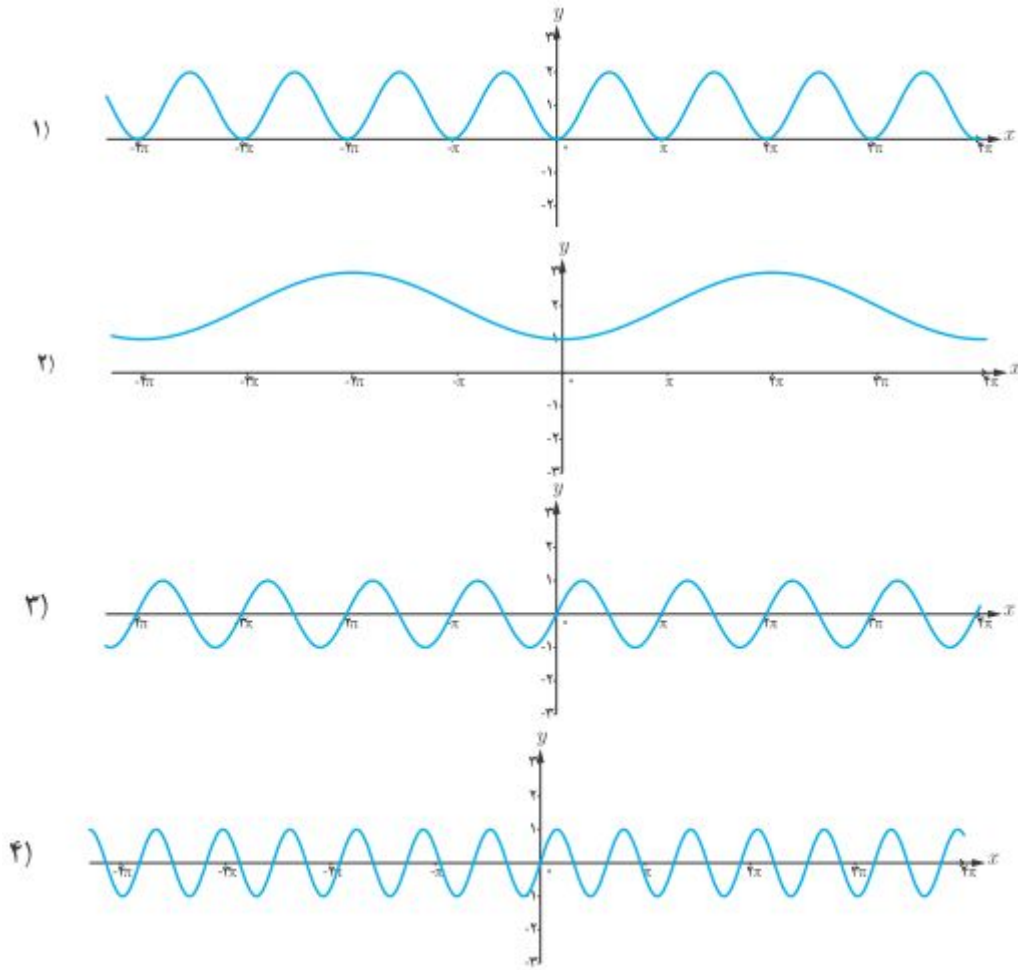
۸) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

۷: معادله ی یک تابع (سینوسی یا کسینوسی) متناظر با هر یک از نمودار های زیر بنویسید.



۸: هر یک از توابع زیر را به یکی از نمودار های داده شده نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$ ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{2} x$ پ) $y = \sin 2x$ ت) $y = 1 - \cos 2x$



۹: برای هر مورد تمام توابع مثلثاتی را معرفی کنید که مشخصات داده شده را داشته باشند.

الف) $T = \pi$ و $\max = 3$ و $\min = -3$ پ) $T = 4\pi$ و $\max = -1$ و $\min = -7$

ب) $T = 3$ و $\max = 9$ و $\min = 3$ ت) $T = \frac{\pi}{2}$ و $\max = 1$ و $\min = -1$

۱۰: دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y = \sin \frac{3x}{m+1}$ برابر 5π است. مقدار m را بیابید.

تهیه کننده : جابر عامری

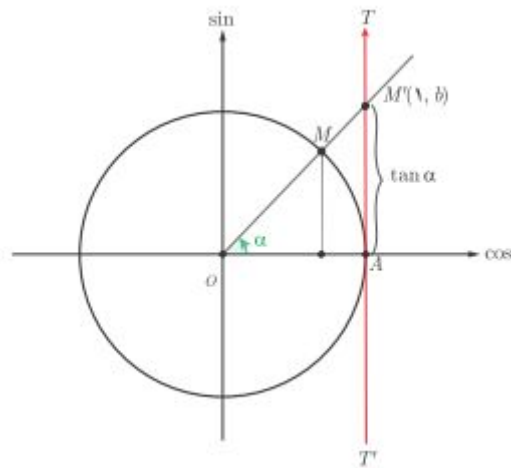
عضو گروه ریاضی دوره دوّم متوسطه استان خوزستان

درس دوم : تابع تانژانت

در سال گذشته با توابع سینوس و کسینوس و خواص آنها آشنا شده اید. در این درس تابع تانژانت را معرفی و ویژگی های آن را بیان می کنیم.

تابع تانژانت

دایره ی مثلثاتی روبرو را در نظر بگیرید. در این دایره خط $T'AT$ در نقطه ی A بر محور کسینوس ها عمود



است. اگر نقطه ی A مبدأ این محور و جهت آن از پایین به بالا فرض شود، طبق تعریف تانژانت می دانیم که $\tan(\alpha) = AM'$ و با توجه به مختصات نقطه-

ی M' می توان نوشت: $\tan(\alpha) = b$

با این دید می توان گفت که با تغییر زاویه ی α مقدار $\tan(\alpha)$ نیز تغییر می کند. پس نتیجه گرفته می شود که $f(x) = \tan(x)$ تابعی از زاویه ی x است. این

تابع را **تابع تانژانت** می نامند. تابع تانژانت دارای ویژگی های زیر است.

الف : اگر زاویه ی α در ربع اول یا سوم باشد، مقدار تابع مثبت است.

ب : اگر زاویه ی α در ربع دوم یا چهارم باشد، مقدار تابع منفی است.

ج : اگر زاویه ی α برابر صفر یا π رادیان باشد، مقدار تابع صفر است.

د : تابع در نقاط $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ تعریف نمی شود. به طور کلی دامنه و برد تابع تانژانت به شکل زیر است.

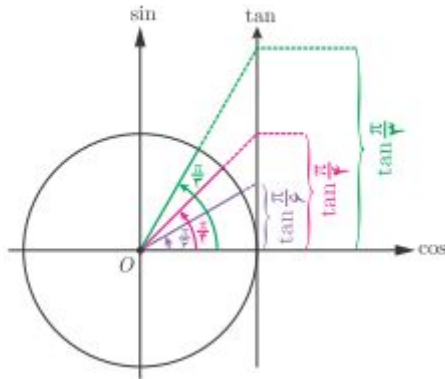
$$D_f = \{x \in R \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$$

$$R_f = R$$

و : چون $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ پس این تابع متناوب است و دوره ی تناوب آن $T = \pi$ می باشد.

به طور کلی دوره ی تناوب تابع $f(x) = a \tan(bx) + c$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

تغییرات تانژانت



با افزایش مقدار α در ربع اول مقدار تابع افزایش می یابد. با

نزدیک شدن مقدار α به $\frac{\pi}{2}$ مقدار تابع زیاد و زیادتر می شود.

تمرین ۱: با افزایش مقدار α در ربع های دوّم و سوّم و چهارم، روند تغییر مقدار تابع $f(x) = \tan(\alpha)$ را

بررسی کنید.

تمرین ۲: نمودار تابع $f(x) = \tan(\alpha)$ را در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

نتیجه: تابع تانژانت در یک دوره‌ی تناوب محصور بین مضرب های متوالی $\frac{\pi}{2}$ اکیداً صعودی است. اما در

دامنه اش نه صعودی و نه نزولی می باشد.

تمرین ۳: درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف : تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.

ب : تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

پ : اگر α زاویه ای در ربع اوّل دایره‌ی مثلثاتی باشد، در این صورت $\tan(\alpha) < \sin(\alpha)$

حل : الف: نادرست ب : درست پ : نادرست

تمرین برای حل :

۴: دامنه‌ی تابع $f(x) = \tan 2x$ را تعیین کنید.

۵: دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = 3 + 5 \tan(-4x)$ را تعیین کنید.

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره دوّم متوسطه استان خوزستان

درس سوم : روابط مثلثاتی دوبرابر زاویه

در این درس نسبت های مثلثاتی زاویه های دو برابر کمان را بیان نموده و با برخی از کاربردهای آنها آشنا می شویم.

نسبت های مثلثاتی زاویه های دو برابر زاویه

در محاسبات فنی گاهی لازم می شود که نسبت های مثلثاتی زاویه های مورد نیاز را به کمک مقدار آنها در دیگر زاویه ها به دست آورد. در اینجا روابطی بیان می کنیم که نسبت های سینوس و کسینوس دو برابر کمان را نشان می دهند. این روابط به شکل زیر هستند.

$$\text{الف) } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\text{ب) } \cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

مثال : به کمک نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی ۶۰ درجه تساوی های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \sin(120^\circ) =$$

$$\text{ب) } \cos(120^\circ) =$$

حل :

$$\text{الف) } \sin(120^\circ) = \sin 2(60^\circ) = 2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ب) } \cos(120^\circ) = \cos 2(60^\circ) = \cos^2(60^\circ) - \sin^2(60^\circ) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

توجه : با توجه به روابط مثلثاتی فوق می توان نوشت^۱ :

$$\text{الف) } \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\text{ب) } \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

مثال : سینوس و کسینوس زاویه‌ی ۱۵ درجه را محاسبه کنید.

حل :

^۱ . روابط طلایی مثلثات

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \xrightarrow{\alpha=15^\circ} \sin^2(15) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2(15))$$

$$\rightarrow \sin^2(15) = \frac{1}{2}(1 - \cos(30))$$

$$\rightarrow \sin^2(15) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$\rightarrow \sin^2(15) = \frac{1}{2}\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\rightarrow \sin^2(15) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\rightarrow \sin(15) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

همچنین

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \xrightarrow{\alpha=15^\circ} \cos^2(15) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2(15))$$

$$\rightarrow \cos^2(15) = \frac{1}{2}(1 + \cos(30))$$

$$\rightarrow \cos^2(15) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$\rightarrow \cos^2(15) = \frac{1}{2}\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\rightarrow \cos^2(15) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\rightarrow \cos(15) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

مثال: تساوی مقابل را ثابت کنید.

$$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$$

حل: از طرف راست تساوی شروع می کنیم.

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$$

مثال: اگر α زاویه‌ای در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $\sin(2\alpha) =$

ب) $\cos(2\alpha) =$

حل:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\sin \alpha = \frac{3}{5}} \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

و چون α زاویه‌ای در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد، لذا جواب $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ قابل قبول نمی باشد. لذا:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

مثال: دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = 8 \sin^2 x + 1$$

حل:

$$f(x) = 8 \sin^2 x = 8 \times \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) + 1 = 4 - 4 \cos 2x + 1 = -4 \cos 2x + 5$$

مقدار ماکزیمم $\max(f) = |a| + c = |-4| + 5 = 9$

مقدار می نیمم $\min(f) = -|a| + c = -|-4| + 5 = 1$

دوره‌ی تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

تمرین برای حل :

۱ : اگر α زاویه‌ای حاده باشد و $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ ، مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $\sin(2\alpha) =$

ب) $\cos(2\alpha) =$

۲ : عبارت های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$

ب) $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

ج) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

۳ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $1 - \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2$

ب) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

ج) $\sin 4\theta = 4 \sin \theta \cos^3 \theta - 4 \sin^3 \theta \cos \theta$

د) $\sin 4\theta = 8 \sin \theta \cos^3 \theta - 4 \sin \theta \cos \theta$

د) $\sin^2(45 + \alpha) - \sin^2(45 - \alpha) = \sin 2\alpha$

۴ : سینوس و کسینوس زاویه‌ی $22/5$ درجه را به دست آورید.

۵ : حاصل $\sin(22/5)^\circ \times \cos(22/5)^\circ$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

۶ : مقادیر ماکزیمم و می نیمم و دوره‌ی تناوب توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = -10 \cos^2 x$

ب) $f(x) = 10 \sin x \cos x$

ج) $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x$

تهیه کننده : جابر عامری

درس چهارم : معادلات مثلثاتی

در این درس به تعریف ، بررسی و حل معادلات مثلثاتی می پردازیم و به کاربردهایی برای آنها نیز اشاره می کنیم.

معادله ی مثلثاتی

هر معادله که شامل نسبت های مثلثاتی باشد را معادله ی مثلثاتی می نامند. در هر معادله ی مثلثاتی، اطلاعاتی از نسبت های مثلثاتی یک زاویه ی مجهول را داریم و منظور از حل معادله ی مثلثاتی، یافتن زاویه یا زاویه هایی است که به ازاء آنها تساوی برقرار باشد. به مثال های زیر از یک معادله ی جبری و معادله ی مثلثاتی توجه کنید.

الف : معادله ی جبری

$$2x - 1 = 0$$

حل :

$$2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ب : معادله ی مثلثاتی

$$2 \sin x - 1 = 0$$

حل :

$$2 \sin x = 1 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

بیشمار زاویه وجود دارند که سینوس آنها برابر $\frac{1}{2}$ می شود. ولی کوچکترین زاویه ی مثبت از بین آنها $\frac{\pi}{6}$ است.

برای تعیین زاویه های دیگر می نویسیم.

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

این جواب را **جواب عمومی** معادله می نامند که در آن k یک عدد صحیح است. در واقع با اختیار مقداری

برای k یک جواب خاص برای معادله ی مثلثاتی به دست می آید.

برای حل هر معادله‌ی مثلثاتی باید ابتدا با انجام عملیاتی^۱ آن را به یکی از صورت های زیر تبدیل کرد و جواب عمومی آن را تعیین کرد.

| ردیف | صورت معادله | شرط داشتن جواب | یافتن زاویه | جواب عمومی |
|------|---------------|--------------------|-------------------------|--|
| ۱ | $\sin(u) = a$ | $-1 \leq a \leq 1$ | $\sin(u) = \sin \alpha$ | $u = 2k\pi + \alpha$ $u = (2k + 1)\pi - \alpha$ |
| ۲ | $\cos(u) = b$ | $-1 \leq b \leq 1$ | $\cos(u) = \cos \alpha$ | $u = 2k\pi + \alpha$ $u = 2k\pi - \alpha$ |

تذکر: با توجه به این جدول

(۱) اگر مقدار a منفی باشد، در فرمول جواب قرینه‌ی زاویه‌ی α را قرار دهید.

(۲) اگر مقدار b منفی باشد، در فرمول جواب مکمل زاویه‌ی α را قرار دهید.

(۳) α کوچکترین زاویه‌ی غیر منفی است که تساوی به ازاء آن برقرار می باشد و آنرا **زاویه‌ی اصلی** می نامند.

برای تعیین زاویه‌ی اصلی در صورت وجود می توانید از جدول مقادیر نسبت های مثلثاتی استفاده کنید و در غیر این صورت می توانید به ذکر α اکتفا کنید.

مثال ۱: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0$$

حل:

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0 \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

مثال ۲: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 \cos x - 1 = 0$$

حل:

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

مثال ۳: معادله‌ی زیر را حل کنید.

^۱ رایج ترین این عملیات، استفاده از فرمول های مثلثاتی و فاکتور گیری است. این عملیات به دو منظور بکار می روند.
الف: یکسان سازی نسبت های مثلثاتی
ب: یکسان سازی زاویه‌ی مثلثاتی

$$2 \cos x + \sqrt{3} = 0$$

حل :

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

مثال ۴: معادله ی زیر را حل کنید.

$$\sin 3x - 1 = 0$$

حل :

$$\sin 3x = 1 \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{2}} \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

حالت های خاص معادلات مثلثاتی

علاوه بر جدول کلی فوق در حل معادلات مثلثاتی می توان از حالت های خاص زیر نیز استفاده نمود.

| | |
|--|--|
| $\sin(u) = 1 \rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ | $\cos(u) = 1 \rightarrow u = 2k\pi$ |
| $\sin(u) = 0 \rightarrow u = k\pi$ | $\cos(u) = 0 \rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$ |
| $\sin(u) = -1 \rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ | $\cos(u) = -1 \rightarrow u = 2k\pi + \pi$ |

مثال ۱: معادله ی زیر را حل کنید.

$$\sin 2x - 1 = 0$$

حل :

$$\sin 2x = 1 \xrightarrow{\text{ع.ح}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

مثال ۲: معادله ی زیر را حل کنید.

$$\sin^2 x + \sin x = 0$$

حل:

$$\sin x(\sin x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{ع.ح}} x = k\pi \\ \sin x = -1 \xrightarrow{\text{ع.ح}} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

مثال ۳: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$$

حل:

$$(\sin x - 1)(\sin x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \xrightarrow{\text{ع.ح}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = 2 \quad \text{غ.ق} \end{cases}$$

مثال ۴: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\sin x + \cos x = 1$$

حل:

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

یادآوری: دو تساوی مهم و مفید را به خاطر داشته باشید.

| | |
|--|--|
| الف) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ | ب) $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ |
|--|--|

توجه: به کمک جواب عمومی می‌توانید، مجموعه‌ی جواب‌های معادله را در یک محدوده‌ی مشخص را نیز

تعیین کرد. برای این کار مقدار مختلف برای k اختیار کنید.

مثال ۱: معادله‌ی زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب‌های آن را در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ را تعیین کنید.

$$2\sin 2x - 1 = 0$$

حل:

$$2 \sin 2x - 1 = 0 \rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} & (1) \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} & (2) \end{cases}$$

اکنون برای هر یک از جواب های عمومی بدست آمده، جدولی مشابه جدول زیر تنظیم می کنیم و با انتخاب مقادیر مختلف برای k ، جواب های مورد نظر در محدوده ی داده شده را تعیین می کنیم.

| k | ۰ | ۱ | ۲ |
|----------|--------------------------------------|---|----------------|
| θ | $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{13\pi}{12}$ و $\frac{17\pi}{12}$ | بیش از حد مجاز |

لذا مجموعه ی جواب در فاصله ی داده شده برابر $\left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \right\}$

مثال ۲: معادله ی زیر را حل کنید و مجموعه ی جواب های آن را در فاصله ی $[-2\pi, 2\pi]$ را تعیین کنید.

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

حل:

$$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin^2 x + \sin x = \frac{3}{4} \rightarrow 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$$

$$\Delta = (4)^2 - 4(4)(-3) = 64 \rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{-4 + 8}{8} = \frac{1}{2} & (1) \\ \sin x = \frac{-4 - 8}{8} = -\frac{3}{2} & \text{غ م} \end{cases}$$

اکنون معادله ی (۱) را به شکل زیر ادامه می دهیم.

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

| k | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ |
|----------|-----------------|---|--|----------------|
| θ | کمتر از حد مجاز | $-\frac{11\pi}{6}$ و $-\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ | بیش از حد مجاز |

لذا مجموعه ی جواب در فاصله ی داده شده برابر $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6} \right\}$

تمرین برای حل:

۱: معادله های زیر را حل کنید.

$$۱-۱) ۲ \sin x + ۱ = ۰$$

$$۱-۵) ۲ \cos 3x - \sqrt{2} = ۰$$

$$۱-۲) \sin \frac{\pi}{2} = \sin 3x$$

$$۱-۶) \sin x = \sin 2x$$

$$۱-۳) ۲ \sin x - \sqrt{3} = ۰$$

$$۱-۷) \sin 5x = \cos x$$

$$۱-۴) ۴ \sin x + \sqrt{8} = ۰$$

$$۱-۸) \sin x - \cos x = ۰$$

۲: معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$۳) \cos^2 x - 3 \cos x = ۰$$

$$۲) \sin 2x + 2 \sin^2 x = ۰$$

$$۴) \cos x (2 \cos x - 9) = 5$$

۳: معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) \cos x = \cos 2x$$

$$۴) \sin x - \cos 2x = ۰$$

$$۲) \sin x - \cos x = ۱$$

$$۵) \sin 2x + \sqrt{2} \cos x = ۰$$

$$۳) \cos 2x - \cos x + ۱ = ۰$$

$$۶) \sin x + \cos x = ۱$$

۴: معادله های زیر را حل کنید.

$$الف) 4 \sin 3x \cos 3x - 1 = ۰$$

$$ب) 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - 1 = ۰$$

۵: مجموعه ی جواب معادله ی زیر را در فاصله ی $[0, 2\pi]$ بدست آورید.

$$\cos 2x - \sin x = ۰$$

۶: مجموعه ی جواب معادله ی زیر را در فاصله ی $[-\pi, \pi]$ بدست آورید.

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = ۰$$

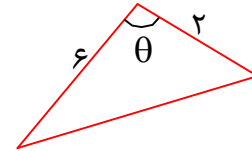
حل چند تمرین کاربردی برای معادلات مثلثاتی

۱: آیا می توان مثلثی رسم کرد که طول دو ضلع آن ۲ و ۶ سانتی متر باشد و مساحت آن ۳ سانتی متر مربع

شود. مسئله چند جواب دارد؟

حل: فرض کنیم که چنین مثلثی وجود داشته باشد. لذا

$$S = 3 \xrightarrow{0 < \theta < \pi} \frac{1}{2}(2)(6) \sin \theta = 3 \rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$$

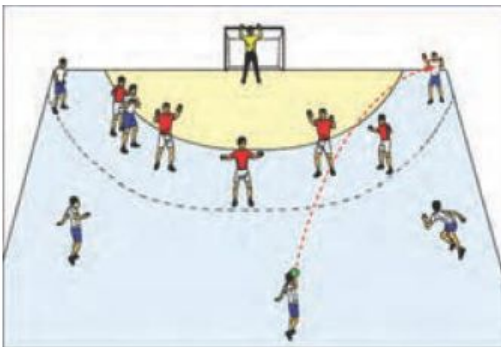


$$\alpha = \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \theta = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

حال مقدار θ مجاز را تعیین می کنیم.

| k | \cdot | ۱ | ۲ |
|----------|--|----------------|----------------|
| θ | $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ | بیش از حد مجاز | بیش از حد مجاز |

لذا دو مثلث با چنین شرایطی (زاویه های داخلی هر مثلث مثبت و کمتر از ۱۸۰ درجه) وجود دارد.



۳: یک بازیکن هندبال، توپ را با سرعت ۱۶ متر بر ثانیه

برای هم تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب

می کند. اگر رابطه ی بین سرعت توپ (۷ بر حسب متر بر

ثانیه)، مسافت طی شده افقی (d بر حسب متر) و زاویه ی

پرتاب (θ) به صورت زیر باشد. آنگاه زاویه ی پرتاب توپ

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$$

چقدر بوده است؟

حل:

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{10} \rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 10}{256} = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2\theta = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \theta = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ \theta = (2k + 1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

| k | ۰ | ۱ | ۲ |
|----------|--------------------------------------|----------------|----------------|
| θ | $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ | بیش از حد مجاز | بیش از حد مجاز |

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ می باشد.

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره دوم متوسطه

استان خوزستان