# ریاضی ۲

## پایه ی یازدهم « رشته ی علوم تجربی »

## فصل ۳ : تابع

**تهیه کننده : جابرعامری**

**عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه**

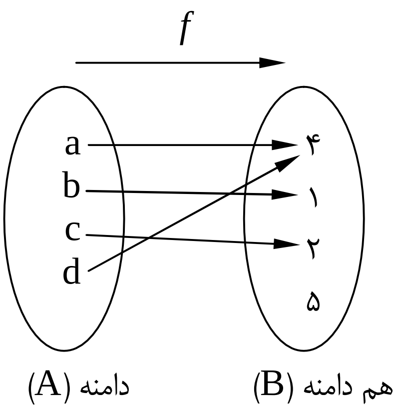
**استان خوزستان**

**مهر ۱۳۹۹**

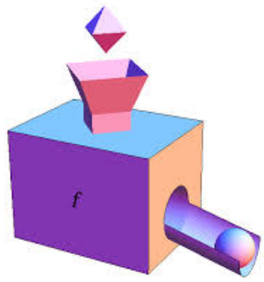
# درس اوّل : تابع

آشنایی با مفهوم تابع به عنوان یکی از مفاهیم اساسی ریاضیات ، برای درک و فهم بسیاری مفاهیم دیگر در ریاضیات و فیزیک و ... لازم و ضروری است. در سال قبل به صورت مقدماتی با این مفهوم آشنا شدید. در اینجا ضمن یادآوری آن، موضوعات تکمیلی دیگری را معرفی می کنیم.

## قسمت اوّل : یادآوری مفهوم تابع




هر رابطه که هر عضو مجموعه‌ی $A$ را **دقیقاً** به یک عضو از مجموعه‌ی $B$ نسبت دهد را یک **تابع** از مجموعه‌ی $A$ به مجموعه‌ی $B$ می نامند.




یک تابع از مجموعه‌ی $A$ به مجموعه‌ی $B$، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن، به هر عضو از $A$ دقیقاً یک عضو از $B$ نظیر می شود. در این وضعیت مجموعه‌ی $A$ را **دامنه** و مجموعه‌ی $B$ را **هم دامنه** یا مقصد تابع می نامند و می نویسند.

$$f : A \to B$$

در یاضیات، تابع را به روش های مختلفی نمایش می دهند. مهمترین این روش ها عبارتند از :

### ۱ : نمایش پیکانی

یک رابطه از مجموعه‌ی $A$ به مجموعه‌ی $B$، که با **روش پیکانی** یا نمودار وِن نمایش داده می شود، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو $A$ دقیقاً یک پیکان خارج شود. در این روش نمایش تابع، ممکن است به یک یا چند عضو هم دامنه پیکانی وارد نشود، یا به بعضی از آنها یک یا چند پیکان وارد شود. هر زیر مجموعه از هم دامنه که به آن پیکان وارد شده است را **برد** تابع می نامند.

در تابع مثال فوق داریم.

دامنه $A = D_f = \{a,b,c,d\}$ هم دامنه $B = \{۱,۲,۴,۵\}$ برد $R_f = \{۱,۲,۴\}$

**تذکر :** مجموعه‌ی تمام عضو هایی که یک تابع روی آنها اثـر مـی کنـد ( کـه همگـی در مجموعـه‌ی $A$ هستند.) را **دامنه** و مجموعه‌ی تمام عضوهایی از مجموعه‌ی $B$ ( هم دامنه ) که متناظر با اعضای دامنه قرار می گیرند را **برد** آن تابع می نامند. معمولاً دامنه‌ی تابع $f$ را با $D_f$ و برد آن را با $R_f$ نمایش می دهند.

***

### ۲ : نمایش تابع توسط زوج های مرتب

مجموعه‌ای از زوج های مرتب[1] را در نظر می گیریم. اگر هیچ دو زوج مرتب متمایزی موجود نباشند که مولفه های اوّل آنها برابر باشند، این مجموعه تابعی خواهد بود که درآن مولفه های اوّل، اعضای دامنه و مولفه های دوّم ، اعضای برد می باشند.

به عنوان مثال، تابعی که در مورد (۱) با روش پیکانی نمایش داده ایم. در واقع مجموعه‌ی زوج های مرتبی به صورت زیر را تشکیل می دهد.

$$f=\{(a,۴),(b,۱),(c,۲),(d,۴)\}$$

به طور کلی برای تابع $f$ که از $x$ به $y$ تعریف شده است، می توان نوشت:

$$f=\{(x,y)\,|\,x\in D_f\,,y\in R_f\}$$

بنابراین در نمایش تابع به صورت **زوج مرتب**، اگر زوج های مرتب دارای مولفه های اوّل برابر باشـند، بایـد مولفه های دوّم آن ها نیز برابر باشند[2].

**تمرین ۱ :** دامنه و برد تابع زیر را بنویسید.

$$f=\{(۳,۲),(۵,۸),(-۳,۲),(۲,۴),(۱,۲)\}$$

### ۳ : نمایش تابع از طریق ضابطه

برای تابع $f$ که از مجموعه‌ی $A$ به مجموعه‌ی $B$ تعریف شده اسـت. رابطـه‌ای کـه هـر $x$ از $A$ را بـه $y$ متناظرش از $B$ مرتبط می کند. **ضابطه** یا قانون تابع می گوییم و به صورت زیر نمایش می دهیم.

---

[1]. هر دو تایی به شکل $(a,b)$ که محل قرار گرفتن اجزای آن مهم است را زوج مرتب می نامند. $a$ را مؤلفه‌ی اوّل (طـول) و $b$ را مؤلفه‌ی دوّم (عرض) می نامند.

[2]. اگر چنین نباشد، مجموعه ی داده شده تابع نیست.

$$f : A \to B$$
$$y = f(x)$$

به عنوان مثال اگر تابع به هر عضو مجموعه‌ی $A = R$ مربع آن را نسبت دهد، در این صورت می توان نوشت.

$$f : R \to [۰,+\infty)$$
$$y = f(x) = x^{۲}$$

**تذکر :** خروجی هر عضو دامنه مانند $x$ را با $y$ یا $f(x)$ نمایش می دهند.

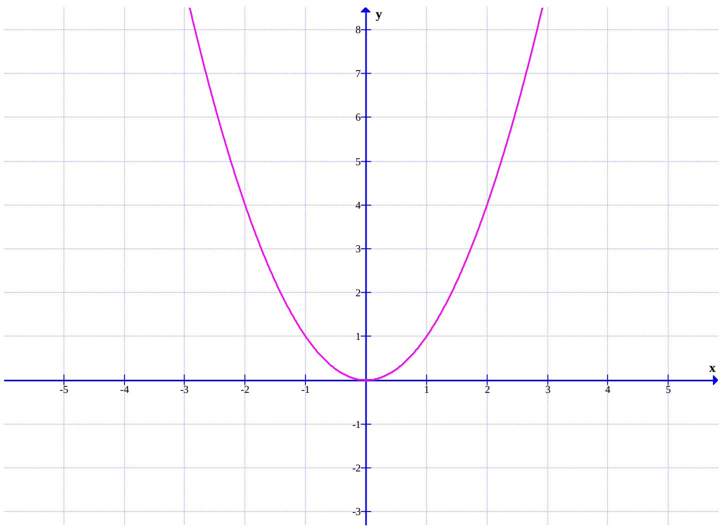
**مثال الف :** اگر گفته شود که تابع $f(x) = \frac{x+۱}{۲x-۶}$ داده شده است. نتیجه می گیریم که دامنه‌ی تابع باید $R - \{۳\}$ باشد.

**مثال ب :** اگر گفته شود که تابع $g(x) = \sqrt{۴ - x}$ داده شده است. نتیجه می گیریم که دامنه‌ی تابع باید $(-\infty,۴]$ باشد.

### ۴ : نمایش تابع به صورت هندسی (نمایش دکارتی)

اگر مجموعه ی $f$ ، نمایش زوج های مرتب تشکیل دهنده ی یک تابع باشد، هر زوج مرتب مانند $(a,b) \in f$ یک نقطه از صفحه ( در دستگاه مختصات دکارتی) را مشخص می کند. با تعیین محل تمام نقاط، نمودار ( منحنی) تابع $f$ پدید می آید.

برای مثال نمودار تابع $f(x) = x^{۲}$ به شکل زیر است. که قبلاً آن را سهمی نامیده ایم.



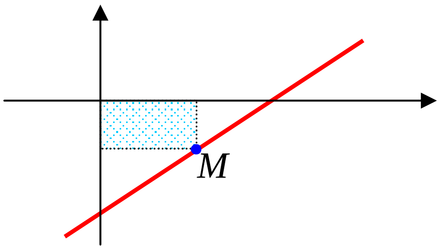
از دیدگاه هندسی،یک منحنی هنگامی نمایش یک تابع است که هر خط موازی محور عرضها آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. ( آزمون خط قائم )

**تمرین۲ :** نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x}$ ب) $f(x)=\frac{۱}{x}$ ج) $f(x)=|x|$

***

**تمرین۳ :** در شکل مقابل یک مستطیل به محور های مختصات وخط $۲y+x=۱$ محدود شده است، معادله‌ی تابعی را بنویسید که مساحت مستطیل را به $x$ وابسته کند.

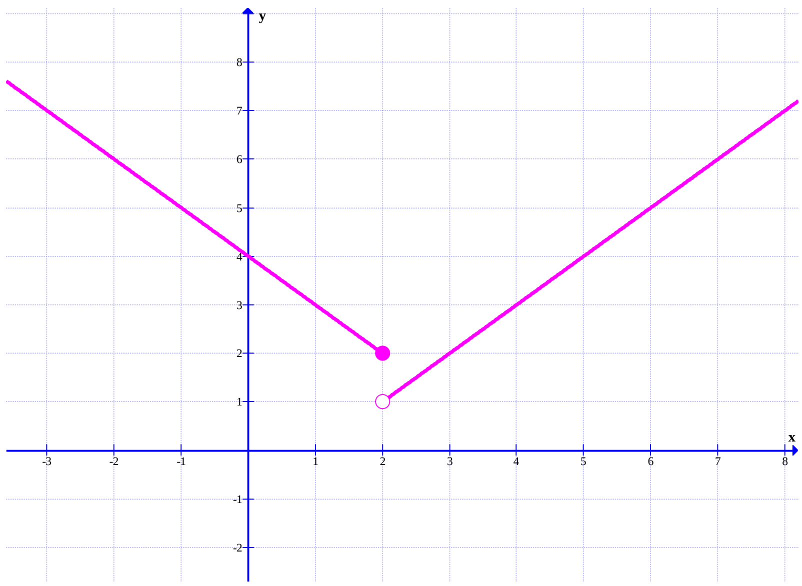



***

**توجه:** گاهی تابع را فقط با یک ضابطه تعریف می کنند، ولی گاهی لازم است که تابع را با چند ضابطه تعریف کرد. تابع زیر نمونه ای از یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x)=\begin{cases} x-۱ & x>۲ \\ ۴-x & x\leq ۲ \end{cases}$$

نمودار این تابع نیز به شکل زیر است.




روش رسم این تابع را توضیح دهید؟

**مثال۱:** تابع قدر مطلق یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

$$D_f=\{x\in R \mid x\geq ۰\}\cup\{x\in R \mid x<۰\}=R$$
$$R_f=\{y\in R \mid y\geq ۰\}=[۰,+\infty)$$

**مثال۲:** تابع علامت یک تابع سه ضابطه ای است.

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

$$D_S=\{x\in R \mid x>۰\}\cup\{۰\}\cup\{x\in R \mid x<۰\}=R$$
$$R_S=\{۱,۰,-۱\}$$

**تمرین۴ :** نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۰ \\ -۲x-۳ & x<۰ \end{cases}$$

❊❊❊

## قسمت دوّم : آشنایی با برخی از انواع توابع

توابع دارای انواع مختلف می باشند، در اینجا به چند نوع اشاره می کنیم.

### الف : تابع گویا

هر تابع به شکل $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای بوده و $Q(x)$ غیرصفر باشد، را تابع گویا می نامند.

مثال: هر یک از توابع زیر، گویا هستند.

$$f(k)=۵k-۱ \quad و \quad f(r)=\frac{۱-r}{۳r-۷} \quad و \quad f(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۵-x^{۳}} \quad و \quad f(x)=\frac{x^{۲}+۳x-۱}{x+۵}$$

همچنین هر یک از توابع زیر گویا نمی باشند. (چرا؟)

$$f(u)=\sqrt{۵u^{۲}+۳} \qquad و \qquad f(x)=\frac{۱-\sqrt{x}}{۲x-۹}$$

دامنه‌ی هر تابع گویا ، برابر مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی بجز ریشه های مخرج آن است.

$$D_f=R-\{\text{ریشه های مخرج}\}$$

**مثال :** دامنه‌ی تابع $f(x)=\dfrac{۳x+۱}{x^{۲}-۵x}$ را تعیین کنید.

حل :

$$x^{۲}-۵x=۰\to x(x-۵)=۰\to x=۰ \quad , \quad x=۵$$

$$D_f=R-\{۰,۵\}$$

**تمرین۵ :** دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{x+۳}{۲x-۱۰}$

ب) $f(x)=\dfrac{۵}{۴x^{۲}-۹}$

ج) $f(x)=\dfrac{۱-x}{x^{۳}-۹x^{۲}}$

د) $f(x)=\dfrac{۵x-۱}{۲۵+x^{۲}}$

**تمرین۶ :** معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $R-\{۳\}$ باشد.

## ب : تابع رادیکالی

هر تابع به شکل $f(x)=\sqrt{P(x)}$ که در آن عبارت $P(x)\geq ۰$ باشد، را یک تابع رادیکالی می نامند.

**مثال:** هر یک از توابع زیر، رادیکالی هستند.

$$f(x)=\sqrt{x^{۲}+۳x-۱} \qquad \text{و} \qquad f(u)=\sqrt{۳-u}$$

همچنین هر یک از توابع زیر رادیکالی نمی باشند.(چرا؟)

$$f(x)=۲\sqrt{۵}x^{۳}+۲x+۱ \qquad \text{و} \qquad f(r)=۵r^{۲}+۳$$

دامنه‌ی هر تابع رادیکالی ، برابر زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که به ازای هر عضو آن زیر رادیکال منفی نشود.

$$D_f=\{x|P(x)\geq ۰\}$$

**مثال :** دامنه‌ی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\sqrt{x-۱}$$

حل :

$$x-۱\geq ۰\rightarrow x\geq ۱$$

**تمرین۷ :** دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=۱+\sqrt{۶-۳x}$

ب) $f(x)=\sqrt{۲x+۳}$

ج) $f(x)=\sqrt{۹-x^{۲}}$

د) $f(x)=\dfrac{\sqrt{۲x-۶}}{x-۵}$

**تمرین۸ :** معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $[۱,+\infty)$ باشد.

**تمرین۹ :** نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{۲-x}$

ب) $g(x)=۱+\sqrt{x-۳}$

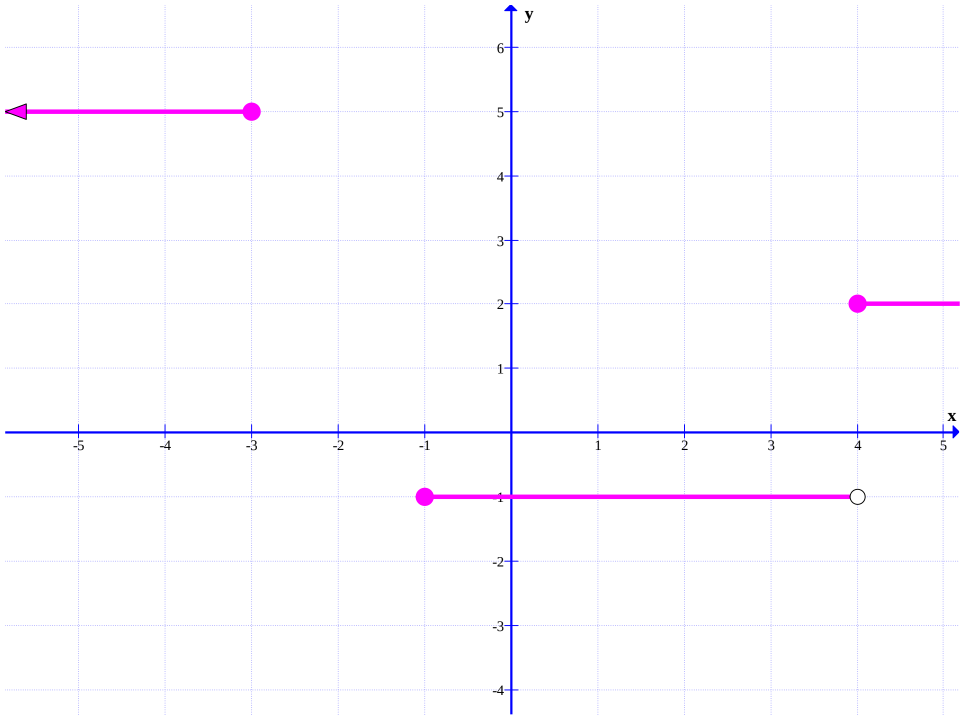
***

## ج : تابع پله ای و تابع جزء صحیح

هر تابع که بتوان دامنه‌ی آن را به تعدادی بازه طوری تقسیم بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه ها تابع ثابت باشد، را تابع پله ای می نامند. مانند تابع زیر

$$f(x)=\begin{cases} ۵ & x \le -۳ \\ -۱ & -۱ \le x < ۴ \\ ۲ & x \ge ۴ \end{cases}$$

این تابع دارای نموداری به شکل زیر است.



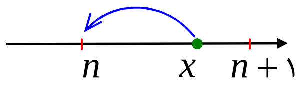

**تمرین ۱۰ :** در یک پارکینگ، هزینه‌ی پارک خودرو بر اساس مدت زمان توقف خودرو ، به این صورت محاسبه می شود.

$$f(t)=\begin{cases} ۳ & ۰ \le t < ۲ \\ ۴ & ۲ \le t < ۳ \\ ۵ & ۳ \le t < ۴ \\ ۶ & t \ge ۴ \end{cases}$$

این تابع نمونه ای از یک تابع پله ای است. نمودار این تابع را رسم کنید.

## جزء صحیح و ویژگی های آن

اگر $x$ یک عدد حقیقی باشد، آنگاه بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی $x$ را جزء صحیح $x$ می نامند و آن را با نماد $[x]$ نمایش می دهند.




$$n \le x < n+۱ \to [x]=n$$

**تمرین:** تساوی های زیر را کامل کنید.

۱. $[۲/۳]=$    ۲. $[-۵]=$    ۳. $[-۵/۷]=$    ۴. $[\frac{۵}{۷}]=$    ۵. $[-\sqrt{۲}]=$

**توجه ۱ :** برای هر عدد حقیقی $x$ داریم.

$$[x+k]=[x]+k \qquad (k \in Z)$$

**توجه ۲ :** برای هر عدد حقیقی $x$ داریم:

$$IF\ \ x \in Z \to [x]+[-x]=۰$$
$$IF\ \ x \notin Z \to [x]+[-x]=-۱$$

**تمرین ۱۱:** معادله‌ی $[x]+[x-۲]=۴$ را حل کنید.

حل:

$$[x]+[x-۲]=۴ \to [x]+[x]-۲=۴ \to ۲[x]=۶ \to [x]=۳ \to ۳ \le x < ۴$$

**تمرین ۱۲:** معادله های زیر را حل کنید.

۱) $[x+۱]+[x+۲]=۵$      ۲) $[x+۱]+[x-۲]=۴$

حل۲:

$$[x+۱]+[x-۲]=۴ \to [x]+۱+[x]-۲=۴ \to ۲[x]=۵ \to [x]=\frac{۵}{۲}$$

غیر ممکن است، لذا معادله ریشه ندارد.

تابع $f(x)=[x]$ را تابع جزء صحیح می نامند. در واقع  توابع جزء صحیح گونه‌ی خاصی از توابع پله ای می باشند. برای رسم نمودار تابع جزء صحیح ، در یک فاصله‌ی معین بازه هایی به شکل $[a,b)$ را طوری انتخاب می کنیم که جزء صحیح اعداد هر یک ، عدد صحیح مشخصی باشد.

**مثال :** نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله‌ی $[-۲,۳)$ رسم کنید.

حل : فاصله‌ی $[-۲,۳)$ را طوری به بازه های کوچکتر تقسیم می کنیم. که جزء صحیح تمام اعضای هر بازه یکسان باشد.

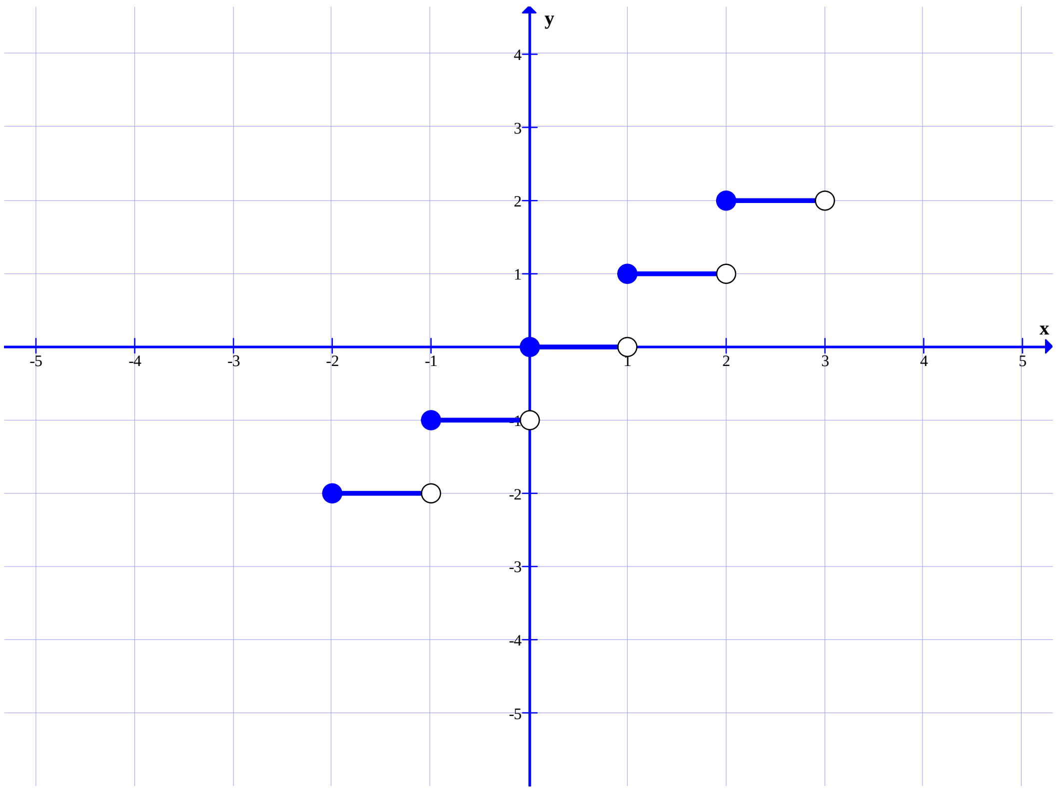
$$-۲\le x<-۱\xrightarrow{f(x)=[x]}y=-۲$$

$$-۱\le x<۰\xrightarrow{f(x)=[x]}y=-۱$$

$$۰\le x<۱\xrightarrow{f(x)=[x]}y=۰$$

$$۱\le x<۲\xrightarrow{f(x)=[x]}y=۱$$

$$۲\le x<۳\xrightarrow{f(x)=[x]}y=۲$$



## تمرین برای حل :

**۱۳ :** تابعی گویا بنویسید که دامنه‌ی آن $R-\{1\}$ باشد.

**۱۴:** معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $(1,+\infty)$ باشد.

**۱۵ :** معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $(-\infty,2]$ باشد.

**۱۶ :** نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ با دامنه‌ی $D_f=[-5,5]-\{0\}$ را رسم کنید.

**۱۷ :** نمودار تابع $y=-3+\sqrt{x-4}$ را رسم کنید.

**۱۸ :** نمودار تابع $y=[x]+2$ را در فاصله‌ی $[-3,3)$ رسم کنید.

**۱۹ :** نمودار تابع $y=[x+1]$ را در فاصله‌ی $[-2,3)$ رسم کنید.

***

## قسمت سوّم : تساوی دو تابع

دو تابع $f$ و $g$ را مساوی گویند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

الف) دامنه های هر دو تابع مجموعه های مساوی باشند. ( $D_f=D_g$ )

ب ) به ازای هر $x$ عضو دامنه مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ برابر باشند. ( $f(x)=g(x)$ )

به عبارتی دیگر، دو تابع مساوی هستند، هرگاه نمودار های آنها در یک دستگاه مختصات دقیقاً بر هم منطبق شوند.

**مثال۱:** دو تابع زیر مساوی نیستند زیرا دامنه‌ی یکسان ندارند.

$$f(x)=x+1 \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$D_f=R \quad \text{و} \quad D_g=R-\{1\} \quad \Rightarrow \quad D_f\neq D_g$$

**مثال۲ :** دو تابع زیر مساوی نیستند، زیرا با اینکه دامنه‌ی یکسان دارند. ولی مقادیر نابرابر دارند.

$$f(x)=x^2 \quad \text{و} \quad g(x)=|x|$$

$$D_f=D_g=R \quad \text{و} \quad f(x)\neq g(x)$$

**مثال۳ :** دو تابع $f(x)=|x|$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}}$ بنابر تعریف فوق مساوی هستند. زیرا

اولاً : دامنه‌ی هر دو تابع مجموعه های مساوی هستند. $D_f=D_g=R$

ثانیاً : به ازای هر $x$ عضو دامنه، مقادیر دو تابع برابر هستند. $g(x)=\sqrt{x^{۲}}=|x|=f(x)$

**تمرین برای حل :**

**۲۰ :** در هر مورد، تساوی دو تابع داده شده را بررسی کنید.

الف) $f(x)=x^{۲}-۴$ و $g(x)=\dfrac{x^{۴}-۱۶}{x^{۲}+۴}$

ب) $f(x)=x-۲$ و $g(x)=\dfrac{x^{۲}-۴}{x+۲}$

ج) $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

**۲۱ :** دو تابع زیر مساویند. مقدار $a$ را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}+۳x+۲}{x+۱} & x\neq -۱\\ ۳a+۷ & x=-۱\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=x+۲$$

***

# تهیه کننده : جابر عامری

## عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

## استان خوزستان

# درس دوّم : تابع یک به یک و وارون یک تابع

در این درس ابتدا با مفهوم تابع یک به یک و سپس وارون تابع آشنا می شویم.

## قسمت اوّل : تابع یک به یک

هر تابع که در زوج های مرتب متفاوت خود، مولفه های دوّم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می نامند.

برای مثال:

تابع $f=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(-۱,۹)\}$ یک به یک است.

تابع $g=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(-۱,۵)\}$ یک به یک نیست.

تابع $h=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(۱,۵)\}$ یک به یک است.

برای تعیین یک به یک بودن تابع وقتی که معادله‌ی آن معلوم باشد، می توان از الگوی زیر استفاده کرد.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow x_۱=x_۲$$

**مثال :** یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=۳x-۵$ ب) $g(x)=۴-x^۲$

حل : کافی است الگوی فوق را بکار ببریم.

الف) $f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow ۳x_۱-۵=۳x_۲-۵\rightarrow ۳x_۱=۳x_۲\rightarrow x_۱=x_۲$

لذا این تابع یک به یک است.

ب) $g(x_۱)=g(x_۲)\rightarrow ۴-(x_۱)^۲=۴-(x_۲)^۲\rightarrow (x_۱)^۲=(x_۲)^۲\not\rightarrow x_۱=x_۲$

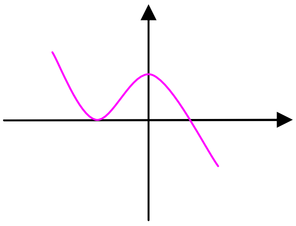
لذا این تابع یک به یک نیست.

توجه کنید در برخی از تساوی ها از قبیل موارد زیر نمی توان نتیجه گرفت که $a=b$

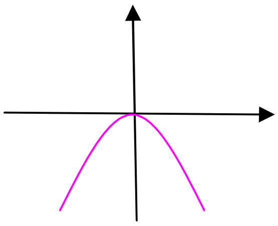
$a^۲=b^۲\not\rightarrow a=b$ و $|a|=|b|\not\rightarrow a=b$ و $[a]=[b]\not\rightarrow a=b$

برای تشخیص یک به یک بودن تابع وقتی که نمودار آن معلوم باشد، می توان از تعریف تابع یک به یک استفاده نمود. در واقع یک تابع یک به یک است هرگاه هر خط موازی محور طول ها ( $x$ ها ) ، نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (آزمون خط افقی)

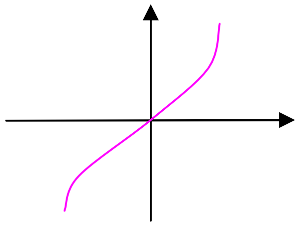
**مثال :** یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.



( الف )



( ب )



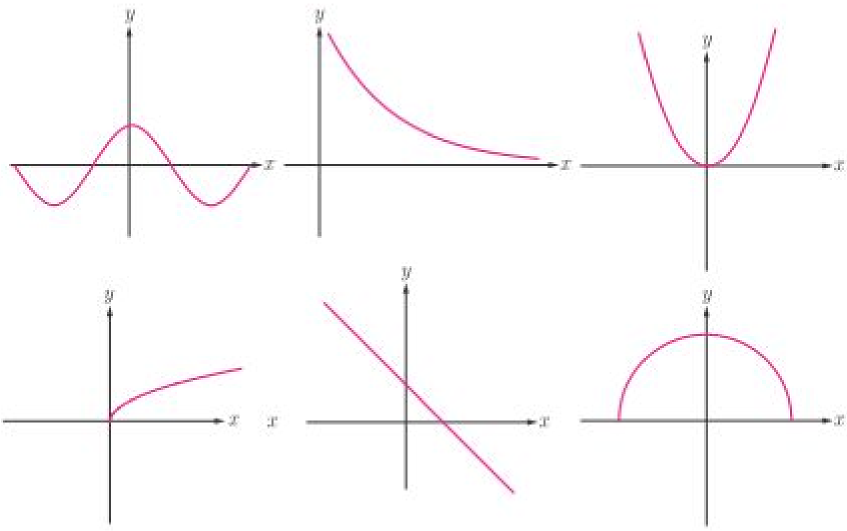
( ج )

حل: بنابر آزمون خط افقی معلوم می شود که توابع (الف) و (ب) یک به یک نیستند، ولی تابع (ج) یک به یک است.

**تمرین برای حل:**

**۱ :** اگر تابع $f=\{(-۲,۲),(m,۳),(-۱,۳),(۲m,a)\}$ یک به یک باشد، مقدار $a$ را پیدا کنید.

**۲ :** کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند.



**۳ :** ثابت کنید که هر تابع خطی غیر ثابت یک به یک است.

**۴ :** نشان دهید که تابع $f(x)=\dfrac{۲x}{x+۱}$ یک به یک است.

**۵ :** با ذکر دلیل تعیین کنید که کدام یک از تابع های زیر یک به یک است.

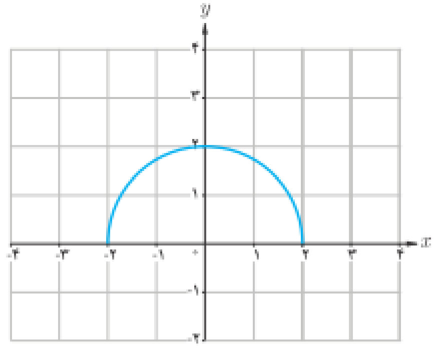
الف) $f(x)=۲[x]+۱$      ب) $g(x)=۲x^۳-۵$

**۶ :** آیا هر تابع درجه‌ی ۲ ( سهمی ) ، یک به یک است؟ چرا؟

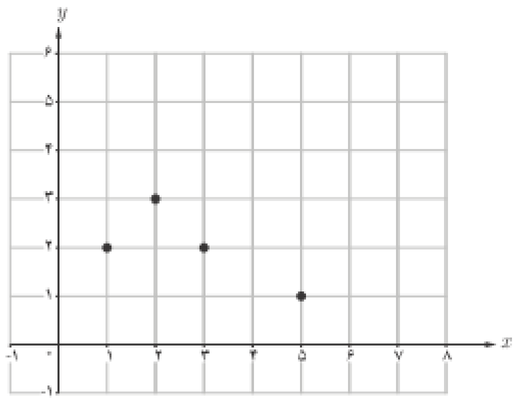
**۷ :** نمودار سهمی $f(x) = x^{۲} - ۴x + ۳$ را رسم کنید. به نظر شما با محدود کـردن دامنـه‌ی ایـن تـابع روی کدام یک از بازه های زیر می توان یک تابع یک به یک ساخت؟

الف) [۰,۲] ب) [۱,۴)

**۸ :** با حذف بخشی از نمودار نیم دایره‌ی داده شده، نمودار یک تابع یک به یک را مشخص کنید.



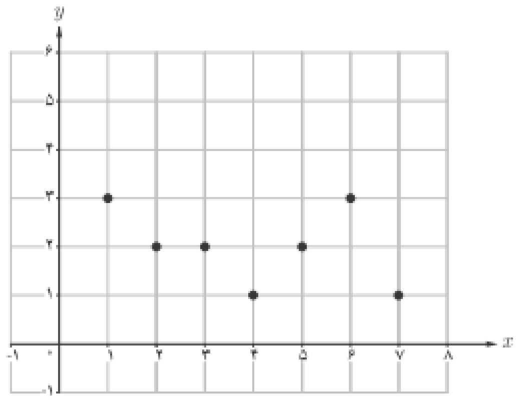
**۹ :** نمودار زیر را در نظر بگیرید.



الف : چرا این نمودار ، یک تابع یک به یک نیست؟

ب : با حذف تنها یک نقطه، نمودار را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید. به نظر شما مسئله چند جواب دارد؟

**۱۰ :** نمودار یک تابع به صورت زیر است.




الف : آیا این تابع یک به یک است؟ چرا؟

ب : اگر بخواهیم تعدادی از نقاط این نمودار را حذف کنیم و یک تابع یک به یک به دست آوریم، به نظر شما حداکثر چند نقطه می تواند باقی بماند.

***

## قسمت دوّم : تابع وارون (معکوس تابع)

اگر مؤلفه های اوّل و دوّم تمام زوج های مرتب تابعی را جابجا کنیم، دو حالت پیش می آید.

حالت اوّل) مجموعه‌ی جدید، تابع شود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر است و تابع جدید را را تابع معکوس می نامند. مانند :

$f=\{(۱,۷),(۳,۴),(۰,۹)\}$

$g=\{(۷,۱),(۴,۳),(۹,۰)\}$ تابع معکوس $f$

حالت دوّم) مجموعه‌ی جدید، تابع نشود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر نیست. مانند :

$f=\{(۱,۷),(۳,۴),(۹,۴)\}$

$g=\{(۷,۱),(۴,۳),(۴,۹)\}$

توجه داشته باشید که اگر تابع $f$ معکوس پذیر باشد، معکوس آن را با $f^{-۱}$ نمایش می دهند.

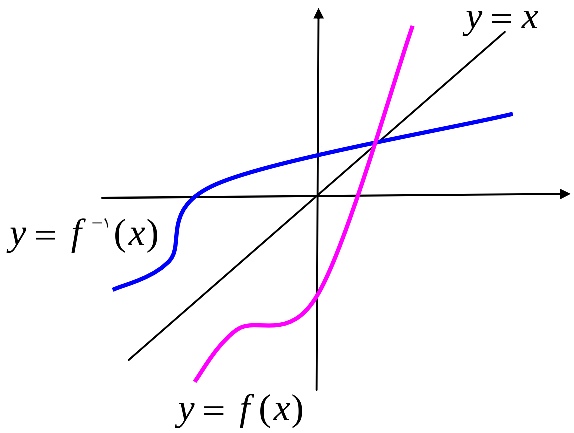
با توجه به مفهوم تابع معکوس به سهولت نتیجه می شود که:

الف ) تابعی معکوس پذیر است، هرگاه یک به یک باشد.

ب ) دامنه‌ی تابع $f^{-1}$ برابر برد تابع $f$ است. ( $D_{f^{-1}} = R_f$ )

ج ) برد تابع $f^{-1}$ برابر دامنه‌ی تابع $f$ است. ( $R_{f^{-1}} = D_f$ )

د ) نمودار هر تابع معکوس پذیر با نمودار معکوس آن نسبت به خط نیمساز ربع اوّل وسوّم ( $y = x$ ) متقارن هستند.

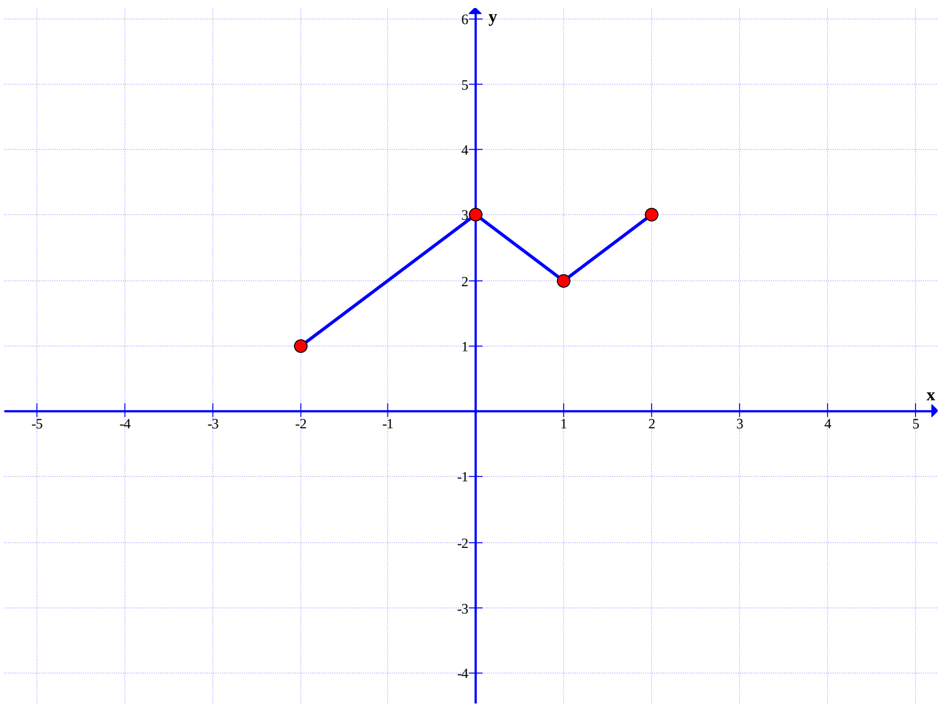



**تمرین ۱۱ :** وارون تابع $f = \{(۲,۳),(-۲,۱),(-۱,۲)\}$ را به دست آورید.

**تمرین ۱۲ :** نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید.

الف : نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.

ب : آیا این تابع وارون پذیر است؟ چرا؟



## تمرین برای حل:

**تمرین ۱۳:** کدام یک از توابع زیر معکوس پذیر است. معکوس آن را در صورت وجود بنویسید.

الف) $f=\{(۲,۱),(۰,۳),(۵,۷),(-۲,۶)\}$

ب) $g=\{(۲,۵),(۰,۱),(۵,۷),(-۲,۱)\}$

## قسمت سوّم : روش های تعیین ضابطه‌ی معکوس تابع

برای تعیین معکوس یک تابع معکوس پذیر که معادله‌ی آن معلوم باشد. دو روش متداول است.

**روش اوّل) تعویض متغیر ها:** در این روش به ترتیب زیر عمل می کنیم.

مرحله‌ی ۱) متغیر $x$ را به $y$ و برعکس تبدیل می کنیم.

مرحله‌ی ۲) متغیر $y$ را بر حسب $x$ محاسبه می کنیم.

**مثال:** ثابت کنید که تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\to\sqrt{۲x_۱-۳}=\sqrt{۲x_۲-۳}\to ۲x_۱-۳=۲x_۲-۳$$
$$\to ۲x_۱=۲x_۲\to x_۱=x_۲$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$y=\sqrt{۲x-۳}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\sqrt{۲y-۳}\to x^۲=۲y-۳\to y=\frac{x^۲+۳}{۲}$$
$$\therefore f^{-۱}(x)=\frac{x^۲+۳}{۲}$$

**روش دوّم) بازگردانی اعمال:** در این روش، ابتدا اعمال روی توابع را به ترتیب اوّلویت می نویسیم و سپس اعمال بازگشت هر یک را مشخص می کنیم. تابع حاصل، تابع وارون است.

**مثال ۱ :** ثابت کنید که تابع $f(x)=۲x+۱$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\to ۲x_۱+۱=۲x_۱+۱\to ۲x_۱=۲x_۲\to x_۱=x_۲$$

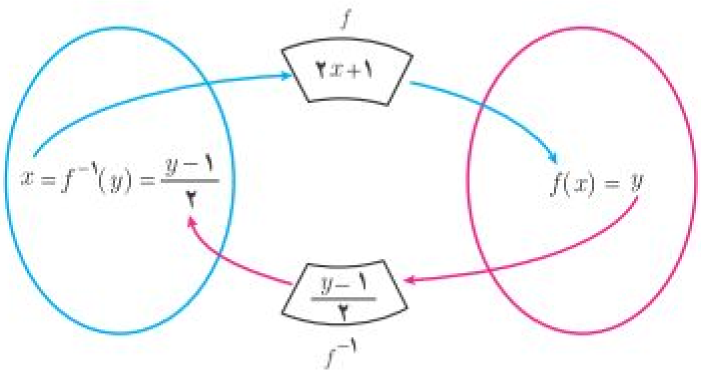
پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$x \xrightarrow{\times ۲} ۲x \xrightarrow{+۱} ۲x+۱ \rightarrow y$$

$$y \leftarrow \frac{x-۱}{۲} \xleftarrow{\div ۲} x-۱ \xleftarrow{-۱} x$$

$$f(x)=۲x+۱ \rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۲}$$

مراحل کار را می توانید در نمودار زیر مشاهده نمایید.




**مثال۲ :** ثابت کنید که تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲) \rightarrow \sqrt{۲x_۱-۳}=\sqrt{۲x_۲-۳} \rightarrow ۲x_۱-۳=۲x_۲-۳$$
$$\rightarrow ۲x_۱=۲x_۲ \rightarrow x_۱=x_۲$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$x \xrightarrow{\times ۲} ۲x \xrightarrow{-۳} ۲x-۳ \xrightarrow{root} \sqrt{۲x-۳} \rightarrow y$$

$$y \leftarrow \frac{x^۲+۳}{۲} \xleftarrow{\div ۲} x^۲+۳ \xleftarrow{+۳} x^۲ \xleftarrow{sqr} x$$

$$f(x)=\sqrt{۲x-۳} \rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x^۲+۳}{۲}$$

**تمرین ۱۴:** وارون هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=x+۵$

ب) $f(x)=۴x$

پ) $f(x)=۲x+۳$

ت) $f(x)=\frac{۲}{۳}x-۴$

**تمرین برای حل :**

**۱۵ :** ضابطه‌ی وارون هر یک از توابع با ضابطه های زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{-۷x+۳}{۵}$

ب) $f(x)=\frac{۳}{۵}x+۴$

ج) $f(x)=۵x-۲$

د) $f(x)=-۲x+۳$

**۱۶ :** معکوس هر یک از توابع زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $f(x)=۳x^{۲}+۱$

ب) $f(x)=۳x-۱$

ج) $f(x)=۲\sqrt[۳]{x-۱}$

د) $f(x)=۳|x|+۵$

**۱۷ :** ثابت کنید تابع زیر معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را تعیین کنید.

$f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x$

***

# تهیه کننده : جابرعامری

## عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

## استان خوزستان

# درس سوّم : اعمال روی توابع

در این درس اعمال رایج روی توابع را تعریف می کنیم و مسائلی را پیرامون آنها حل می کنیم.

## قسمت اوّل : اعمال روی توابع

اگر $f$ و $g$ دو تابع باشند، در این صورت اعمال زیر را می توان روی دامنه‌ی مشترک آنها تعریف کرد.

**۱ :** جمع دو تابع

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

**۲ :** تفریق دو تابع

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$D_{f-g}=D_f\cap D_g$$

**۳ :** ضرب دو تابع

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

$$D_{f\times g}=D_f\cap D_g$$

**۴ :** تقسیم دو تابع

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g \mid g(x)=۰\}$$

**مثال :** اگر $f(x)=x^۲+۵x+۶$ و $g(x)=x^۲+۳x$ ، تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $(f+g)(x)$

۲) $(f-g)(x)$

۳) $(g-f)(x)$

۴) $(f\times g)(x)$

۵) $(f^۲)(x)$

۶) $(\frac{f}{g})(x)$

۷) $D_{f+g}$

۸) $D_{\frac{f}{g}}$

حل :

$$۱)\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x^{۲}+۵x+۶)+(x^{۲}+۳x)$$

$$=x^{۲}+۵x+۶+x^{۲}+۳x=۲x^{۲}+۸x+۶$$

$$۲)\ (f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x^{۲}+۵x+۶)-(x^{۲}+۳x)$$

$$=x^{۲}+۵x+۶-x^{۲}-۳x=۲x+۶$$

$$۳)\ (g-f)(x)=g(x)-f(x)=(x^{۲}+۳x)-(x^{۲}+۵x+۶)$$

$$=x^{۲}+۳x-x^{۲}-۵x-۶=-۲x-۶$$

$$۴)\ (f\times g)(x)=f(x)\times g(x)==(x^{۲}+۵x+۶)\times(x^{۲}+۳x)$$

$$=x^{۴}+۳x^{۳}+۵x^{۳}+۱۵x^{۲}+۶x^{۲}+۱۸x=x^{۴}+۸x^{۳}+۲۱x^{۲}+۱۸x$$

$$۵)\ (g\times f)(x)=g(x)\times f(x)=(x^{۲}+۵x+۶)\times(x^{۲}+۵x+۶)$$

$$=x^{۴}+۵x^{۳}+۶x^{۲}+۵x^{۳}+۲۵x^{۲}+۳۰x+۶x^{۲}+۳۰x+۳۶$$

$$=x^{۴}+۱۰x^{۳}+۳۷x^{۲}+۶۰x+۳۶$$

$$۶)\ (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^{۲}+۵x+۶}{x^{۲}+۳x}=\frac{(x+۲)(x+۳)}{x(x+۳)}=\frac{x+۲}{x}$$

$$۷)\ D_{f+g}=D_f\cap D_g=R\cap R=R$$

توابع $f$ و $g$ هر دو چند جمله ای می باشند. پس دامنه‌ی هر دو مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

$$۸)\ D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g \mid g(x)=۰\}=R\cap R-\{۰,-۳\}=R-\{۰,-۳\}$$

توجه داشته باشید که ریشه های مخرج $x=۰$ و $x=-۳$ تابع $g$ می باشند.

$$x^{۲}+۳x=۰\rightarrow x(x+۳)=۰\rightarrow x=۰\ ,\ x=-۳$$

**مثال :** اگر $f=\{(۱,۷),(۳,-۴),(۲,۲)\}$ و $g=\{(۱,۶),(۳,۵),(۴,۱),(۲,۰)\}$، هر یک از موارد زیـر را تعیین کنید.

۱) $D_f$

۲) $D_g$

۳) $D_{f+g}$

۴) $f+g$

۵) $f-g$

۶) $f\times g$

۷) $D_{\frac{f}{g}}$

۸) $\frac{f}{g}$

حل :

۱) $D_f=\{۱,۳,۲\}$

۲) $D_g=\{۱,۳,۴,۲\}$

۳) $D_{f+g}=D_f+D_g=\{۱,۳,۲\}\bigcap\{۱,۳,۴,۲\}=\{۱,۲,۳\}$

اکنون برای تعیین توابع خواسته شده ، از روش تشکیل جدول استفاده می کنیم.

| $x$ | ۱ | ۳ | ۲ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ۷ | -۴ | ۲ |
| $g(x)$ | ۶ | ۵ | ۰ |
| $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ | ۱۳ | ۱ | ۲ |

۴) $f+g=\{(۱,۱۳),(۳,۱),(۲,۲)\}$

| $x$ | ۱ | ۳ | ۲ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ۷ | -۴ | ۲ |
| $g(x)$ | ۶ | ۵ | ۰ |
| $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ | ۱ | -۹ | ۲ |

۵) $f-g=\{(۱,۱),(۳,-۹),(۲,۲)\}$

| $x$ | ۱ | ۳ | ۲ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ۷ | -۴ | ۲ |
| $g(x)$ | ۶ | ۵ | ۰ |
| $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$ | ۷۲ | -۲۰ | ۰ |

۶) $f \times g = \{(۱,۷۲),(۳,-۲۰),(۲,۰)\}$

۷) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = ۰\} \{۱,۳,۲\} - \{۲\} = \{۱,۳\}$

| $x$ | ۱ | ۳ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | ۷ | $-۴$ |
| $g(x)$ | ۶ | ۵ |
| $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ | $\frac{۷}{۶}$ | $\frac{-۴}{۵}$ |

۸) $\frac{f}{g} = \{(۱,\frac{۷}{۶}),(۳,\frac{-۴}{۵})\}$

## تمرین برای حل :

**۱ :** اگر $f = \{(۱,۱),(۲,۴),(۳,۶),(۰,۶)\}$ و $g = \{(۱,-۱),(۲,۵),(-۱,۲),(۳,۰)\}$

در هر مورد دامنه‌ی تابع داده شده را تعیین و سپس آن را به صورت زوج مرتب بنویسید.

۱) $f+g$    ۳) $f.g$    ۵) $f^{۲}$

۲) $f-g$    ۴) $\frac{f}{g}$    ۶) $\sqrt{g}$

**۲ :** اگر $f(x) = x^{۲} - x$ و $g(x) = x^{۲} + ۲x - ۳$ باشد، عبارت های زیر را محاسبه کنید.

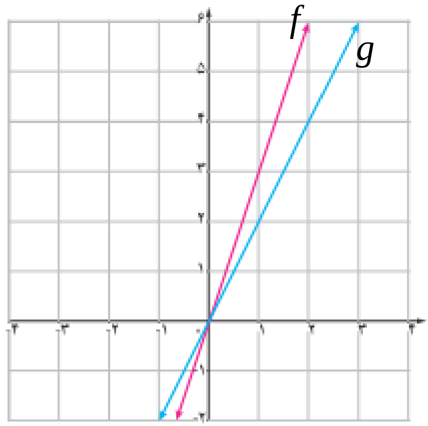
الف) $(f+g)(x)$    ب) $(\frac{f}{g})(x)$    ج) $(۲f - ۳g)(۲)$

**۳ :** اگر $u(x) = \sqrt{x} + ۱$ و $v(x) = x - ۱$ ، دامنه و ضابطه‌ی تابع $f(x) = (\frac{u}{v})(x)$ را تعیین کنید.

**۴ :** در شکل مقابل ، نمودار های دو تابع $f$ و $g$ رسم شده اند.

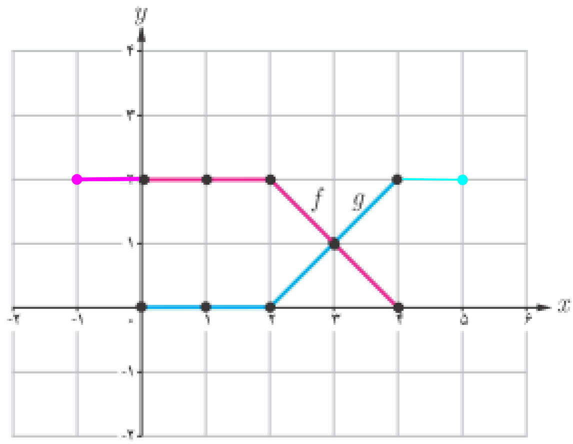
الف: ضابطه‌ی این دو تابع را بنویسید.

ب : ضابطه‌ی دو تابع $f+g$ و $f-g$ را به دست آورید.




**۵ :** ثابت کنید که حاصل جمع و تفریق دو تابع خطی، خطی است.

**۶ :** در شکل مقابل، نمودار دو تابع $f$ و $g$ رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به دست آورید.




**۷ :** اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۵),(۵,۷),(۷,۹),(۴,۴)\}$ باشد، تابع $۲f+f^{-۱}$ را با عضوهایش بنویسید.

***

## قسمت دوّم : رسم نمودار توابع به کمک تبدیلات

گاهی لازم است نمودار یک تابع را به کمک نمودار تابع دیگری رسم کنیم. برای این کار از ویژگی های تبدیلات از قبیل انتقال یا بازتاب و ... استفاده می شود. اگر نمودار تابع $y = f(x)$ که تابع اصلی نیز نامیده می شود، معلوم باشد در این صورت نمودار توابع جدید را به کمک نمودار تابع اصلی می توان رسم کرد. برای انجام این کار می توان از جدول زیر استفاده کرد. در این جدول $a$ یک عدد مثبت فرض شده است.

| تابع جدید | | نحوه‌ی تبدیل | نتیجه |
| --- | --- | --- | --- |
| $y = f(x) + a$ | طول نقاط ثابت می ماند. | به عرض نقاط $a$ واحد اضافه می شود. | نمودار به اندازه‌ی $a$ واحد بالا می رود. |
| $y = f(x) - a$ | | از عرض نقاط $a$ واحد کم می شود. | نمودار به اندازه‌ی $a$ واحد پایین می رود. |
| $y = af(x)$ | | عرض نقاط در $a$ ضرب می شود. | اگر $0 < a < 1$ نمودار فشرده می شود. اگر $a > 1$ نمودار کشیده می شود. |
| $y = f(x + a)$ | عرض نقاط ثابت می ماند. | از طول نقاط $a$ واحد کم می شود. | نمودار به اندازه‌ی $a$ واحد به عقب می رود. |
| $y = f(x - a)$ | | به طول نقاط $a$ واحد اضافه می شود. | نمودار به اندازه‌ی $a$ واحد به جلو می رود. |
| $y = f(ax)$ | | طول نقاط در $\frac{1}{a}$ ضرب می شود. | اگر $0 < a < 1$ نمودار منبسط می شود. اگر $a > 1$ نمودار منقبض می شود. |

**نتیجه :**

**۱ :** نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول ها است.

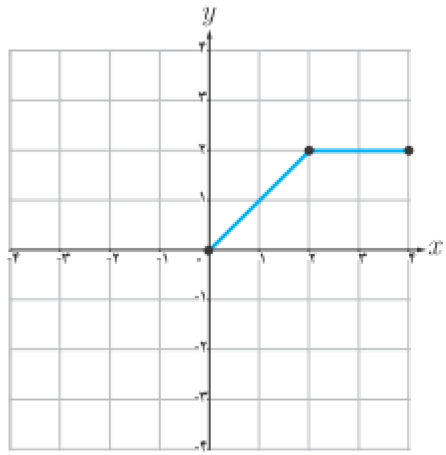
**۲ :** نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور عرض ها است.

***

**تمرین۸ :** در شکل روبرو، نمودار تابع $f$ داده شده است. در هر مورد نمودار تابع با ضابطه‌ی تعیین شده را رسم کنید.

الف) $y=f(x)+۲$ ج) $y=f(x-۱)$

ب) $y=-۲f(x)$ د) $y=f(۳x)$



**تمرین برای حل :**

**۹ :** با استفاده از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=-|x|$ ب) $y=-|x-۲|$ ج) $y=۲|x+۱|$

**۱۰ :** با استفاده از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=(x-۱)^۲$ ب) $y=x^۲+۳$

**۱۱ :** با استفاده از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=۳\sqrt{x}$ ب) $y=-\sqrt{x-۲}$ ج) $y=۱-\sqrt{x-۳}$

***