ریاضی ۳

پایه‌ی دوازدهم «رشته‌ی علوم تجربی»

فصل ۳ : حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

مهر ۱۳۹۹

درس اوّل : تقسیم چندجمله ای ها و محاسبه ی حد توابع کسری

درسال گذشته با توابع و اعمال روی آنها آشنا شده اید. اکنون می خواهیم ترکیب دو تابع را معرفی کنیم.

ترکیب دو تابع یکی از مهمترین عمل روی دو یا چند تابع می باشد.

قسمت اوّل : تقسیم چندجمله ای ها و بخش پذیری

در سال های گذشته با تقسیم چندجمله ای ها بر یکدیگر آشنا شده اید. می دانید که برای تقسیم چند جمله ای $A(x)$ را بر چند جمله ای غیر صفر $B(x)$ که درجه‌ی $A(x)$ بزرگتر یا مساوی درجه‌ی $B(x)$ باشد، مراحل زیر به ترتیب را طی می کنیم.

$$\begin{array}{l|l} \text{مقسوم} & \text{مقسوم علیه} \\ A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} \cdots & Q(x) \ \text{خارج قسمت} \\ \cline{1-1} R(x) \ \text{باقی مانده} & \end{array}$$

مرحله‌ی اوّل : ابتدا چند جمله ای های مقسوم ($A(x)$) و مقسوم علیه ($B(x)$) را استاندارد می کنیم.

مرحله‌ی دوّم : اوّلین جمله‌ی مقسوم را بر اوّلین جمله‌ی مقسوم علیه تقسیم می کنیم (جملاتی از مقسوم و مقسوم علیه که دارای بزرگترین توانها هستند.) و حاصل را به عنوان اوّلین جمله‌ی خارج قسمت قرار می دهیم.

مرحله‌ی سوّم : خارج قسمت بدست آمده را در چند جمله ای مقسوم علیه ضرب می کنیم. سپس عبارت بدست آمده را قرینه کرده و در زیر مقسوم یادداشت می کنیم. حاصل جمع این عبارت با مقسوم، اوّلین باقی مانده را نتیجه می دهد.

مرحله‌ی چهارم: مانند مرحله‌ی دوّم ، این بار باقی مانده‌ی به دست آمده را بر عبارت مقسوم علیه تقسیم می کنیم.

توجه : مراحل فوق را تا زمانی ادامه می دهیم که باقی مانده یا صفر شود و یا درجه‌ی چندجمله ای باقی مانده از درجه‌ی مقسوم علیه کمتر شود.

مثال : تقسیم زیر را انجام دهید.

$$(-۳x^{۲} + ۳x^{۳} + x^{۵} + ۳x - ۵) \div (۱ + x^{۲})$$

حل : ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را استاندارد کرده و مطابق مراحل فوق عمل می کنیم.

$$
\begin{array}{r|l}
x^{۵}+۳x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۵ & x^{۲}+۱ \\ \cline{2-2}
-x^{۵}-x^{۳} \qquad\qquad\qquad & x^{۳}+۲x-۳ \\ \cline{1-1}
۲x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۵ & \\
-۲x^{۳}-۲x \qquad & \\ \cline{1-1}
-۳x^{۲}+x-۵ & \\
+۳x^{۲}+۳ & \\ \cline{1-1}
x-۲ &
\end{array}
$$

$$\frac{x^{۵}}{x^{۲}}=x^{۳}$$

$$\frac{۲x^{۳}}{x^{۲}}=۲x$$

$$\frac{-۳x^{۲}}{x^{۲}}=-۳$$

تمرین ۱ : تقسیم های زیر را انجام دهید و باقی مانده و خارج قسمت آنها را تعیین کنید.

۱) $(x^{۲}-۵x-۱)\div(x-۳)$

۲) $(۳x^{۲}+۲x^{۳}-۴x-۱)\div(x-۱)$

۳) $(x^{۴}-۵x^{۲}-۱+۷x)\div(-۲+x)$

۴) $(x^{۳}+x^{۲}y-۲y^{۳}-xy^{۲})\div(x+y)$

تمرین۲ : مقدار k را طوری بیابید که باقی ماندهٔ تقسیم $x^{۳}-x^{۲}+k$ بر $x-۲$ برابر ۶ شود.

***

قضیهٔ تقسیم

اگر چند جمله ای $A(x)$ را بر چند جمله ای غیر صفر $B(x)$ تقسیم کنیم، در این صورت همواره خواهیم داشت:

$$
\begin{array}{r|l}
A(x) & B(x) \\ \cline{2-2}
\cdots & Q(x) \\ \cline{1-1}
R(x) &
\end{array}
$$

$$A(x)=Q(x)\times B(x)+R(x)$$

$$\deg(R(x))<\deg(B(x))$$

مثال : تقسیم زیر را انجام داده و درستی عمل را بررسی کنید.

$$(-x^{۳}+x^{۲}+۶x+۱)\div(۲+x)$$

حل:

$$\begin{array}{r|l} -x^{۳}+x^{۲}+۶x+۱ & x+۲ \\ \cline{2-2} {}_{+}x^{۳} {}_{-+}۲x^{۲} \qquad & -x^{۲}+۳x \\ \cline{1-1} ۳x^{۲}+۶x+۱ & \\ \_۳x^{۲}+\_۶x \quad & \\ \cline{1-1} ۱ & \end{array}$$

$$\frac{-x^{۳}}{x}=-x^{۲}$$

$$\frac{۳x^{۲}}{x}=۳x$$

رابطه‌ی تقسیم (امتحان درستی عمل تقسیم)

$$(-x^{۲}+۳x)(x+۲)+۱=-x^{۳}-۲x^{۲}+۳x^{۲}+۶x+۱=-x^{۳}+x^{۲}+۶x+۱$$

تمرین۳ : مقدار k را طوری بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم $x^{۲}+kx+۱$ بر $x+۱$ برابر ۵ شود.

تمرین۴ : مقدار k را چنان بیابید که چندجمله ای های $۳x^{۲}-۴x+۲$ و $kx^{۳}+۲x^{۲}-x$ در تقسیم بر $x+۱$ هم باقی مانده شوند.

***

بخش پذیری در چند جمله ای ها

چند جمله ای $A(x)$ را بر چند جمله ای $B(x)$ بخش پذیر گویند، هرگاه باقی مانده‌ی تقسیم $A(x)$ بر $B(x)$ صفر شود[1]. در این صورت خواهیم داشت :

$$\begin{array}{c|c} A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} \cdots & Q(x) \\ \cline{1-1} R(x) & \end{array}$$

$$A(x)=Q(x)\times B(x)$$

تمرین۵ : نشان دهید که $۳x^{۴}+۵x^{۳}+۶x^{۲}-۵+۷x$ بر $۳x+۵$ بخش پذیر است.

تمرین۶ : نشان دهید که عبارت $۴x^{۵}-۳x^{۲}+x-۲$ بر $x-۱$ بخش پذیر است.

تمرین۷ : مقدار k را طوری بیابید که $۴x^{۲}+kx+۲$ بر $x+۱$ بخش پذیر شود.

[1]. چند جمله ای $B(x)$ را عامل $A(x)$ نیز می نامند.

نکات تکمیلی تقسیم

اگر چند جمله ای $P(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{c|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} \cdots & Q(x) \\ \hline R(x) & \end{array}$$

$$P(x)=Q(x)\times(x-a)+R(x)$$

حال اگر قرار دهیم $x=a$

$$\Rightarrow P(a)=Q(a)\times\underbrace{(a-a)}_{\cdot}+R(a)\to P(a)=R(a)$$

یعنی باقی ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-a$ برابر $P(a)$ است.

تمرین۸ : باقی ماندهٔ تقسیم $۳x^۲-۵x+۴$ بر $x-۱$ را حساب کنید.

تمرین۹ : باقی ماندهٔ تقسیم $۲x^۸-۵x^۲+x+۳$ بر $x+۱$ را حساب کنید.

تمرین۱۰ : باقی ماندهٔ تقسیم $P(x)=۴x^۳+۲x^۲-۳x+۵$ بر $۲x+۳$ را حساب کنید.

نتیجه : در تقسیم چندجمله ای $P(x)$ بر $x-a$ ، باقی ماندهٔ تقسیم برابر $P(a)$است.

حال اگر $P(a)$ برابر صفر باشد، $P(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر می باشد.

مثال : در چند جمله ای $P(x)=۳x^۲-۵x-۲$، مقدار $f(۲)$ برابر صفر است. بنابراین $P(x)$ بر $x-۲$ بخش پذیر است.

تمرین۱۱ : نشان دهید $P(x)=۲x^۳+۵x^۲-۳x-۱۰$ بر $x+۲$ را بخش پذیر است.

تمرین۱۲ : نشان دهید که چند جمله ای $۲x^۳+x^۲+۱$ بر $x+۱$ بخش پذیر است. سپس این عبارت را به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.

تمرین برای حل :

۱۳ : باقی ماندهٔ تقسیم $۳x^۲-۲x-۸$ بر $x-۲$ را حساب کنید.

۱۴ : مقدار m را طوری بیابید که $P(x)=x^۲+mx-۲$ بر $x-۳$ بخش پذیر باشد.

۱۵ : نشان دهید که $P(x)=x^۴-۱۶$ بر $x-۲$ بخش پذیر است.

۱۶: باقی ماندهٔ تقسیم $P(x)=x^۳+x-۲$ بر $۲x+۱$ را حساب کنید.

۱۷ : مقادیر b و a را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^{۳}+ax^{۲}+bx+۱$ بر $x-۲$ و $x+۱$ بخش پذیر باشد.

۱۸ : به کمک تقسیم، نشان دهید که چندجمله ای $f(x)=۲x^{۳}+x۲+۱$ بر دو جمله ای $x+۱$ بخش پذیر است. سپس بر این اساس $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.

> **توجه :** اگر مجموع ضریب های جملات یک چند جمله ای برابر صفر باشد، آن چندجمله ای بر $x-۱$ بخش پذیر است.

۱۹ : عبارت زیر را به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.

$$P(x)=x^{۳}-۲x^{۲}-x+۲$$

***

تعیین باقی مانده و خارج قسمت به روش هورنر

در حل بسیاری از مسائل ناگزیر هستیم که از تقسیم چندجمله ای بر چند جمله ای استفاده کنیم و باقی مانده و خارج قسمت تقسیم را تعیین کنیم. هورنر برای تعیین باقی مانده و خارج قسمت، تقسیم چندجمله ای بر چند جمله ای روش جالبی معرفی کرده است که نسبت به روش معمول قدری کوتاه تر است.

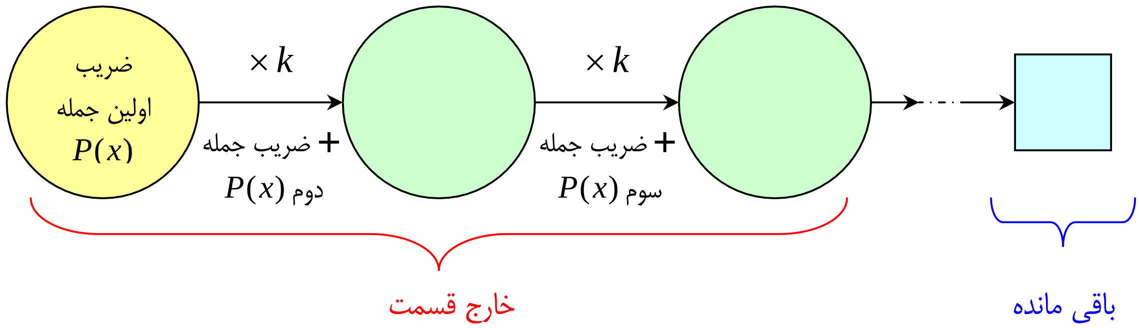
در اینجا تقسیم چند جمله‌ی درجه‌ی n به صورت $P(x)=ax^{n}+bx^{n-۱}+cx^{n-۲}+\dots$ بر دو جمله ای درجه‌ی اوّل $x-k$ را توضیح می دهیم.

$$\begin{array}{c|c} P(x) & x-k \\ \hline \cdot & Q(x) \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \hline R & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} \text{مقسوم} & \text{مقسوم علیه} \\ \hline \cdot & \text{خارج قسمت} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \hline \text{باقی مانده} & \end{array}$$

در روش هورنر ابتدا باید مقسوم و مقسوم علیه را به صورت استاندارد[2] بنویسیم و سپس نموداری مطابق نمودار زیر تنظیم کنیم.

---

[2]. مرتب کردن جملات بر حسب توان های نزولی متغیر x



توجه :

۱ : عدد k همان ریشه‌ی مقسوم علیه است. (ریشه‌ی $x-k$)

۲ : قبل از نوشتن ضریب ها، در نمودار فوق، ضریب جمله یا جملاتی که وجود ندارند، برابر صفر قرار می دهیم.

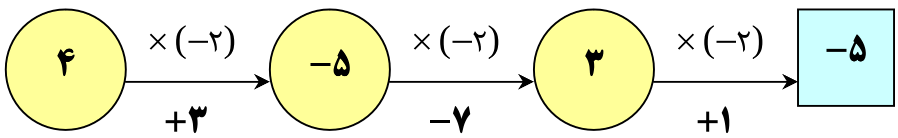
۳ : اعداد داخل دایره ها، ضرایب جملات خارج قسمت می باشند که از درجه‌ی $n-۱$ است.

۴ : عدد آخر داخل مربع، باقی مانده است.

مثال : باقی مانده و خارج قسمت تقسیم $۴x^۳+۳x^۲-۷x+۱$ بر $x+۲$ را تعیین کنید.

حل :

$x+۲=۰ \rightarrow x=-۲$



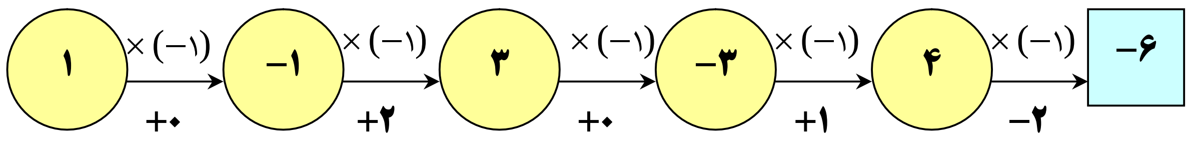
خارج سمت $Q(x)=۴x^۲-۵x+۳$ باقی مانده $R=-۵$

مثال : باقی مانده و خارج قسمت تقسیم $x^۵+۲x^۳+x-۲$ بر $x+۱$ را تعیین کنید.

حل :

$x^۵+۰x^۴+۲x^۳+۰x^۲+x-۲$

$x+۱=۰ \rightarrow x=-۱$



خارج قسمت $Q(x)=x^۴-x^۳+۳x^۲-۳x+۴$ باقی مانده $R=-۶$

تمرین برای حل :

۲۰ : به روش هورنر، باقی مانده و خارج قسمت تقسیم عبارت $P(x)$ را بر $x-۲$ به دست آورید.

الف) $P(x)=x^{۳}+۲x^{۴}-۱$

ب) $P(x)=x^{۳}-۵x^{۲}+۷x-۲$

ج) $P(x)=x^{۴}-x^{۳}-۲x^{۲}-x+۲$

۲۱ : به روش هورنر نشان دهید که عبارت $۲t^{۴}+۲t^{۳}-t^{۲}+۱$ بر $t+۱$ بخش پذیر است.

***

قسمت دوّم : حد توابع کسری

یک روش معمول محاسبه‌ی حد، روش جایگزینی است. طبق این روش به جای متغیر مقدار مورد نظر را جایگزین نموده و به محاسبه‌ی حاصل می پردازیم.

برای مثال :

$$\lim_{x\to ۵}\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x+۱}=\frac{(۵)^{۲}-۳(۵)+۲}{(۵)+۱}=\frac{۲۵-۱۵+۲}{۶}=\frac{۱۲}{۶}=۲$$

در سال گذشته دیدیم که برای محاسبه‌ی حد یک تابع کسری مانند $\frac{f}{g}$ وقتی متغیر x به a میل می کند، گاهی حالتی پیش می آید که در آن $f(a)=g(a)=۰$ است. در این حالت چون f و g بر $x-a$ بخش پذیرند، با تقسیم صورت و مخرج بر $x-a$ می توان تابع گویای دیگر به دست آورد که حد آن در نقطه‌ی a در صورت وجود برابر حد $\frac{f}{g}$ در این نقطه خواهد شد.[3]

مثال : مقدار $\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+x-۲}$ را محاسبه کنید.

حل :

[3]. توجه داشته باشید که این حالت ها را حالت های مبهم و این عمل را عمل رفع ابهام می نامند.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x^۲+x-۲}=\frac{(۱)^۲-۱}{(۱)^۲+(۱)-۲}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x^۲+x-۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)(x+۲)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x+۱}{x+۲}=\frac{۱+۱}{۱+۲}=\frac{۲}{۳}$$

توجه داشته باشید که برای محاسبه‌ی حد تابع های کسری که صورت و مخرج آنهایی عبارت جبری بوده و به صورت حالت مبهم باشند. اگر صورت و مخرج چند جمله ای باشند، می توانید صورت و مخرج را تجزیه و سپس ساده کنید. همچنین اگر صورت یا مخرج یا هر دو شامل رادیکال باشد صورت یا مخرج را گویا کنید.

مثال : حد تابع $f(x)=\frac{۲x^۳+۳x^۲+۴}{x^۳+۸}$ را در نقطه‌ی $x=-۲$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x=-۲$ برابر صفرند. باید عامل $x+۲$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب های دوجمله به حاصل ضرب عامل های اوّل تجزیه کنیم. امّا برای تجزیه‌ی صورت، آن را بر $x+۲$ تقسیم می کنیم. لذا :

$$\lim_{x\to -۲}f(x)=\lim_{x\to -۲}\frac{۲x^۳+۳x^۲+۴}{x^۳+۸}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(۲x^۲-x+۲)}{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{۲x^۲-x+۲}{x^۲-۲x+۴}=\frac{۲(-۲)^۲-(-۲)+۲}{(-۲)^۲-۲(-۲)+۴}=\frac{۸+۲+۲}{۴+۴+۴}=\frac{۱۲}{۱۲}=۱$$

مثال : تابع $f(x)=x^۲+۵x-۱$ را در نظر بگیرید و سپس حاصل $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ را بدست آورید.

حل :

$$f(۲)=(۲)^۲+۵(۲)-۱=۱۳$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x^۲+۵x-۱)-(۱۳)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۵x-۱۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۷)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x+۷)=۲+۷=۹$$

مثال : حد تابع $f(x)=\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}$ را در نقطه‌ی $x=۵$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x = ۵$ برابر صفرند. باید عامل $x - ۵$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. برای این کار صورت کسر را با ضرب صورت و مخرج در $۲ + \sqrt{x-۱}$ گویا می کنیم.

$$\lim_{x\to ۵} f(x) = \lim_{x\to ۵} \frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵} = \lim_{x\to ۵} \frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵} \times \frac{۲+\sqrt{x-۱}}{۲+\sqrt{x-۱}}$$

$$= \lim_{x\to ۵} \frac{۴-(x-۱)}{x-۵} \times \frac{۱}{۲+\sqrt{x-۱}} = \lim_{x\to ۵} \frac{۵-x}{x-۵} \times \frac{۱}{۲+\sqrt{x-۱}} = \lim_{x\to ۵} \frac{-۱}{۲+\sqrt{x-۱}}$$

$$= \frac{-۱}{۲+\sqrt{۵-۱}} = -\frac{۱}{۴}$$

مثال : حد تابع $f(x) = \dfrac{x^{۲} - ۸x}{\sqrt[۳]{x} - ۲}$ را در نقطه‌ی $x = ۸$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x = ۸$ برابر صفرند. باید عامل $x - ۸$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. برای این کار مخرج کسر را با ضرب صورت و مخرج در $\sqrt[۳]{x^{۲}} + ۲\sqrt[۳]{x} + ۴$ گویا می کنیم.

$$\lim_{x\to ۸} f(x) = \lim_{x\to ۸} \frac{x^{۲}-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲} = \lim_{x\to ۸} \frac{x^{۲}-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲} \times \frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}$$

$$= \lim_{x\to ۸} \frac{x^{۲}-۸x}{(\sqrt[۳]{x})^{۳}-(۲)^{۳}} \times \frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{۱} = \lim_{x\to ۸} \frac{x(x-۸)}{x-۸} \times (\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)$$

$$= \lim_{x\to ۸} x(\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴) = ۸(۴+۴+۴) = ۹۶$$

***

تمرین برای حل :

۲۲ : حدود زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to -۳} \frac{x^۲ - ۹}{x^۲ + ۳x}$

ب) $\lim\limits_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۲ - ۴x + ۱}{۲x^۲ + x - ۱}$

پ) $\lim\limits_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{۴x^۲ - ۱}{۲x^۳ - ۱۳x^۲ + ۲۴x - ۹}$

ت) $\lim\limits_{x \to -۱} \frac{x^۲ - ۱}{x + \sqrt{۲x + ۳}}$

ث) $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{x - \sqrt{x}}{x^۲ + x - ۲}$

ج) $\lim\limits_{x \to -۱} \frac{\sqrt[۳]{x} + ۱}{x^۲ + ۳x + ۲}$

۲۳ : حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{۲x^۲ - x}{۴x^۲ - ۱}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۵} \frac{x^۳ - ۴x^۲ - ۴x - ۵}{x^۲ - ۲۵}$

پ) $\lim\limits_{x \to -۴} \frac{x^۲ + ۳x - ۴}{x^۳ + ۴x^۲ + x + ۴}$

۲۴ : حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{x - \sqrt{۲x - ۱}}{x^۲ - x}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{۲ - \sqrt{x + ۱}}$

پ) $\lim\limits_{x \to -۸} \frac{۲x + ۱۶}{\sqrt[۳]{x} + ۲}$

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

درس دوّم : حدهای نامتناهی

درسال گذشته با مفهوم حد تابع در یک نقطه آشنا شده اید. اکنون می خواهیم این مفهوم را گسترش دهیم و مفهوم حدهای نامتناهی و همچنین حد در بین نهایت را معرفی کنیم. ولی ابتدا به تعریف همسایگی یک عدد حقیقی دقت کنید.

قسمت اوّل : همسایگی یک عدد حقیقی

فرض کنید که a عددی حقیقی باشد. در این صورت هر بازه‌ی باز شامل a را یک همسایگی بـرای a مـی نامند.

در شکل فوق چون $a \in (m,n)$ است، پس بازه‌ی (m,n) یک همسایگی برای نقطه‌ی a محـسوب مـی شود. حال اگر نقطه‌ی a را از همسایگی فوق حذف کنیم. مجموعه‌ی $(m,n)-\{a\}$ حاصل می شود که به آن همسایگی محذوف نقطه‌ی a می گویند.

مثال : بازه‌ی $(۱,۵)$ یک همسایگی نقطه‌ی ۲ و مجموعه‌ی $(۲,۶)-\{۵\}$ یک همسایگی محذوف نقطه‌ی ۵ است.

تذکر: برای هر نقطه مانند a می توان تعداد بیشمار بازه‌ی باز تعریف نمود که شامل a باشـند. بـه عبـارتی دیگر برای هر نقطه، همسایگی های بیشمار مـی تـوان تعریـف کـرد. مـثلاً بـازه هـای $(-۱,۱)$ و $(-۳,۲)$ همسایگی صفر هستند.

همسایگی چپ و همسایگی راست یک نقطه

اگر (m,n) یک همسایگی برای نقطه‌ی a باشد. در این صـورت بـازه‌ی (m,a) همسـایگی چـپ و بـازه (a,n) همسایگی راست نقطه‌ی a تعریف می شوند.

همسایگی راست a

همسایگی چپ a

مثال : چون عدد ۳ عضو بازه‌ی $(۱,۷)$ است. بنابراین بازه‌ی $(۱,۳)$ همسایگی چپ ۳ و بازه‌ی $(۳,۷)$ همسایگی راست ۳ است.

مثال : بازه‌ی $(۱,۴)$ یک همسایگی چپ ۴ و یک همسایگی راست ۱ می باشد.

تمرین ۱ : یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای عدد ۵ مثال بزنید.

تمرین ۲ : آیا بازه‌ی $(۲,۳)$ یک همسایگی برای ۲ می باشد؟ چرا؟

تمرین ۳ : نمودار تابعی را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه‌ی ۲- تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

تمرین برای حل :

۴ : نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در یک همسایگی نقطه‌ی $x=۳$ تعریف شده باشند و $f(۳)\neq g(۳)$

۵ : تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۴-x^۲}}{x}$ را در نظر بگیرید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه‌ی این تابع را به دست آورید.

ب : بنویسید که دامنه‌ی تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

ج : آیا این تابع در $x=۱$ تعریف شده است؟

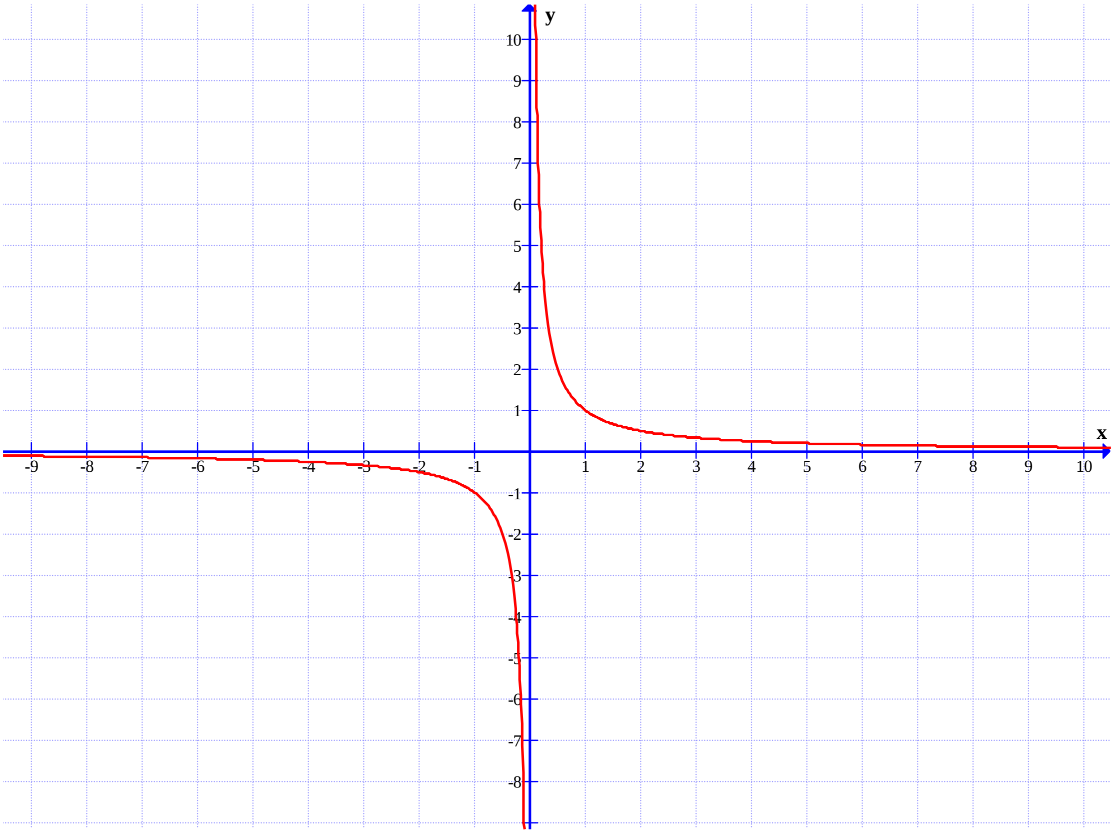
د : تابع در کدام یک همسایگی های راست یا چپ $x=۲$ تعریف شده است؟

۶ : اگر بازه‌ی $(x-۱,x+۳)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه‌ی مقادیر x را به دست آورید.

***

قسمت دوّم : حدهای نامتناهی

نمودار زیر ، نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ می باشد.



همانطور که در این نمودار مشاهده می کنید. هر چه x با مقادیر بزرگتر از صفر به صفر نزدیک شود، مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می یابد. به عبارتی دیگر می توان $f(x)$ را از هر عدد مثبتی که دلخواهی که در نظر بگیریم بزرگتر کرد به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی با مقادیر بزرگتر از صفر به صفر نزدیک کرد. در این صورت می نویسیم.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty$$

توجه داشته باشید که این نماد نشان می دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی شود و مثبت بی نهایت فقط یک نماد است که نمایش می دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می تواند بزرگتر باشد.

همچنین در این نمودار مشاهده می کنید. هر چه x با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک شود، مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی کاهش می یابد. به عبارتی دیگر می توان $f(x)$ را از هر عدد منفی که

دلخواهی که در نظر بگیریم کوچکتر کرد به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک کرد. در این صورت می نویسیم.

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = -\infty$$

باز تأکید می شود که این نماد نشان می دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی شود و منفی بی نهایت فقط یک نماد است که نمایش می دهد مقدار تابع از هر عدد منفی می تواند کوچکتر باشد.

با درک توصیف های فوق برای نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ می توان حدهای یک طرفه نامتناهی را بدین شکل تعریف کرد.

تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی

فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

به طور مشابه می توان حد های یک طرفه‌ی $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ را نیز تعریف کرد. در تمرین زیر جای خالی مربوط به این دو حد را تکمیل کنید.

تمرین۷ : جای خالی را کامل کنید.

الف : فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

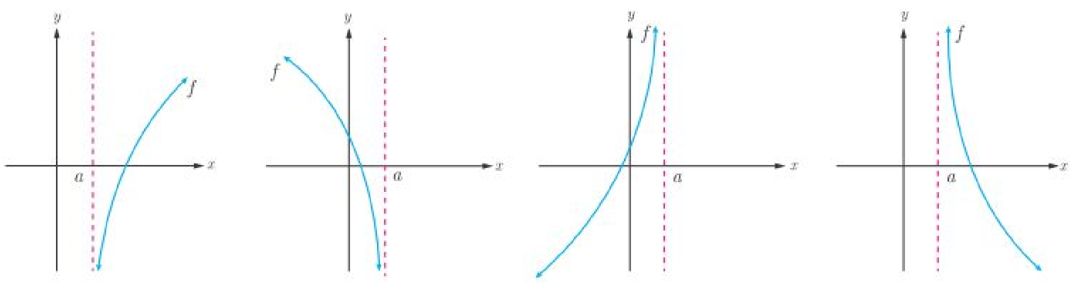
بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد ...... کوچکتر کرد به شرطی که x را از سمت .... به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

ب : فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی .... نقطه ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد منفی کوچکتر کرد به شرطی که x را از سمت .... به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

پس از ملاحظه و درک تعاریف مربوط به حدهای یک طرفه‌ی نامتناهی، در شکل های زیر این حالت ها را مشاهده می کنید.



$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

تمرین ۸ : نمودار تابع $f(x) = \log_{۲}^{x-۱}$ را رسم کنید. در مورد حد زیر بحث کنید.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) =$$

تمرین ۹ : نمودار تابع $f(x) = -\frac{۱}{x}$ را رسم کنید. سپس تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰^+} f(x) =$ $\qquad$ ب) $\lim_{x\to ۰^-} f(x) =$

تمری ۱۰ : نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{|x|}$ را رسم کنید. سپس تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=$

تمرین ۱۱ : نمودار تابع $f(x)=\tan x$ را در فاصله‌ی $(۰,\pi)$ رسم کنید. سپس تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} f(x)=$ ب) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} f(x)=$

***

تعریف حدهای نامتناهی

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{|x|}$ مشاهده کردید که $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=+\infty$

لذا می توان گفت که با نزدیک کردن x به اندازه‌ی کافی به صفر (از سمت راست و از سمت چپ)، مقادیر $f(x)$ را می توان به دلخواه بزرگ کرد. بنابراین $f(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ تر می شود و در نتیجه مقدار تابع یک عدد خاصی نمی شود و حد نامتناهی است و می نویسیم.

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=+\infty$$

اکنون **حدهای نامتناهی** را به صورت زیر تعریف می کنیم.

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

یعنی اینکه می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از هر دو سمت راست و چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

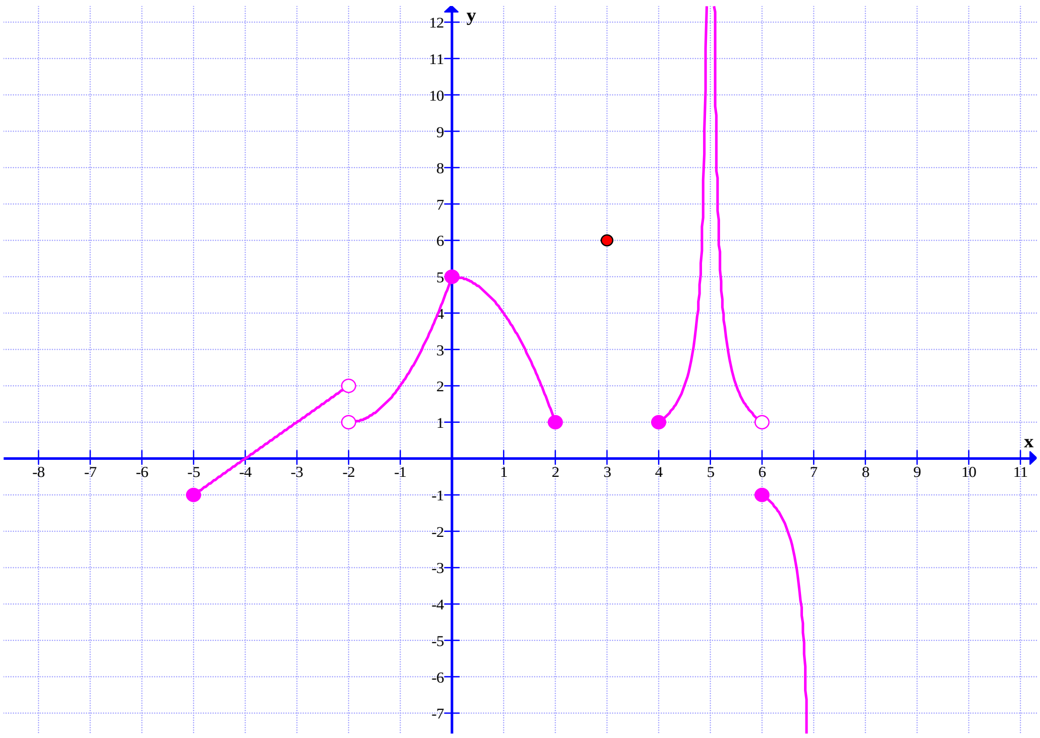
یعنی اینکه می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد منفی کوچکتر کنیم به شرطی که x را از هر دو سمت راست و چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تمرین ۱۲ : نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$ را رسم کنید. سپس تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)=$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x)=$

تمرین ۱۳ : با توجه شکل زیر وجود حد تابع در نقاط داده شده را بررسی کنید.



۱) $\lim\limits_{x\to(-۵)^{+}} f(x)=$

۲) $\lim\limits_{x\to(-۲)^{+}} f(x)=$

۳) $\lim\limits_{x\to(-۲)^{-}} f(x)=$

۴) $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)=$

۵) $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=$

۶) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=$

۷) $\lim\limits_{x\to ۶} f(x)=$

۸) $\lim\limits_{x\to ۷^{-}} f(x)=$

قضایای حدهای بی نهایت

در این قسمت، چند قضیه‌ی مهم در مورد حدهای بی نهایت ، بدون اثبات بیان می کنیم.

قضیه‌ی ۱ : اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ در صورتی که n زوج باشد.

ج) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ در صورتی که n فرد باشد.

مثال : با توجه به قضیه‌ی فوق می توان نوشت:

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

قضیه‌ی ۲ :

الف : اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ و برعکس

ب : اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ و برعکس

مثال :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2}{|x-1|} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2}{|x-1|} = +\infty \end{cases} \rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$$

قضیه‌ی ۳ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ آنگاه :

الف : اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد،آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب : اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد،آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ج : اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد،آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

د : اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد،آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

تذکر : این قضیه برای حد های یک طرفه نامتناهی (یعنی در حالت های که $x\to a^+$ و $x\to a^-$) نیز برقرار است.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{x+۱}{۴-x^۲}$ را به دست آورید.

حل : چون $\lim\limits_{x\to ۲^-}(x+۱)=۲+۱=۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-}(۴-x^۲)=۴-۴=۰$ پس طبق قضیه

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۱}{۴-x^۲}=+\infty$$

توجه : وقتی می نویسیم $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ ، یعنی این که حاصل حد صفر مطلق نمی باشد. بلکه عدد بسیار بسیار نزدیک صفر می باشد که برخی آن را صفر حدی می نامند. به همین دلیل است که گفته می شود که در حد توابع کسری وقتی صورت عددی غیر صفر و مخرج صفر حدی باشد، حد ، بی نهایت می شود و علامت آن را با توجه به علامت صورت و مخرج تعیین می کنند. برای مثال بعضی برای محاسبه‌ی حد زیر به شکل زیر عمل می کنند.

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۱}{۴-x^۲}=\frac{۲+۱}{۴-(۲^-)^۲}=\frac{۳}{۰^+}=+\infty$$

به نمونه های زیر نیز توجه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۵}{x-۲}=\frac{۵}{۲^+-۲}=\frac{۵}{۰^+}=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۵}{x-۲}=\frac{۵}{۲^--۲}=\frac{۵}{۰^-}=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{-۵}{x-۲}=\frac{-۵}{۲^+-۲}=\frac{-۵}{۰^+}=-\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{-۵}{x-۲}=\frac{-۵}{۲^--۲}=\frac{-۵}{۰^-}=+\infty$

۵) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{x-۷}{x-۳}=\frac{۳-۷}{۳^+-۳}=\frac{-۴}{۰^+}=-\infty$

۶) $\lim\limits_{x\to ۵^+}\frac{x-۲}{[x]-۵}=\frac{۵-۲}{[۵^+]-۵}=\frac{۳}{۵-۵}=\frac{۳}{۰}$ نامعین(مخرج صفر مطلق است)

صفر حدی و صفر مطلق

برای درک مفهوم حدهای نامتناهی ، لازم است تفاوت صفر حدی و صفر مطلق را بدانیم.

صفر مطلق : همان عدد صفر است که مبدأ اعداد حقیقی است.

صفر حدی : عدد بسیار کوچک مثبت و نزدیک صفر و یا عدد بسیار کوچک منفی و نزدیک صفر است.

بر این اساس

۱ : اگر مخرج کسری صفر مطلق باشد. این کسر تعریف نشده (نامعین) می باشد. برای مثال کسر $\frac{۵}{۰}$ نامعین است.

۲ : اگر مخرج کسری صفرحدی باشد. این کسر یک عدد بسیار بزرگ مثبت و یا بسیار بزرگ منفی خواهد شد. مانند :

الف) $\frac{۵}{۰^+}=+\infty$ ب) $\frac{۵}{۰^-}=-\infty$ ج) $\frac{-۵}{۰^+}=-\infty$ د) $\frac{-۵}{۰^-}=+\infty$

۳ : اگر صورت و مخرج کسری صفر مطلق باشد.آن کسر تعریف نشده است ولی اگر صورت و مخرج آن صفر حدی باشند، گویند حد مبهم است و قابل محاسبه می باشد.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x-۱}{\sin x}$ را به دست آورید.

حل : وقتی x در همسایگی راست صفر باشد، صورت کسر برابر ۱− و مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که در همسایگی راست صفر $\sin x$ مقداری مثبت است. در نتیجه طبق قضیه، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{x-۱}{\sin x}=-\infty$$

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\dfrac{x^۲+x}{x^۲+۲x+۱}$ را به دست آورید.

حل : از آنجا که حد فوق به صورت مبهم $(\frac{-}{\circ})$ در می آید و چون $x\neq -۱$ پس می توان صورت و مخرج کسر را بر $x+۱$ تقسیم کرد. یعنی:

$$\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{x^۲+x}{x^۲+۲x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{x(x+۱)}{(x+۱)^۲}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{x}{x+۱}=+\infty$$

تمرین ۱۴: مقدار حدهای زیر را در صورت وجود، بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to۲^+}\dfrac{[x]-۱}{x-[x]}$

ب) $\lim\limits_{x\to۲^-}\dfrac{[x]+۱}{x-۲}$

تمرین۱۵: مقدار حد زیر را در صورت وجود، بدست آورید.

$$\lim_{x\to۴}\frac{(-۱)^{[x]}}{x-۴}$$

تمرین برای حل:

۱۶ : حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to(-۲)^+}\dfrac{۱-x}{x+۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to۲^-}\dfrac{[x]-۲}{x-۲}$ پ) $\lim\limits_{x\to۱^+}\dfrac{x^۲-۱}{(x-۱)^۲}$

۱۷ :

الف : عبارت $\lim\limits_{x\to۲^-}f(x)=+\infty$ به چه معنا است؟ توضیح دهید؟

ب : عبارت $\lim\limits_{x\to۲^+}f(x)=-\infty$ به چه معنا است؟ توضیح دهید؟

پ : نمودار تابعی مانند f را طوری رسم کنید که هر دو شرط بالا را داشته باشد. (مسئله چند جواب دارد؟)

۱۸ : نمودار تابعی مانند f را طوری رسم کنید که در یک همسایگی محذوف ۲- تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to(-۲)^+}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-۲)^-}f(x)=+\infty$. آیا این مسئله فقط یک پاسخ دارد؟ چرا؟

۱۹ : نمودار تابعی مانند f را طوری رسم کنید که در یک همسایگی محذوف یک تعریف شده باشد و

$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=+\infty$. آیا این مسئله فقط یک پاسخ دارد؟ چرا؟

***

قضیه‌ی ۴ :

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ (یا $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$)آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=۰$

تذکر : این قضیه برای حد های یک طرفه نامتناهی(یعنی در حالت های که $x\to a^+$ و $x\to a^-$) نیز برقرار است.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{x+۱}{\tan x}$ را به دست آورید.

حل : می دانیم که تابع تانژانت در همسایگی $\frac{\pi}{۲}$ رفتار بی کران دارد.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+}\tan x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+}(x+۱)=\dfrac{\pi}{۲}+۱\end{cases}\to \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+}\dfrac{x+۱}{\tan x}=۰$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-}\tan x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-}(x+۱)=\dfrac{\pi}{۲}+۱\end{cases}\to \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-}\dfrac{x+۱}{\tan x}=۰$$

لذا $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{x+۱}{\tan x}=۰$

توجه : در حالت کسری، اگر صورت کسر عدد غیر صفر و مخرج کسر بینهایت شود، آن کسر بسیار بسیار کوچک (صفر حدی) می باشد. مانند حالت های زیر:

$$\frac{۲}{+\infty}=۰ \quad و \quad \frac{۲}{-\infty}=۰ \quad و \quad \frac{-۲}{+\infty}=۰ \quad و \quad \frac{-۲}{-\infty}=۰$$

قضیه‌ی ۵ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L\neq ۰$ آنگاه

الف : $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$

ب : اگر $L>۰$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))=+\infty$

ج : اگر $L<۰$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))=-\infty$

تذکر : این قضیه برای حد های یک طرفه نامتناهی (یعنی در حالت های که $x\to a^{+}$ و $x\to a^{-}$) نیز برقرار است.

مثال ۱ : توابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$ و $g(x)=x+۱$ را در نظر بگیرید.

الف : حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۰} g(x)$ را به دست آورید.

ب : حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}(f(x)+g(x))$ را محاسبه کنید.

پ : حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}(f(x)\times g(x))$ را محاسبه کنید.

حل :

$$f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}\to \lim_{x\to ۰} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad g(x)=x+۱\to \lim_{x\to ۰} g(x)=۱$$

$$\lim_{x\to ۰}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to ۰} f(x)+\lim_{x\to ۰} g(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۰}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to ۰} f(x)\times \lim_{x\to ۰} g(x)=+\infty$$

مثال ۲ : حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}(۲x+۱+\frac{۱}{x^{۲}})$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\frac{x+\sin^{۲} x}{x^{۲}}$

حل :

$$\lim_{x\to ۰}(۲x+۱+\frac{۱}{x^{۲}})=\underbrace{\lim_{x\to ۰}(۲x+۱)}_{۱}+\underbrace{\lim_{x\to ۰}(\frac{۱}{x^{۲}})}_{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x+\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x^2}+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2}=\underbrace{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}}_{+\infty}+\underbrace{\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{1}=+\infty$$

قضیه‌ی ۶ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L\neq0$ آنگاه

الف : $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=-\infty$

ب : اگر $L>0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))=-\infty$

ج : اگر $L<0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))=+\infty$

تمرین ۲۰ : حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{[x]+1}{|2x-1|}$ را محاسبه کنید.

حل : مخرج در نزدیکی $\frac{1}{2}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و حد صورت هم در $\frac{1}{2}$ برابر یک است.

بنابراین :

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{[x]+1}{|2x-1|}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}([x]+1)\times\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{1}{|2x-1|}=(1)\times(+\infty)=+\infty$$

تمرین برای حل :

۲۱ : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to5^-}\frac{2x}{x-5}$

ب) $\lim\limits_{x\to5^+}\frac{2x}{x-5}$

پ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{x^2}$

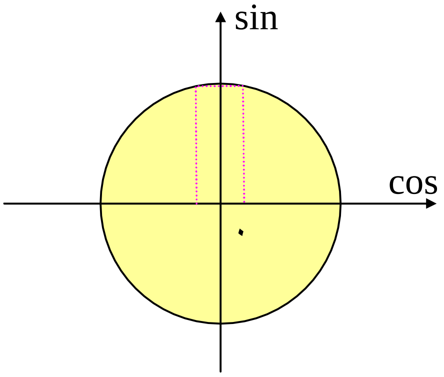
ت) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2}{|x-3|}$

ث) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{[x]}{|3x+1|}$

ج) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1}{\sin^2 x}$

تمرین ۲۲ : نشان دهید که تابع $f(x)=\tan x$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$ دارای حد نیست.

حل:



ربع دوّم $x\to(\frac{\pi}{۲})^{+}\to x>\frac{\pi}{۲}\to\cos x<۰$

ربع اوّل $x\to(\frac{\pi}{۲})^{-}\to x<\frac{\pi}{۲}\to\cos x>۰$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{+}}\tan x=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{+}}\frac{\sin x}{\cos x}=\underbrace{\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{+}}\sin x}_{۱}\times\underbrace{\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{+}}\frac{۱}{\cos x}}_{-\infty}=-\infty$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{-}}\tan x=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{-}}\frac{\sin x}{\cos x}=\underbrace{\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{-}}\sin x}_{۱}\times\underbrace{\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{-}}\frac{۱}{\cos x}}_{+\infty}=+\infty$$

توجه کنید که با توجه به نمودار تانژانت در همسایگی $\frac{\pi}{۲}$ این نتایج نیز مورد تأیید هستند.

تمرین ۲۳ : نمودار تابع $f(x)=\tan x$ را در فاصله‌ی $[۰,\pi]$ را رسم کنید و سپس به کمک آن حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{+}}\tan x$

ب) $\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{-}}\tan x$

تمرین برای حل :

۲۴ : با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی درستی حد های زیر را نشان دهید.

الف) $\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{۳+x^{۲}}}{x^{۲}}=+\infty$

ب) $\lim_{x\to۲}\frac{۱}{(x-۲)^{۴}}=+\infty$

ج) $\lim_{x\to-۲}\left|\frac{۵-x}{۲+x}\right|=+\infty$

د) $\lim_{x\to۳^{-}}\frac{x+۲}{۲x-۶}=-\infty$

۲۵ : حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{|x|}$

پ) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1}$

ت) $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{9}{(x+6)^2}$

ث) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-1}{(x-3)^2}$

ج) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{4x+1}{(2x+1)^2}$

چ) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1-5x}{x^2-9}$

ح) $\lim\limits_{x\to (-2)^-} \dfrac{-3x}{x^2-4}$

خ) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \dfrac{1}{\cos x}$

د) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \tan x$

ذ) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} \tan x$

ر) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{[x]-3}{x-3}$

۲۶ : حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x}{x^2-4}$

ب) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+2x-1}{x^2+x-12}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{1-\cos x}$

د) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2}{1-\cos x}$

۲۷ : حدود زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1^-} (\dfrac{x+1}{x-1})$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\dfrac{x^2+x}{x^2})$

ج) $\lim\limits_{x\to (-2)^+} \dfrac{x+1}{x^2+4x+4}$

د) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2-\cos 2x}{x^2}$

***

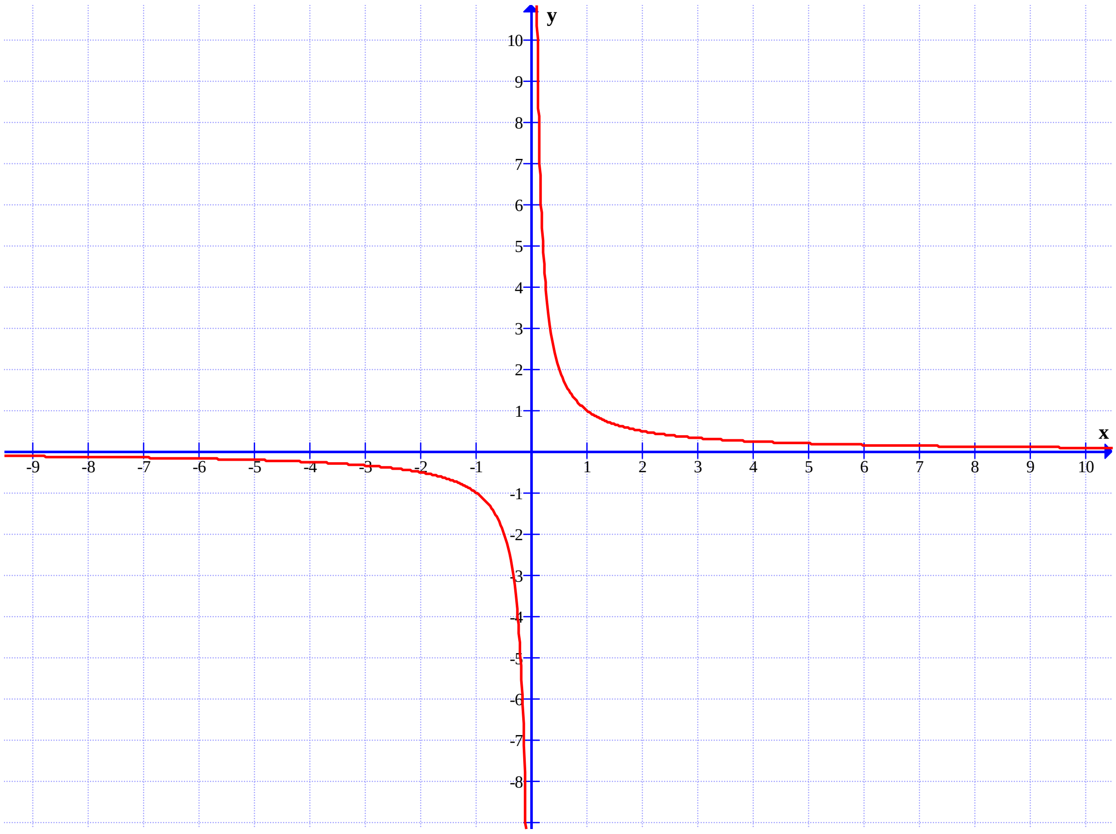
تهیه کننده : جابر عامری

درس سوّم : حد در بی نهایت

در این درس می خواهیم رفتار تابع را وقتی که متغیر x به سمت بی نهایت (بی انتها) میـل کنـد، را بررسـی کنیم. در این حالت گویند با حد در بینهایت سروکار داریم.

حد در بی نهایت

نمودار زیر ، نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ می باشد.



همانطور که در این نمودار مشاهده می کنید. هر چه x به سمت بی نهایت از سمت راست بزرگ و بزرگتر شود، مقادیر $f(x)$ به صفر نزدیک می شوند. به عبارتی وقتی x به اندازه‌ی کافی بزرگ اختیار شود می توان $f(x)$ را به اندازه‌ی دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می نویسیم.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=۰$$

همچنین به کمک همین نمودار مشاهده می کنید. هر چه x به سمت بی نهایت از سمت چپ کوچک شود، مقادیر $f(x)$ نیز به صفر نزدیک می شوند. به عبارتی وقتی x به اندازه‌ی کافی کوچک اختیار شود می توان $f(x)$ را به اندازه‌ی دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می نویسیم.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$$

و به طور خلاصه نوشته می شود که :

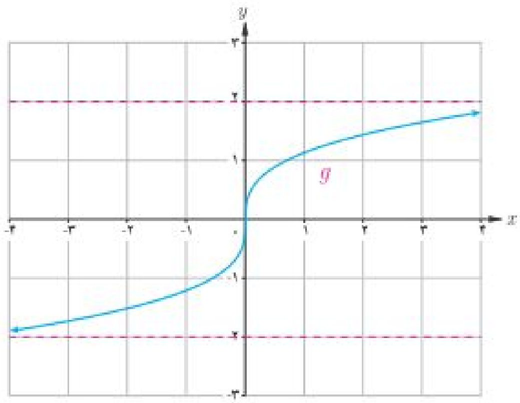
$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=0$$

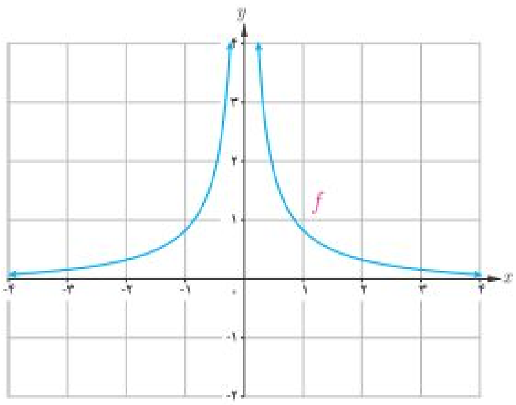
اکنون به **تعاریف** زیر توجه کنید.

الف: اگر تابع $f(x)$ در بازه ای مانند $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدرکافی بزرگ، فاصله‌ی $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.

ب: اگر تابع $f(x)$ در بازه ای مانند $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدرکافی بزرگ، فاصله‌ی $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.

تمرین ۱ : با استفاده از نمودار های f و g حدهای زیر را به دست آورید.





$$\lim_{x\to +\infty} g(x)$$
$$\lim_{x\to -\infty} g(x)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x)$$

تمرین ۲ :

الف : هر یک از رابطه های $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=2$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید؟

ب : نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی فوق را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

حال پس از آشنایی با مفهوم حد در بی نهایت، پیرامون این موضوع **قضیه** های زیر را بیان می کنیم.

قضیه ۱ : اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{x^n}=۰$$

مثال :

الف) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{۲}}{x^۲}=۰$

ب) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۵}{۲x^۳}=۰$

قضیه۲ : اگر $L_۱$ و $L_۲$ اعداد حقیقی و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L_۱$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=L_۲$ آنگاه :

الف) $\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)+\lim_{x\to+\infty}g(x)=L_۱+L_۲$

ب) $\lim_{x\to+\infty}(f-g)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lim_{x\to+\infty}g(x)=L_۱-L_۲$

ج) $\lim_{x\to+\infty}(f\times g)(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)\times\lim_{x\to+\infty}g(x)=L_۱\times L_۲$

د) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f}{g}(x)=\frac{\lim_{x\to+\infty}f(x)}{\lim_{x\to+\infty}g(x)}=\frac{L_۱}{L_۲}\quad ;\quad L_۲\neq۰$

تذکر : قضیه‌ی فوق وقتی x به سمت $-\infty$ میل می کند، نیز برقرار است.

مثال :

الف) $\lim_{x\to+\infty}(۳+\frac{۵}{x^۳})=\lim_{x\to+\infty}۳+\lim_{x\to+\infty}\frac{۵}{x^۳}=۳+۰=۳$

ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{۲+\frac{۳}{x^۲}}{\frac{۵}{x}+۴}=\frac{\lim_{x\to-\infty}۲+\lim_{x\to-\infty}\frac{۳}{x^۲}}{\lim_{x\to-\infty}\frac{۵}{x}+\lim_{x\to-\infty}۴}=\frac{۲+۰}{۰+۴}=\frac{۱}{۲}$

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۷x^{۲}-۴x+۱}{۳x^{۲}+۵x-۶}$ را به دست آورید.

حل : برای محاسبه‌ی این حد ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگترین توانی از x که در مخرج وجود دارد،

یعنی $x^{۲}$ تقسیم کنیم. (چون $x\to+\infty$ ، پس می توان نتیجه گرفت که $x^{۲}\neq ۰$)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۷x^{۲}-۴x+۱}{۳x^{۲}+۵x-۶}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{۷x^{۲}-۴x+۱}{x^{۲}}}{\dfrac{۳x^{۲}+۵x-۶}{x^{۲}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۷-\dfrac{۴}{x}+\dfrac{۱}{x^{۲}}}{۳+\dfrac{۵}{x}-\dfrac{۶}{x^{۲}}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(۷-\dfrac{۴}{x}+\dfrac{۱}{x^{۲}})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(۳+\dfrac{۵}{x}-\dfrac{۶}{x^{۲}})}==\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}۷-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۴}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۱}{x^{۲}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}۳+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۵}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۶}{x^{۲}}}=\frac{۷-۰+۰}{۳+۰-۰}=\frac{۷}{۳}$$

تمرین برای حل :

۳ : حد های زیر را محاسبه کنید.

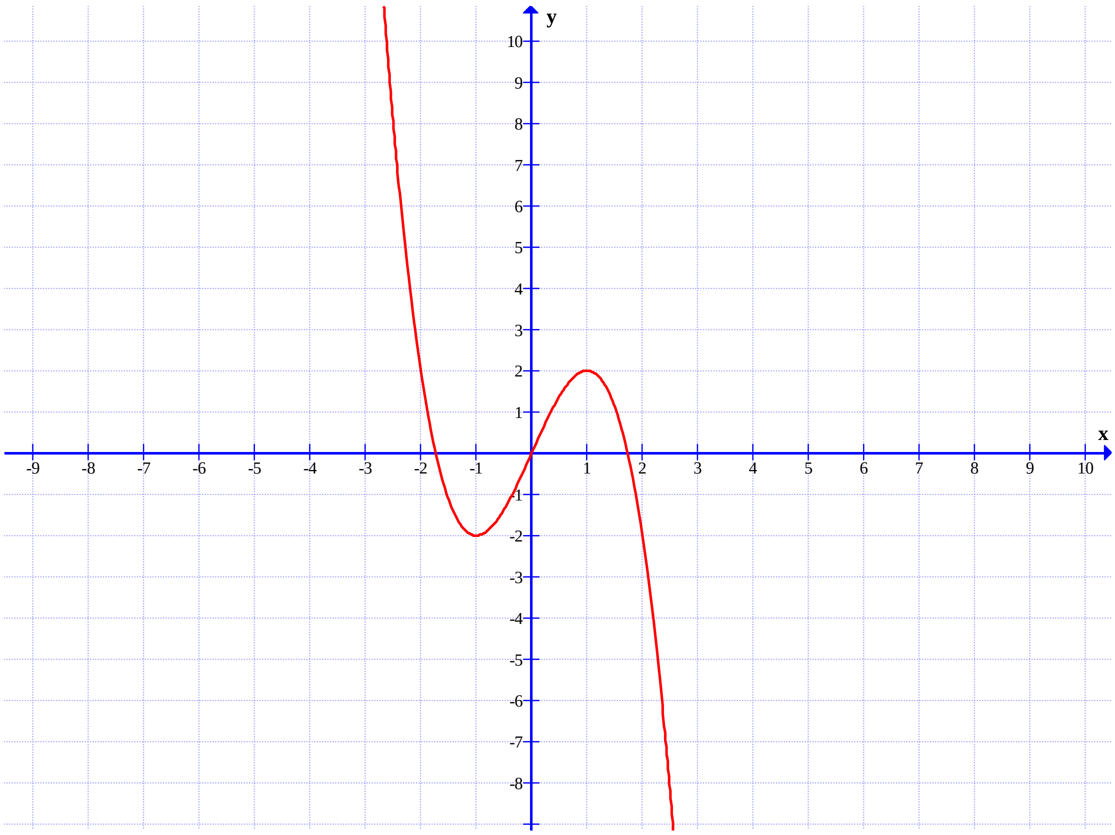
الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۳}{x^{۲}}$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x-۱}{x}$ ج) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۳x^{۳}+x-۱}{۶x^{۳}-۲x+۱}$

***

حدهای نامتناهی در بی نهایت

در محاسبه‌ی حد توابع ممکن است وقتی x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند، مقدار های $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند و از هر عدد دلخواه مثبت بزرگتر شوند یا از هر عدد دلخواه منفی کوچکتر شوند.

به شکل های زیر توجه کنید و تساوی های زیر را کامل کنید.



الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$

اکنون به تعاریف زیر توجه کنید.

الف : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگتر شوند، می نویسند.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ب : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچکتر شوند، می نویسند.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

ج : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگتر شوند، می نویسند.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

د : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچکتر شوند، می نویسند.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

به مثال های زیر توجه نمایید.

مثال : حد توابع زیر را بدست آورید[1].

۱) $\lim_{x \to +\infty} (-۲x^۳) = -۲(+\infty)^۳ = -\infty$

۲) $\lim_{x \to -\infty} (۳x^۴) = ۳(-\infty)^۴ = +\infty$

۳) $\lim_{x \to -\infty} (-۵x^۳) = -۵(-\infty)^۳ = +\infty$

۴) $\lim_{x \to -\infty} (-۲x^۳) = -۲(-\infty)^۳ = +\infty$

۵) $\lim_{x \to \pm\infty} (-۳x^۲) = -۳(\pm\infty)^۲ = -\infty$

حال پس از آشنایی با مفهوم حد نامتناهی در بی نهایت، پیرامون این موضوع **قضیه** های زیر را بیان می کنیم.

قضیه ۱ : فرض کنید که a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، در این صورت

الف : اگر n زوج باشد، آنگاه $\lim_{x \to \pm\infty} x^n = +\infty$

ب : اگر n فرد باشد، آنگاه $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

مثلاً :

$\lim_{x \to +\infty} x^۵ = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} x^۴ = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} x^۳ = -\infty$

[1]. توجه داشته باشید، این نحوه‌ی نوشتن از نظر ریاضی ایراد دارد، ولی برای تعیین علامت حاصل لازم است.

قضیه ۲ : اگر L عددی حقیقی (ناصفر) و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ آنگاه :

الف : اگر L مثبت باشد.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to+\infty} f(x)\times \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

ب : اگر L منفی باشد.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to+\infty} f(x)\times \lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$$

تذکر : این قضیه برای $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ به طور مشابه برقرار است.

قضیه ۳ : اگر L عددی حقیقی (ناصفر) و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ آنگاه :

الف : اگر L مثبت باشد.

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to-\infty} f(x)\times \lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$$

ب : اگر L منفی باشد.

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to-\infty} f(x)\times \lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$$

تذکر : این قضیه برای $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ به طور مشابه برقرار است.

و به طور کلی قضیه‌ی فوق را می توان به شکل جدول زیر تعمیم داد.

	n فرد	n زوج
a مثبت	$\lim_{x\to+\infty} ax^n=+\infty$	$\lim_{x\to+\infty} ax^n=+\infty$
	$\lim_{x\to-\infty} ax^n=-\infty$	$\lim_{x\to-\infty} ax^n=+\infty$
a منفی	$\lim_{x\to+\infty} ax^n=-\infty$	$\lim_{x\to+\infty} ax^n=-\infty$
	$\lim_{x\to-\infty} ax^n=+\infty$	$\lim_{x\to-\infty} ax^n=-\infty$

اکنون با توجه به این قضیه، مثال زیر را می توان عنوان کرد.

مثال : حد توابع زیر را بدست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^3)=-\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^4)=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x^3)=+\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^6)=-\infty$

۵) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-3x^2)=-\infty$

۶) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3)=-\infty$

به کمک قضایای قبل می توان حد توابع چند جمله ای در بی نهایت را نیز محاسبه کرد. به **مثال** زیر توجه کنید.

$$\lim_{x\to-\infty}(3x^4+2x^2-5x+7)=\lim_{x\to-\infty}x^4(3+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}+\frac{7}{x^4})$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^4\times\lim_{x\to-\infty}(3+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}+\frac{7}{x^4})=(+\infty)\times(3+0+0+0)=+\infty$$

تمرین۴ : حدود زیر را نیز محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3+5x^2)$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+4x^2-5x-9)$

با این روش می توان حد هر تابع چند جمله ای را به دست آورد. به قضیه‌ی زیر توجه کنید.

قضیه ۴ : حد هر چند جمله ای به صورت

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$$

در $\pm\infty$ برابر حدجمله ای از آن است که دارای بزرگترین درجه است. یعنی :

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

به استدلال زیر توجه کنید.

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x^1+a_0)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}x^n(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\frac{a_{n-2}}{x^2}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n})$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty} x^n \times \lim_{x\to\pm\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty} x^n \times (a_n + 0 + 0 + \dots + 0 + 0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

لذا در حد توابع چند جمله ای، با توجه به روش فاکتورگیری نتیجه می شود، که حد تابع چند جمله ای ، با حد جمله ای از آن که دارای بیشترین توان باشد، برابر است. از این به بعد در یک چند جمله ای ، جملـه ای کـه دارای بیشترین توان باشد، را **جمله‌ی ارشد** نام گذاری می کنیم.

مثال : حد های زیر را حساب کنید.

۱) $\lim_{x\to+\infty} (-5x^7 + 3x^4 - 2) = \lim_{x\to+\infty} (-5x^7) = -\infty$

۲) $\lim_{x\to+\infty} (3x - 4x^2 - 7) = \lim_{x\to+\infty} (-4x^2) = -\infty$

۳) $\lim_{x\to-\infty} (3x + 5x^2 - x^3 - 2) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = +\infty$

تمرین۵ : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to-\infty} (-2x^3 + x - 1)$ ب) $\lim_{x\to+\infty} (3 - 2x - 5x^4)$

به طور مشابه برای محاسبه‌ی حد توابع کسری[2]، مانند توابع چند جمله ای ، ابتدا جملات ارشد را از صورت و مخرج انتخاب نموده و پس از ساده کردن، حد را محاسبه می کنیم به استدلال زیر توجه کنید.

در محاسبه ی حد توابع کسری نظیر $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ وقتی که $x \to \pm\infty$ به شکل زیر عمل می کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} q(x)} = \frac{a \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n}{b \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^m} = \frac{a}{b} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}$$

که در آن ax^n جمله‌ی ارشد صورت و bx^m جمله‌ی ارشد مخرج فرض شده است.

---

2. تابعی که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشند.

مثال : حد های زیر را حساب کنید.

$$1)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+7x-2}{5-3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{-3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-3}=-\frac{1}{3}(-\infty)=+\infty$$

$$2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{4-5x^2+7x}{2x^2+3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x^2}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{2}=\frac{-5}{2}$$

$$3)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-2}{5x-3x^4+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{-3x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-3x}=\frac{2}{-3(-\infty)}=0$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+7x+1}{x-3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{-3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{-3}=-\frac{4}{3}(+\infty)=-\infty$$

نتیجه می شود که در محاسبه‌ی حد توابع کسری سه حالت وجود دارد.

الف) توان جمله‌ی ارشد صورت از توان جمله‌ی ارشد مخرج ، بیشتر باشد. در این صورت جواب مثبت بی نهایت یا منفی بی نهایت می شود. مانند مثال های ۱ و ۴ فوق

ب) توان جمله‌ی ارشد صورت از توان جمله‌ی ارشد مخرج ، کمتر باشد. در این صورت جواب صفر حدی می شود. مانند مثال ۳ فوق

ج) توان جمله‌ی ارشد صورت و مخرج برابر باشد. در این صورت جواب عددی غیر صفر بوده و برابر نسبت ضریب های جملات ارشد می شود. مانند مثال ۲ فوق

تمرین۶ : حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+2x^3-2}{5x-3x^4+1}$

ب) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-7x+1}{2x^2-x+3}$

ج) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^3+x-1}{6x^3-2x+1}$

د) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+1}{4x^3+2x-1}$

برای محاسبه‌ی حد تابع رادیکالی با فرجه‌ی ۲ (اصم)، با توجه به روش فاکتورگیری هم ارزی های زیر حاصل می شود. این هم ارزی ها را **هم ارزی های نیوتن** می نامند. توجه داشته باشید که دو تابع را **هم ارز** گویند هرگاه حد برابر داشته باشند.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{ax^{۲}+bx+c}\equiv\lim_{x\to+\infty}\sqrt{a}(x+\frac{b}{۲a})$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{ax^{۲}+bx+c}\equiv-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{a}(x+\frac{b}{۲a})$$

در این دو هم ارزی عدد a مثبت فرض شده است و اگر منفی باشد، تابع دارای حد نیست.

مثال : حدهای زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{۴x^{۲}-۷x+۱}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{۴}(x+\frac{-۷}{۲(۴)})=\lim\limits_{x\to+\infty}۲x=۲(+\infty)=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{۹x^{۲}-x+۱}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{۹}(x+\frac{-۱}{۲(۹)})=-\lim\limits_{x\to-\infty}۳x=-۳(-\infty)=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{۹x^{۲}+۷}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{۹}(x+\frac{۰}{۲(۹)})=-\lim\limits_{x\to-\infty}۳x=-۳(-\infty)=+\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^{۲}-x+۱}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{۱}(x+\frac{-۱}{۲(۱)})=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

۵) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{-۴x^{۲}+۵x+۳}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{-۴}(x+\frac{۵}{۲(-۴)})=$ حد ندارد.

تمرین برای حل :

۷ : در هر مورد حد داده شده را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳x+۲}{x-۱}$ ب) $\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{۱-۵t^{۲}}{t^{۲}+۳t}$ پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{۲-۳x}$

۸ : تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر ۱- باشد.

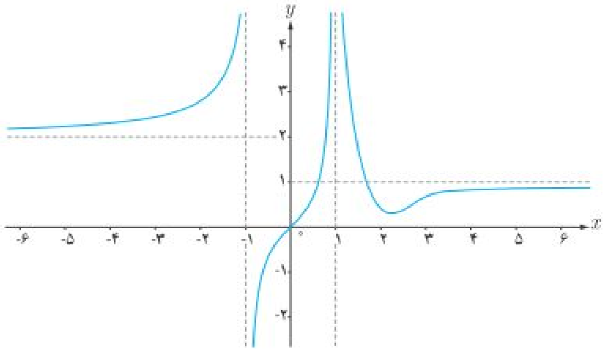
۹ : تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۵ باشد.

۱۰ : نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{۱}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to۰}f(x)$

ب) $g(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

۱۱ : نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید.



الف) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

۱۲ : حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to -\infty} (۹+\frac{۷}{x^۳})$

۲) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{۱}{۲x-۳}$

۳) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۲x-۱}{۳x+۱}$

۴) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{۲x^۵-۶x^۳-x}{x^۲-۵x+۱}$

۵) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}$

۶) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-\frac{۱}{۲}x^۳+۷x^۲-۶)$

۷) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵}$

۸) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+۵x-۳}$

۹) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^۲+x}{۳-x}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۲x+۱}{۴}$

۱۳ : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۲x^۳-۵x+۴}{۷x^۳-۱۱x^۲-۶x}$

ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{۵x+۴}{x^۳+x-۸}$

پ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-۴x^۷+۵x^۲}{۲x^۳+۹}$

۱۴ : حد های زیر را محاسبه کنید.

۱ -۴) $\lim\limits_{x\to -\infty} (5x-9x^4-x+1)$

۵ -۴) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x+\sqrt{9x^2-x}}{5-6x}$

۲ -۴) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x+2x^3-2}{5x-3x^4+1}$

۶ -۴) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x}-7x}{6x-\sqrt{9x^2+5}}$

۳ -۴) $\lim\limits_{t\to -\infty} \frac{t^2+1}{t^3-2t^2+1}$

۷ -۴) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4x-\sqrt{x^2+7x-1}}{5x+\sqrt{x^2+x-2}}$

۴ -۴) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+3x-1}-x+5)$

۸ - ۴) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-3x+\sqrt{x^2+1}}{6x+\sqrt{4x^2-1}}$

۱۵ : حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^3-8x}{3x+5}$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2+2x+7})$

ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+3}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

۱۶ : با توجه به تابع مقابل حد های زیر را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ \frac{5x^2-3x}{-x^2+1} & x\leq 0 \end{cases}$$

الف) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=$

ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=$

۱۷ : مقدار k را به قسمی تعیین کنید که حد تابع $f(x)=\frac{2x^4+x^3-1}{kx^4+x^2+1}$ وقتی که $x\to +\infty$ برابر۴ باشد.

۱۸ : مقدار n و m را چنان بیابید. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{mx^{۲} - ۵}{۲x^n - ۳x - ۲} = ۱$

۱۹ : مقدار k را چنان بیابید. $\lim\limits_{x \to -\infty} [۲x - ۱ + \sqrt{۴x^{۲} + kx + ۱}] = ۵$ (جواب $k = -۲۴$)

۲۰ : مقدار n و m را چنان بیابید. $\lim\limits_{x \to +\infty} [mx + n + \sqrt{x^{۲} - ۴x - ۳}] = ۲$

(جواب $n = ۴$ و $m = -۱$)

۲۱ : اگر $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(a-۲)x^{۳} + ۲x^{۲} + ۳}{bx^{۲} + ۱} + ۳ = ۵$ مقدار a و b را به دست آورید.

۲۲ : اگر $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{۳}}{ax^n} = ۰$ آنگاه حداقل مقدار n را تعیین کنید. $(n \in N)$

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه

استان خوزستان