

# ریاضی ۱

پایه می دهم « رشته های علوم تجربی و ریاضی و فیزیک »

**فصل ۴ : معادله ها و نامعادله ها**

**تهیه کننده : جابر عامری**

**عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه**

**استان خوزستان**

**مهر ۱۳۹۹**

## درس اول: معادلات درجه ی دوم و روش های حل آنها

در سال های قبل با معادله ی درجه ی اول و روش حل آن آشنا شده اید. در این درس معادله ی درجه ی دوم را معرفی و روش های حل آن را بیان می کنیم.

### قسمت اول: معادله ی درجه ی دوم

هر معادله که پس از ساده کردن به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  (که در آن  $a \neq 0$  باشد) درآید، را معادله ی درجه ی دوم می نامند. در این معادله  $c$  و  $b$  و  $a$  را ضرایب معادله می گویند.

**تمرین ۱:** نشان دهید که معادله ی زیر یک معادله ی درجه ی دوم است. سپس ضرایب آن را تعیین کنید.

$$(2x + 1)^2 = (3 - 2x)^2 + 5(x - 1)(x + 1)$$

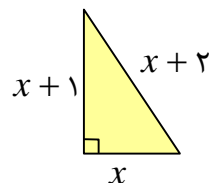
**تمرین ۲:** نشان دهید که برای پاسخ به این سؤال که، «کدام اعداد صحیح متوالی می توانند اضلاع یک مثلث قائم الزاویه باشند؟» از معادله ی درجه دوم استفاده می شود. این معادله را بنویسید.

حل: چون اضلاع مثلث قائم الزاویه، متوالی می باشند، لذا آنها را  $x$  و  $x + 1$  و  $x + 2$  قرار می دهیم. چون طول ضلع مثلث، مثبت است، لذا  $x + 2$  وتر است. همچنین طبق قضیه ی فیثاغورس می توان نوشت:

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$$

$$\rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$$

$$\rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$



\*\*\*

### قسمت دوم: روش های حل معادله ی درجه ی دوم

منظور از حل یک معادله ی درجه ی دوم تعیین ریشه های آن است. برای حل یک معادله ی درجه ی دوم روش های مختلفی وجود دارد. در اینجا، دو روش متداول را به طور خلاصه توضیح می دهیم.

#### روش اول: تجزیه

می دانیم که اگر حاصل ضرب دو عدد صفر باشد. حداقل یکی از آنها صفر است.

<sup>1</sup>. ریشه، عددی است که به ازای آن معادله برقرار باشد.

$$A \times B = 0 \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

بر این اساس اگر تمام جملات معادله را به طرف اول منتقل کنیم و سپس در صورت امکان به کمک یکی از روش های تجزیه عبارت طرف اول را تجزیه نماییم. با استفاده از الگوی فوق می توان ریشه های معادله را تعیین کرد.

تمرین ۳: معادله  $x^2 - 3x = -2$  را حل کنید.

حل: پس از منتقل کردن تمام جملات به طرف اول معادله، به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک عبارت طرف اول را تجزیه می کنیم.

$$x^2 - 3x = -2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x-1)(x-2) = 0$$

پس داریم:

$$\begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \end{cases}$$

تمرین ۴: معادله های زیر را به کمک تجزیه حل نمایید.

$$\begin{array}{lll} ۱) 5x^2 + 30x = 0 & ۳) 25t^2 + 10t + 1 = 0 & ۵) 4k^2 - 9 = 0 \\ ۲) m^2 - 36 = 0 & ۴) x^2 - 11x + 30 = 0 & ۶) 7x^2 + 5x - 2 = 0 \end{array}$$

تمرین ۵: معادله ی درجه ی دو می بنویسید که ریشه های آن ۳ و -۱ باشند.

حل:

$$\begin{cases} x = -1 \rightarrow x + 1 = 0 \\ x = 3 \rightarrow x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow (x+1)(x-3) = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

\*\*\*

### روش دوم: مربع کامل کردن

واضح است که برای هر عدد حقیقی  $A$  و هر عدد حقیقی و غیر منفی  $B$  می توان نوشت:

$$A^2 = B \rightarrow A = \pm\sqrt{B} \rightarrow \begin{cases} A = +\sqrt{B} \\ A = -\sqrt{B} \end{cases}$$

توجه: اگر عدد  $B$  یک عدد منفی باشد. تساوی نادرست است. (چرا؟)

بر این اساس می‌توان معادلات درجه‌ی دوّمی که یک طرف آنها مربع کامل باشد را حل کرد.

**تمرین ۶:** در هر مورد مقدار  $x$  را بیابید.

۱)  $x^2 = 25$

۴)  $(2x - 1)^2 = 8$

۲)  $(x - 3)^2 = 16$

۵)  $(x + 5)^2 = -9$

۳)  $(x + 2)^2 = 0$

حل:

(۱)

$$x^2 = 25 \rightarrow x = \pm\sqrt{25} \rightarrow \begin{cases} x = +5 \\ x = -5 \end{cases}$$

(۲)

$$(x - 3)^2 = 16 \rightarrow x - 3 = \pm\sqrt{16} \rightarrow \begin{cases} x - 3 = 4 \rightarrow x = 7 \\ x - 3 = -4 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

(۳)

$$(x + 2)^2 = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

(۴)

$$(2x - 1)^2 = 8 \rightarrow 2x - 1 = \pm\sqrt{8} \rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2\sqrt{2} \rightarrow x = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \\ 2x - 1 = -2\sqrt{2} \rightarrow x = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(۵) تساوی درست نیست. لذا نمی‌توان مقداری برای  $x$  با این شرایط پیدا کرد.

بر این اساس اگر با انجام عملیاتی، شرایطی فراهم شود که طرف اول معادله مربع باشد، می‌توان به کمک

الگوی فوق ریشه‌های معادله را تعیین کرد.

تمرین ۷: معادله‌ی  $x^2 = 6x + 7$  را حل کنید.

حل:

$$x^2 = 6x + 7 \rightarrow x^2 - 6x = 7 \xrightarrow{+9} x^2 - 6x + 9 = 7 + 9 \rightarrow (x - 3)^2 = 16$$

$$\rightarrow x - 3 = \pm 4 \rightarrow \begin{cases} x - 3 = 4 \rightarrow x = 7 \\ x - 3 = -4 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

تمرین ۸: معادله  $4x^2 - 12x + 5 = 0$  را حل کنید.

حل:

$$4x^2 - 12x + 5 = 0 \xrightarrow{+9} 4x^2 - 12x + 9 = -5 + 9 \rightarrow (2x - 3)^2 = 4 \rightarrow 2x - 3 = \pm 2$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 2 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2} \\ 2x - 3 = -2 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

توجه: برای هر معادله به صورت  $x^2 + px = q$  می توان با اضافه کردن مقدار  $(\frac{p}{2})^2$  به دو طرف

تساوی، طرف اول را به مربع کامل تبدیل کرد.

$$x^2 + px = q \xrightarrow{+(\frac{p}{2})^2} x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 = q + (\frac{p}{2})^2 \rightarrow (x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2 + 4q}{4}$$

حال اگر مقدار  $\frac{p^2 + 4q}{4}$  منفی نباشد، معادله دارای جواب است. در این صورت می توان نوشت:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{4}} \rightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{4}} \rightarrow x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

تمرین ۹: معادله  $x^2 - 3x + 2 = 0$  را حل کنید.

حل:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 3x = -2 \xrightarrow{+(\frac{-3}{2})^2 = \frac{9}{4}} x^2 - 3x + \frac{9}{4} = -2 + \frac{9}{4} \rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow x - \frac{3}{2} = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2} = +\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \\ x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

تمرین ۱۰: ریشه های معادله ی زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$x^2 + 6x + 12 = 0$$

حل:

$$x^2 + 6x + 12 = 0 \rightarrow x^2 + 6x = -12$$

$$\xrightarrow{+\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9} x^2 + 6x + 9 = -12 + 9 \rightarrow (x+3)^2 = -3$$

و لذا معادله ریشه ی حقیقی ندارد.

\*\*\*

تمرین برای حل :

۱۱: معادله های زیر را به روش مربع کامل کردن حل کنید.

۱)  $x^2 - 12x - 64 = 0$

۴)  $2x^2 - x - 10 = 0$

۲)  $x^2 + 4x = 8$

۵)  $25t^2 = -40t - 16$

۳)  $m^2 - 3m + 5 = 0$

\*\*\*

حل معادله ی درجه ی دوّم در حالت کلی (روش کلاسیک)

با توجه به آنچه که در روش دوّم یعنی مربع کامل کردن بحث شد ، می توان هر معادله ی درجه دوّم به شکل

$$ax^2 + bx + c = 0$$

را به روش زیر حل کرد.

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\div a} \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \xrightarrow{\div (\frac{b}{a} \div 2)^2 = \frac{b^2}{4a^2}} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حال اگر عبارت  $b^2 - 4ac$  را برابر  $\Delta$  قرار دهیم و آنرا مبین معادله بنامیم، واضح است که در صورتی معادله دارای جواب است که  $\Delta$  منفی نباشد.

بطور کلی در این روش مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم.

(۱) با نوشتن معادله به صورت استاندارد، ضرایب معادله یعنی  $c$  و  $b$  و  $a$  را مشخص می کنیم. (ضریب  $x^2$

را  $a$ ، ضریب  $x$  را  $b$  و عدد ثابت را  $c$  می گیریم.)

(۲) مبین معادله یعنی  $\Delta = b^2 - 4ac$  را محاسبه می کنیم.

(۳) با توجه به علامت  $\Delta$  تعداد و مقدار ریشه ها را به کمک حالت های زیر تعیین می کنیم.

اگر  $\Delta > 0$  باشد، معادله دارای دو ریشه است. مقدار این ریشه ها را از تساوی های زیر محاسبه می کنیم.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

اگر  $\Delta = 0$  باشد، معادله دارای فقط یک ریشه (ریشه ی مضاعف<sup>۲</sup>) است. مقدار این ریشه را از تساوی زیر محاسبه می کنیم.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

اگر  $\Delta < 0$  باشد، معادله دارای ریشه ی حقیقی نیست.

\*\*\*

<sup>۲</sup>. ریشه ی مکرر مرتبه ی دوّم

تمرین ۱۲: معادله های زیر را حل کنید.

$$۱) ۲x^2 - ۵x + ۲ = ۰ \quad ۲) ۲۵t^2 = -۴۰t - ۱۶ \quad ۳) m^2 - ۳m + ۵ = ۰$$

حل:

(۱)

$$a = ۲ \text{ و } b = -۵ \text{ و } c = ۲$$

$$\Delta = b^2 - ۴ac = (-۵)^2 - ۴(۲)(۲) = ۲۵ - ۱۶ = ۹$$

لذا معادله دارای دو ریشه ی حقیقی است.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-۵) + \sqrt{۹}}{2(۲)} = \frac{۵ + ۳}{۴} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-۵) - \sqrt{۹}}{2(۲)} = \frac{۵ - ۳}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

(۲) ابتدا با مرتب کردن جملات ، معادله را به صورت کلی ( استاندارد ) می نویسیم.

$$۲۵t^2 = -۴۰t - ۱۶ \rightarrow ۲۵t^2 + ۴۰t + ۱۶ = ۰$$

$$a = ۲۵ \text{ و } b = ۴۰ \text{ و } c = ۱۶$$

$$\Delta = b^2 - ۴ac = (۴۰)^2 - ۴(۲۵)(۱۶) = ۱۶۰۰ - ۱۶۰۰ = ۰$$

لذا معادله دارای یک ریشه ( ریشه ی مضاعف ) است.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-۴۰}{2(۲۵)} = \frac{-۴۰}{۵۰} = -\frac{۴}{۵}$$

(۳)

$$m^2 - ۳m + ۵ = ۰$$

$$a = ۱ \text{ و } b = -۳ \text{ و } c = ۵$$

$$\Delta = b^2 - ۴ac = (-۳)^2 - ۴(۱)(۵) = ۹ - ۲۰ = -۱۱$$

لذا معادله دارای ریشه ی حقیقی نیست.

\*\*\*



تمرین ۱۳ : مقدار  $m$  را طوری بیابید که معادله‌ی زیر ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

$$2x^2 - 5x + m = 0$$

حل:

$$a = 2 \text{ و } b = -5 \text{ و } c = m$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(m) = 25 - 8m$$

$$\Delta < 0 \rightarrow 25 - 8m < 0 \rightarrow m > \frac{-25}{-8} \rightarrow m > \frac{25}{8}$$

تمرین ۱۴ : معادله‌های زیر را حل کنید.

$$nx^2 - (m + n^2)x + mn = 0, \quad n \neq 0$$

حل : واضح است که  $a = n, b = -(m + n^2), c = mn$  پس:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = [-(m + n^2)]^2 - 4(n)(mn) = m^2 + 2mn^2 + n^4 - 4mn^2 \\ &= m^2 - 2mn^2 + n^4 = (m - n^2)^2 \end{aligned}$$

لذا  $\Delta \geq 0$  یعنی معادله دو ریشه‌ی حقیقی یا ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(m + n^2) \pm (m - n^2)}{2n}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m + n^2 + m - n^2}{2n} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n} \\ x_2 = \frac{m + n^2 - m + n^2}{2n} = \frac{2n^2}{2n} = n \end{cases}$$

حل چند تمرین کاربردی :

۱۵ : دانش آموزان کلاس از دبیر حسابان ، سنش را پرسیدند. پاسخ داد : ۲۱ سال بعد، سن من توان دوم

سنی خواهد بود که ۲۱ سال پیش از این داشتم. تعیین کنید که این دبیر چند سال سن دارد؟

حل : سن دبیر را  $x$  فرض می کنیم. در این صورت :

$$x + 21 = (x - 21)^2 \rightarrow x^2 - 42x + 441 = x + 21$$

$$\rightarrow x^2 - 43x + 420 = 0 \quad \Delta = (-43)^2 - 4(1)(420) = 1849 - 1680 = 169 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{43 + 13}{2} = 28 \\ x_2 = \frac{43 - 13}{2} = 15 \end{array} \right.$$

ریشه ی  $x = 15$  قابل قبول نیست، زیرا دیبر صحبت از ۲۱ سال پیش می کند. لذا سن او کمتر از ۲۱ نیست.

**۱۶:** از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

حل: اگر طول این مستطیل را  $x$  و عرض آن را  $y$  در نظر بگیریم. در این صورت می توان نوشت:

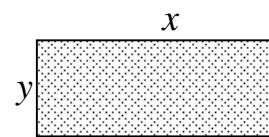
$$2(x + y) = 50 \rightarrow x + y = 25 \rightarrow y = 25 - x$$

$$مساحت \quad xy = 144 \rightarrow x(25 - x) = 144 \rightarrow x^2 - 25x + 144 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-25)^2 - 4(1)(144) = 625 - 576 = 49$$

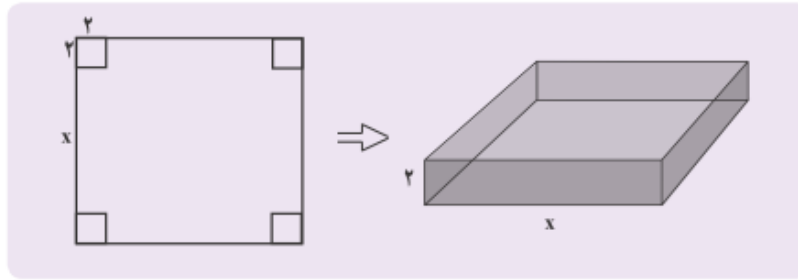
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 + 7}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 - 7}{2} = \frac{18}{2} = 9$$



واضح است که اگر طول مستطیل ۱۶ باشد، عرض آن ۹ می شود. بنابر این در هر حالت یک مستطیل با این مشخصات وجود دارد.

**۱۷:** با یک دستگاه برش، یک صفحه ی مقوایی به شکل مربع را برش می زنیم. سپس چهار مربع کوچک در گوشه های آن جدا می کنیم. بعد با تا زدن لبه ها، یک جعبه می سازیم. اگر مربع های جدا شده به ضلع ۲ سانتی متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، ۲۰۰ سانتی متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید.



حل: از مقوایی که در شکل بالا رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی متر جدا می‌کنیم تا جعبه ای که سمت راست رسم شده است به دست آید. حجم این جعبه عبارت است از:

$$2x^2 = (x)(x)(2) = \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول}$$

از طرفی طبق مسئله حجم جعبه برابر ۲۰۰ سانتی متر مکعب می‌باشد. پس می‌توان نوشت:

$$2x^2 = 200 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = \pm 10$$

توجه داشته باشید که چون  $x$  طول ضلع مکعب است، پس نمی‌تواند منفی باشد، پس فقط جواب  $x = 10$  قابل قبول است. لذا جواب مسئله یعنی ضلع مقوا می‌شود.

$$x + 2 + 2 = 10 + 2 + 2 = 14$$

**۱۸:** مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

حل: این دو عدد را  $x$  و  $x + 2$  قرار می‌دهیم. پس می‌توان نوشت:

$$x^2 + (x + 2)^2 = 290$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290 \rightarrow 2x^2 + 4x - 286 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 143 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(-143) = 576$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 24}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 24}{2} = \frac{-26}{2} = -13$$

پس این اعداد می‌توانند ۱۱ و ۱۳ یا ۱۳- و ۱۱- باشند.

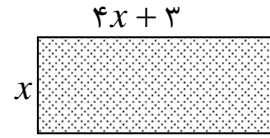
**۱۹:** طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی

متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

حل : عرض مستطیل را برابر  $x$  قرار می دهیم. در این صورت داریم.

$$x(4x + 3) = 45$$

$$4x^2 + 3x - 45 = 0$$



$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(4)(-45) = 9 + 720 = 729$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 27}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 27}{8} = \frac{-30}{8} = -3.75 \quad \text{غ ق ق}$$

پس اندازه ی عرض مستطیل برابر ۳ سانتی متر می باشد و لذا اندازه ی طول آن ۱۵ می شود.

**۲۰:** اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن

هر کدام چقدر است.

حل : اگر سن برادر بزرگ را  $x$  و سن برادر کوچک را  $y$  فرض کنیم. در این صورت داریم.

$$x - y = 4$$

لذا :

$$x = y + 4$$

از طرفی چون در چهار سال دیگر ، سن هر یک ۴ سال اضافه می شود. لذا حاصل ضرب سن چهار سال دیگر

آنها می شود  $(x + 4)(y + 4)$  . پس طبق مسئله می توان نوشت :

$$(x + 4)(y + 4) = 60$$

در نتیجه :

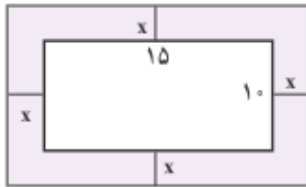
$$(x + 4)x = 60 \rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0 \rightarrow (x - 6)(x + 10) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -10 \\ x = 6 \end{cases}$$

و چون سن نمی تواند عدد منفی باشد، لذا  $x = 6$  ( سن برادر بزرگ ) قابل قبول است. پس سن برادر

کوچک  $y = 6 - 4 = 2$  می شود.

۲۱: یک عکس به اندازه‌ی ۱۰ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی متر مربع، قرار دارد.

اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب را پیدا کنید.



حل: با توجه به شکل، واضح است که ابعاد قاب

برابر  $15 + 2x$  و  $10 + 2x$  می‌باشند. پس مساحت آن می‌شود.

$$(15 + 2x)(10 + 2x) = 300$$

پس:

$$(15 + 2x)(10 + 2x) = 300 \rightarrow 4x^2 + 50x + 150 = 300 \rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0$$

$$\div 2 \rightarrow 2x^2 + 25x - 75 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (25)^2 - 4(2)(-75) = 625 + 600 = 1225$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-25 + 35}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-25 - 35}{4} = \frac{-60}{4} = -15 \quad \text{غ ق ق}$$

لذا ابعاد این قاب می‌شود:

$$\text{طول } 15 + 2x = 15 + 2(2.5) = 20$$

$$\text{عرض } 10 + 2x = 10 + 2(2.5) = 15$$

۲۲: در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها

یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به دست آورید.

حل: تعداد بازی‌های بین  $n$  تیم برابر  $\frac{n(n-1)}{2}$  است. لذا می‌توان نوشت:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45$$

$$\rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \rightarrow (n-10)(n+9) = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 10 \\ n = -9 \end{cases}$$

و چون تعداد بازی‌ها، یک عدد طبیعی است لذا  $n = 10$  قابل قبول است.

\*\*\*

تمرین برای حل:

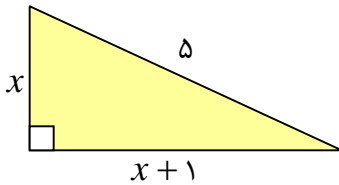
۲۳: تعیین کنید که هر کدام از معادله های زیر ریشه دارند یا نه، در صورت وجود، تعداد آنها را نیز تعیین کنید.

الف)  $5x^2 + 4x + 1 = 0$       ب)  $t^2 + 4t = -1$       ج)  $x^2 + 2x = -1$

۲۴: دو برابر یک عدد به علاوه‌ی عدد چهار، مساوی با مجذور همان عدد است. آن عدد را پیدا کنید.

۲۵: به کمک تشکیل معادله و حل آن یک عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب اعداد طبیعی قبل و بعد از

آن ۲۴ باشد.



۲۶: با توجه به شکل زیر مقدار  $x$  را بدست آورید.

۲۷: مساحت باغچه‌ای مستطیل شکل ۳۲۰ متر مربع است. اگر طول این باغچه ۴ متر بیشتر از عرض آن باشد،

طول و عرض باغچه را پیدا کنید.

۲۸: دو عدد صحیح متوالی پیدا کنید که مجموع مربعات آنها ۶۱ باشد.

۲۹: دو عدد زوج متوالی پیدا کنید که حاصل ضرب آنها ۷۲۸ باشد.

۳۰: تفاضل دو عدد صحیح ۴ است و مجموع مربعات آنها ۱۳۶ است. آن دو عدد را حساب کنید.

۳۱: طول ضلع مربعی را پیدا کنید که عدد مربوط به مساحت آن با عدد مربوط به محیط آن برابر باشند.

۳۲: مقدار  $m$  را طوری بیابید که معادله‌ی  $x^2 - (m + 2)x + 2m = 0$  دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

۳۳: مقدار  $k$  را طوری پیدا کنید که معادله‌ی زیر دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد.

$$x^2 - x - 2k = 0$$

۳۴: مقدار  $m$  را طوری پیدا کنید که معادله‌ی زیر دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد.

$$(m - 1)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$$

۳۵: معادله های زیر را حل کنید.

۱)  $3r^2 - 7r + 2 = 0$

۲)  $p^2 + 9 = 6p$

۳)  $k^2 + 5 = 0$ .

۴)  $\frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{2} = 0$ .

۵)  $k^2x^2 + 8kx + 7 = 0$  ,  $k \neq 0$ .

۶)  $4m^2x^2 + 2mx - 2 = 0$  ,  $m \neq 0$ .

۷)  $x^2 - (k + 2)x + 2k = 0$ .

۸)  $mnx^2 - (m^2 + n^2)x + mn = 0$  ,  $mn \neq 0$ .

\*\*\*

## تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

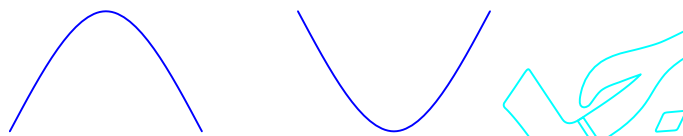
استان خوزستان

**درس دوم : سهمی**

در این درس با نمودار هایی موسوم به سهمی آشنا می شویم. آشنایی با سهمی و معادله ی آن و درک خواص آن منجر به درک مفاهیم دیگری در ریاضیات می گردد.

**قسمت اول : معرفی سهمی**

هر معادله به شکل  $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$  ( $a \neq 0$ ) یک سهمی می نامند. نمودار سهمی ، یک منحنی غیر مستقیم بوده و همواره به یکی از حالت های زیر است.



برای رسم نمودار سهمی به ترتیب زیر عمل می کنیم.

الف : ابتدا ریشه ی عبارتی که توان دوم دارد را تعیین می کنیم. سپس جدولی تنظیم می کنیم و با انتخاب یک نقطه با طول بیشتر از این نقطه و نقطه ی دیگر با طول کمتر از ریشه ی بدست آمده، حداقل سه نقطه در جدول تعیین می کنیم.

ب : نقاط به دست آمده را در دستگاه محور های مختصات تعیین نموده و نمودار را رسم می کنیم.

توجه : در صورت لزوم معادله ی داده شده را به صورت اتحاد مربع تبدیل می کنیم.

**مثال :** نمودار سهمی به معادله ی  $y = 3(x - 1)^2 + 2$  را رسم کنید.

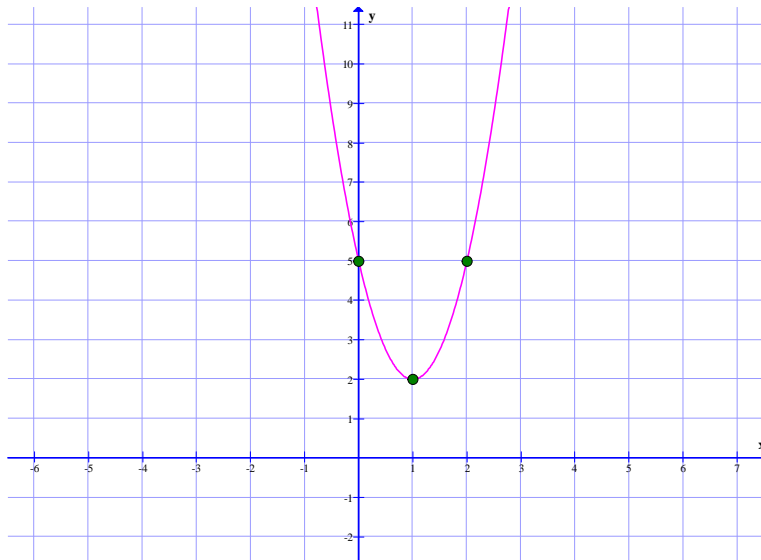
حل : ابتدا ریشه ی عبارت دارای توان دوم را تعیین می کنیم.

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

سپس دو نقطه را چنان انتخاب می کنیم که طول یکی بیشتر و طول دیگری کمتر از طول این نقطه باشند. با تعیین عرض این نقاط و یافتن آنها در دستگاه مختصات نمودار سهمی بدست می آید.

$x$	۰	۱	۲
$y$	۵	۲	۵





**مثال :** نمودار سهمی به معادله  $y = -(x + 2)^2 + 3$  را رسم کنید.

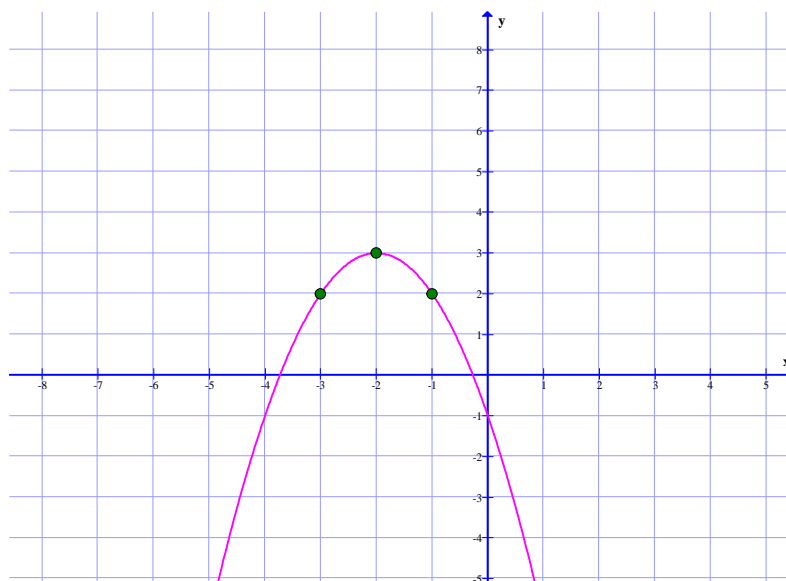
حل : ابتدا ریشه‌ی عبارت دارای توان دوّم را تعیین می کنیم.

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

سپس دو نقطه را چنان انتخاب می کنیم که طول یکی بیشتر و طول دیگری کمتر از طول این نقطه باشند. با

تعیین عرض این نقاط و یافتن آنها در دستگاه مختصات نمودار سهمی بدست می آید.

$x$	-۳	-۲	-۱
$y$	۲	۳	۲



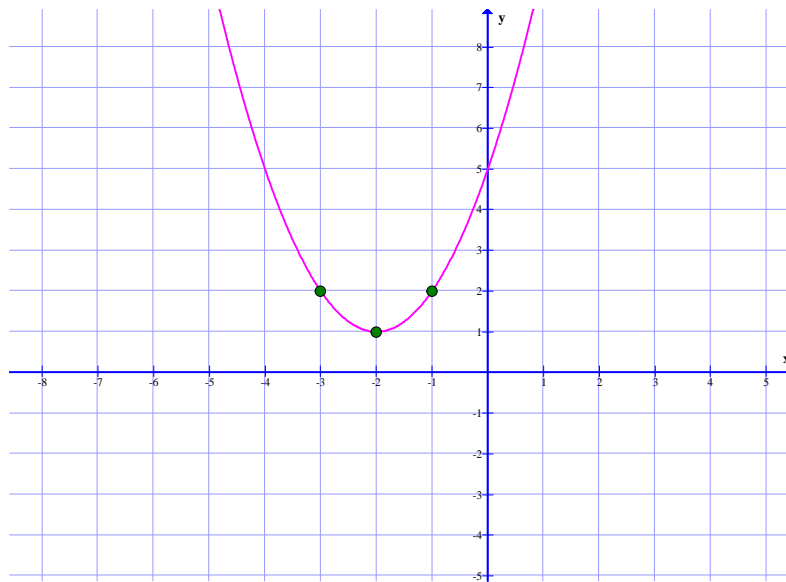
**مثال :** نمودار سهمی به معادله ی  $y = x^2 + 4x + 5$  را رسم کنید.

حل : ابتدا معادله را به صورت استاندارد، تبدیل می کنیم.

$$y = x^2 + 4x + 4 + 1 \rightarrow y = (x + 2)^2 + 1$$

سپس مانند تمرین های قبل عمل می کنیم.

$x$	-۳	-۲	-۱
$y$	۲	۱	۲



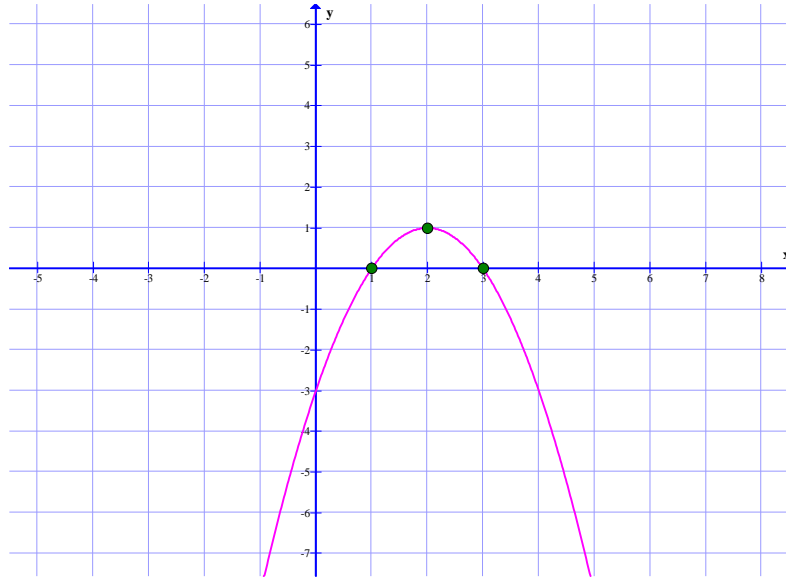
**مثال :** نمودار سهمی به معادله ی  $y = -x^2 + 4x - 3$  را رسم کنید.

حل : ابتدا معادله را به صورت استاندارد، تبدیل می کنیم.

$$y = -x^2 + 4x - 3 \rightarrow y = -(x^2 - 4x + 3) = -(x^2 - 4x + 4 - 1) = -(x - 2)^2 + 1$$

سپس مانند تمرین های قبل عمل می کنیم.

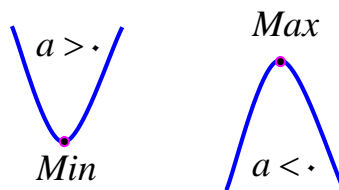
$x$	۱	۲	۳
$y$	۰	۱	۰



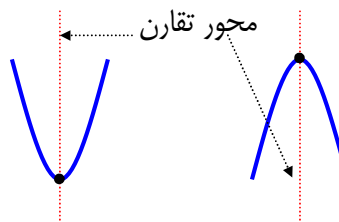
\*\*\*

### قسمت دوم : ویژگی های سهمی

نمودار هر سهمی به صورت  $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$  ، یا دارای بالاترین یا پایین ترین نقطه می باشد که آن را رأس سهمی می نامند. به سهولت معلوم است که مختصات این نقطه به شکل  $(\alpha, \beta)$  می باشد.  
 الف : اگر  $a > 0$  باشد، نمودار سهمی رو به بالا (دارای می نیمم) و اگر  $a < 0$  باشد، نمودار سهمی رو به پایین (دارای ماکزیمم) است.



ب : نمودار سهمی دارای یک محور تقارن است که معادله ی آن بصورت  $x = \alpha$  می باشد و لذا همواره موازی محور  $y$  ها است.



برای رسم نمودار سهمی کافی است که علاوه بر رأس سهمی دو نقطه را چنان انتخاب کنیم که طول یکی بیشتر و طول دیگری کمتر از طول رأس سهمی باشد.

**توجه:** اگر معادله ی سهمی به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  باشد، در این صورت به روش زیر می توان آن را به شکل  $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$  تبدیل کرد.

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

در این صورت  $x = \frac{-b}{2a}$  طول و  $y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$  عرض رأس سهمی است<sup>۱</sup>. همچنین معادله ی

محور تقارن آن بصورت  $x = \frac{-b}{2a}$  می باشد. با این شرایط می توان برای رسم نمودار سهمی بدون تبدیل به

مربع کامل کردن از این فرمول ها استفاده کرد.

**مثال:** نمودار سهمی  $y = x^2 - 6x + 7$  زیر را رسم کنید.

**حل:** ابتدا طول نقطه ی رأس سهمی را تعیین می کنیم.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2} = 3$$

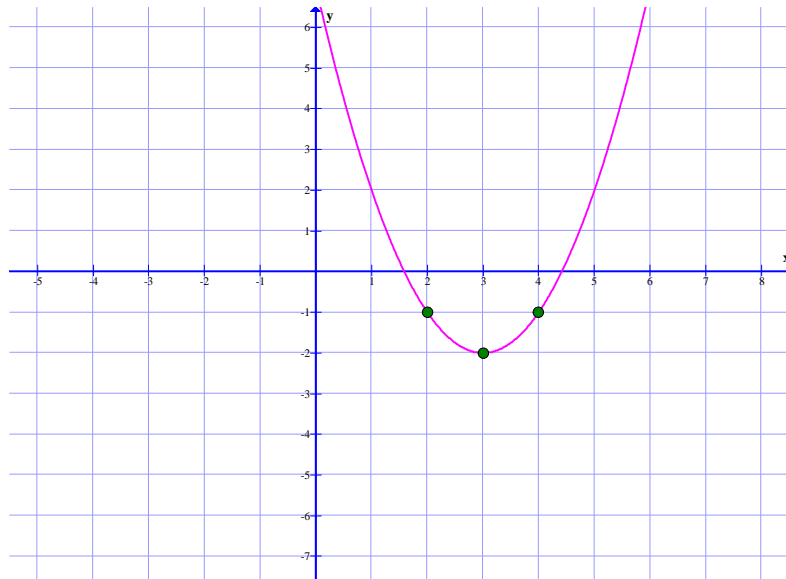
سپس جدول زیر را تشکیل می دهیم.

$x$	۲	۳	۴
$y$	-۱	-۲	-۱

و در نهایت نمودار سهمی را ترسیم می کنیم.

<sup>۱</sup> . می توان از رابطه ی  $x_0 = \frac{-b}{2a}$  ابتدا طول و سپس با جایگزینی طول بدست آمده در معادله، عرض رأس سهمی را به

دست آورد.



**مثال:** سهمی به معادله  $y = 2x^2 - 8x + 1$  داده شده است.

الف : مختصات رأس سهمی را بدست آورید.

ب : تعیین کنید که رأس سهمی نقطه‌ی  $Min$  است یا  $Max$ .

ج : معادله‌ی محور تقارن سهمی را بنویسید.

حل:

$$y = 2x^2 - 8x + 1 \rightarrow a = 2, b = -8, c = 1$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{+8}{2(2)} = \frac{8}{4} = 2$$

طول رأس سهمی

$$y_0 = 2(2)^2 - 8(2) + 1 = 8 - 16 + 1 = -7$$

عرض رأس سهمی

$$S(2, -7)$$

مختصات رأس سهمی

چون  $a$  مثبت است، پس رأس سهمی نقطه‌ی  $Min$  نمودار آن می باشد.

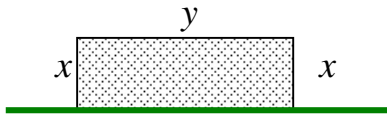
$$\text{معادله ی محور تقارن } x = \frac{-b}{2a} = \frac{+8}{2(2)} = \frac{8}{4} = 2 \rightarrow x = 2$$

**مثال :** بیشترین مساحت قطعه زمینی مستطیل شکل در کنار دریا



که می توان آن را فقط با ۱۲۰ متر، نرده محصور کرد، چقدر است؟

حل :



$$y + 2x = 120 \rightarrow y = 120 - 2x$$

$$S = xy \text{ مساحت مستطیل}$$

$$S = x(120 - 2x) \rightarrow S(x) = 120x - 2x^2$$

معادله ی به دست آمده ، یک سهمی است و در آن  $a = -2 < 0$  می باشد. پس معادله ی سهمی، دارای بیشترین مقدار است. بیشترین مقدار را به روش زیر تعیین می کنیم.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{2(-2)} = 30$$

$$S_{Max} = 120(30) - 2(30)^2 = 3600 - 1800 = 1800 \text{ m}^2$$

توجه : مقدار مساحت را پس از تعیین مقدار  $x$  نیز می توان به شکل زیر به دست آورد.

$$y = 120 - 2(30) = 60$$

$$S = xy = (30)(60) = 1800 \text{ m}^2$$

\*\*\*

**تمرین برای حل :**

۱ : نمودار معادلات زیر را رسم کنید.

الف)  $y = -(x - 1)^2 + 1$

ج)  $y = x^2 - 2x - 3$

ب)  $y = -x^2 + 4x$

د)  $y = -4x^2 + 8x + 1$

۲ : سهمی به معادله ی  $y = -3x^2 + 6x$  داده شده است.

الف : مختصات رأس سهمی را بدست آورید.

ب : تعیین کنید که رأس سهمی نقطه ی  $Min$  است یا  $Max$  .

ج : معادله‌ی محور تقارن سهمی را بنویسید.

۳ : مقدار  $m$  را چنان بیابید که  $x = 2$  طول رأس سهمی به معادله‌ی  $y = mx^2 + (m - 1)x + 1$  باشد.

۴ : کمترین مقدار سهمی به معادله‌ی  $y = 3x^2 - 12x + 5$  را تعیین کنید.

۵ : بیشترین مقدار سهمی به معادله‌ی  $y = -x^2 + 4x + 1$  را محاسبه کنید.

۶ : عدد ۱۰ را به دو قسمت چنان تبدیل کنید که حاصل ضرب آنها ماکزیمم شود.

۷ : اگر  $3x + 5y = 150$  مقدار  $y$  و  $x$  را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ماکزیمم شود.

۸ : اگر  $(-2, 5)$  و  $(0, 5)$  دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله‌ی خط تقارن این سهمی را به دست آورید.

۹ : اگر نمودار یک سهمی محور  $y$  ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور  $x$  ها را در نقاطی به طول ۱- و ۲

قطع کرده باشد.

ب : نمودار سهمی را رسم کنید.

الف : معادله‌ی سهمی را بنویسید.

\*\*\*

## تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

**درس سوّم : تعیین علامت**

در این درس با یکی از مفاهیم کاربردی ریاضی تحت عنوان تعیین علامت عبارت های جبری آشنا می شوید. درک این مفهوم و آشنایی با روش های تعیین علامت ، می تواند کمک های مؤثری در شناخت و درک دیگر مفاهیم ریاضی از جمله حل نامعادلات داشته باشد.

**قسمت اوّل : مفهوم تعیین علامت**

منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری این است که تعیین کنیم، عبارت داده شده در چه فاصله ای مثبت، در چه فاصله ای منفی و به ازای چه عدد یا اعدادی صفر می شود. برای مثال عبارت  $p = -3x + 6$  به ازای هر عدد بزرگتر از ۲ منفی ، به ازای هر عدد کمتر از ۲ مثبت و به ازای ۲ صفر می شود. به جدول زیر دقت کنید.

$x$	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$p = -3x + 6$	+	o	-

**قسمت دوّم : روش های تعیین علامت**

**روش تعیین علامت دو جمله ای درجه ی اوّل**

برای تعیین علامت عبارت دو جمله ای درجه ی اوّل به شکل  $ax + b$  به ترتیب زیر عمل می کنیم. ابتدا عبارت داده شده را برابر صفر قرار می دهیم و ریشه ی معادله ی بدست آمده را تعیین کرده و از جدول زیر به عنوان الگو استفاده می کنیم.

$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$p = ax + b$	مخالف علامت $a$		موافق علامت $a$

**تمرین ۱ :** عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$p = -3x + 6$$



حل :

$$-3x + 6 = 0 \rightarrow x = 2$$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$p = -3x + 6$	$+$	$0$	$-$

### تمرین برای حل :

۲: هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) p = 5x + 20$$

$$۳) p = 4 - \frac{1}{3}x$$

$$۲) p = -\frac{1}{2}x + 7$$

$$۴) p = \frac{4x - 2}{5}$$

**تذکر ۱:** اگر عبارتی به صورت حاصل ضرب یا تقسیمی از دو یا چند عبارت دو جمله ای درجه ی اول باشد،

برای تعیین علامت آن به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱: ریشه های هر یک از عوامل آن را تعیین می کنیم.

۲: جدولی تنظیم می کنیم و در سطر اول آن ریشه های هر یک از عوامل را از کوچک به بزرگ می نویسیم.

۳: در هر سطر دیگر جدول علامت هر عامل را تعیین می کنیم.

۴: در نهایت علامت تمام عوامل را ضرب می کنیم. ( توجه داشته باشید که حاصل یک عبارت جبری به

ازای ریشه های صورت برابر صفر می باشد ولی به ازای ریشه های مخرج یک عبارت جبری تعریف نشده

( نامعین ) است.

**تمرین ۳:** عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$p = (x - 1)(6 - 2x)$$

حل:

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$6 - 2x = 0 \rightarrow x = 3$$

$x$	$-\infty$	$1$	$3$	$+\infty$	
$x - 1$	-	o	+	+	
$6 - 2x$	+	+	o	-	
$p = (x - 1)(6 - 2x)$	-	o	+	o	-

تمرین ۴: عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

الف)  $A = \frac{x - 1}{5 - 2x}$

ب)  $B = x^3(2x - 6)^2(7 - x)$

تذکره ۲: اگر عبارتی به دو یا چند عبارت درجه ی اول قابل تجزیه باشد. پس از تجزیه ی آن به عبارت های

درجه ی اول به روش فوق تعیین علامت می شود.

تمرین ۵: عبارت  $p = \frac{4 - x^2}{x + 3}$  را تعیین علامت کنید.

حل:

$$p = \frac{4 - x^2}{x + 3} = \frac{(2 - x)(2 + x)}{x + 3}$$

$$2 - x = 0 \rightarrow x = 2$$

$$2 + x = 0 \rightarrow x = -2$$

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$2$	$+\infty$		
$2 - x$	+	+	+	o	-		
$2 + x$	-	-	o	+	+		
$x + 3$	-	o	+	+	+		
$p = \frac{4 - x^2}{x + 3}$	+	نامعین	-	o	+	o	-

تمرین برای حل :

۶: هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) A = \frac{(3-x)(1-x)}{(2-x)(1-2x)}$$

$$۴) D = \frac{7x^2 + 6x}{|-2x + 1|} =$$

$$۲) B = x^3 - 7x^2 + 6x$$

$$۵) E = \frac{x-5}{x^3-4x}$$

$$۳) C = (x-1)(x^2 - 10x + 25)$$

$$۶) F = \frac{3x+6}{9x-x^3}$$

\*\*\*

روش تعیین علامت سه جمله ای درجه ی دوّم

برای تعیین علامت یک عبارت سه جمله ای درجه ی دوّم به شکل  $ax^2 + bx + c$  به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱: عبارت داده شده را برابر صفر قرار می دهیم.

۲: با توجه به وجود یا عدم وجود ریشه و یا تعداد ریشه ها، از یکی از جدول های زیر استفاده می کنیم.

الف: اگر معادله دو ریشه داشته باشد.

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$p = ax^2 + bx + c$	موافق علامت $a$	○	مخالف علامت $a$	○
		○	○	
			$a$	

ب: اگر معادله یک ریشه (ریشه ی مضاعف) داشته باشد.

$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$p = ax^2 + bx + c$	موافق علامت $a$	○	موافق علامت $a$

ج: اگر معادله ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$p = ax^2 + bx + c$	موافق علامت $a$	موافق علامت $a$

تمرین ۷: هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

۱)  $p = -x^2 + x + 2$

۲)  $p = x^2 - 6x + 9$

۳)  $p = x^2 - x + 3$

حل:

(۱)

$$-x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{-2} = -1 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{-2} = 2 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$p = -x^2 + x + 2$	-	o	+	o
	-	-	+	-

(۲)

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$$

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$p = x^2 - 6x + 9$	+	o	+

(۳)

$$x^2 - x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 12 = -11 \rightarrow \text{معادله ریشه ی حقیقی ندارد.}$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$p = x^2 - x + 3$	+	+

تمرین برای حل :

۸: هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) p = ۳x^۲ - ۴x + ۱$$

$$۵) p = \frac{۳ - x^۲}{(۱ - x)(x^۲ - ۵x + ۶)}$$

$$۲) p = ۶ - ۴t^۲$$

$$۶) p = \frac{۳x^۲ - ۴x - ۴}{۱ - x}$$

$$۳) p = ۱ + k + k^۲$$

$$۷) p = \frac{۳x^۲ - ۵x^۳}{x - ۲}$$

$$۴) p = -۲۵ + ۱۰x - x^۲$$

$$۸) P = \frac{-۵}{۹x - x^۳}$$

**نتیجه :** با توجه به آنچه که برای تعیین علامت عبارت درجه ی دوّم  $P = ax^۲ + bx + c$  گفته شد، می

توان نتیجه گرفت که

الف : شرط اینکه عبارت  $P = ax^۲ + bx + c$  همواره مثبت باشد، این است که

$$\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a > ۰ \end{cases}$$

ب : شرط اینکه عبارت  $P = ax^۲ + bx + c$  همواره منفی باشد، این است که

$$\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a < ۰ \end{cases}$$

**تمرین ۹ :** نشان دهید که عبارت  $P = -۵x^۲ + x - ۳$  همواره منفی است.

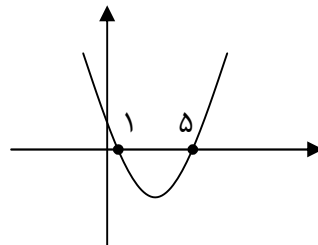
**تمرین ۱۰ :** نشان دهید که عبارت  $P = x^۲ + ۲x + ۳$  همواره مثبت است.

**تمرین ۱۱ :** مقدار  $m$  را طوری بیابید که عبارت  $P = (m - ۱)x^۲ + ۳x + ۱$  همواره مثبت باشد.

**قسمت سوم : رابطه ی بین علامت یک عبارت جبری و نمودار آن**

می دانیم که هر نقطه که روی محور طول ها قرار دارد، عرض آن برابر صفر است. بر این اساس می توان نتیجه گرفت که اگر نمودار یک عبارت محور طول ها را قطع کند، مقدار آن عبارت در آن نقطه برابر صفر می شود. لذا طول نقطه ی برخورد نمودار هر عبارت ، برابر ریشه ی معادله ی نظیر آن خواهد بود. همچنین واضح است که اگر نمودار عبارتی در یک فاصله بالای محور طول ها قرار گیرد، آن عبارت مثبت و اگر پایین محور طول ها قرار گیرد، آن عبارت منفی خواهد شد.

برای مثال متناظر با نمودار مقابل می توان جدول زیر را تنظیم کرد.

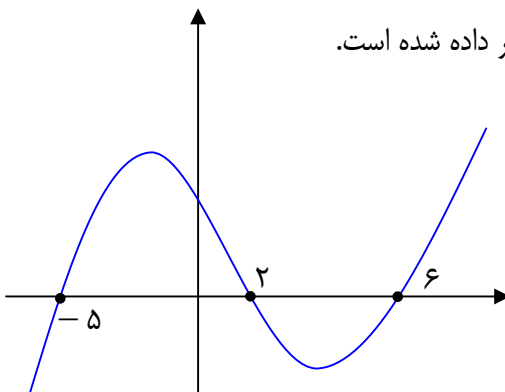


$x$	$-\infty$		۱		۵		$+\infty$
$y$		+	۰	-	۰	+	

**تمرین ۱۲ :** نمودار معادله  $y = f(x)$  به صورت زیر داده شده است.

الف : ریشه های معادله ی  $f(x) = 0$  را بنویسید.

ب : جدول تعیین علامت  $y = f(x)$  را رسم کنید.



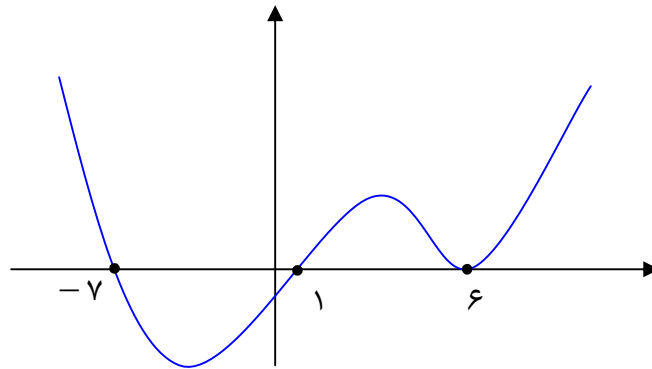
**توجه :** اگر در نقطه ای نمودار عبارت  $y = f(x)$  بر محور طول ها مماس شود، گویند معادله ی

$f(x) = 0$  در آن نقطه دارای ریشه ی مضاعف است.

**تمرین ۱۳ :** نمودار معادله‌ی  $y = f(x)$  به صورت زیر داده شده است.

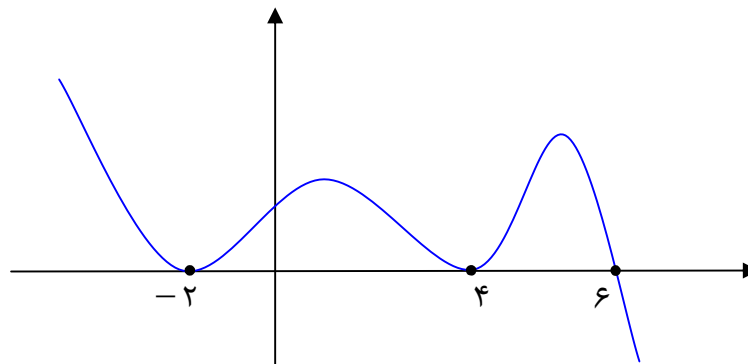
الف : ریشه های معادله‌ی  $f(x) = 0$  را بنویسید. کدام ریشه مضاعف است؟

ب : جدول تعیین علامت  $y = f(x)$  را رسم کنید.



**تمرین ۱۴ :** با توجه با نمودار زیر تعیین کنید که معادله‌ی  $f(x) = 0$  چند ریشه‌ی مضاعف دارد؟ آنها را

بنویسید.



**تمرین ۱۵ :** مقدار  $k$  را طوری بیابید که نمودار معادله‌ی  $y = -x^2 + x - k$  همواره در زیر محور  $x$  ها

قرار گیرد؟

**تمرین ۱۶ :** مقدار  $k$  را طوری بیابید که نمودار معادله‌ی  $y = 2kx^2 - x + 1$  همواره در بالای محور  $x$

ها قرار گیرد؟

**تمرین ۱۷ :** مقدار  $m$  را طوری بیابید که نمودار معادله‌ی  $y = (m-1)x^2 + x - 1$  همواره در زیر

محور  $x$  ها قرار گیرد؟

\*\*\*

قسمت چهارم : روش سریع تعیین علامت عبارت های جبری ( بدون استفاده از جدول )

برای این کار به ترتیب زیر عمل کنید.

۱ : عبارت داده شده را تجزیه کنید و ریشه های هر یک از عوامل را تعیین کنید.

۲ : ریشه ها را روی محور اعداد حقیقی درج کنید.

۳ : یک عدد غیر از ریشه های بدست آمده را انتخاب و در عبارت جبری داده شده، جایگزین کرده و علامت عدد حاصل را تعیین کنید.

۴ : علامت عدد حاصل را در قسمتی از محور که عدد انتخابی در آن است، قرار دهید.

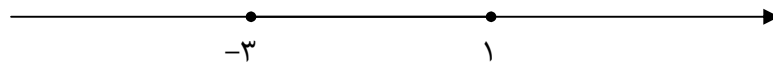
۵ : با عبور از ریشه های ساده علامت ها را تغییر دهید و با عبور از ریشه ی مضاعف علامت را تغییر ندهید. توجه کنید که یک عبارت کسری به ازای ریشه های مخرج آن نامعین است.

**مثال ۱ :** عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$p = (x - 1)(6 + 2x)$$

حل :

$$p = (x - 1)(6 + 2x) = 0 \rightarrow x = 1 \text{ or } x = -3$$



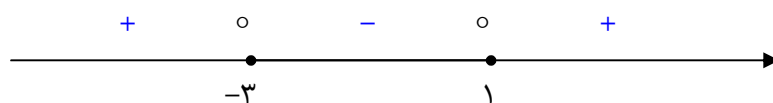
اکنون عددی غیر از ریشه های فوق انتخاب می کنیم و آن را در عبارت داده شده جایگزین می کنیم.

مثلاً :  $x = 0$

$$\rightarrow p(0) = (0 - 1)(6 + 2(0)) = -1 \times 6 = -6$$

پس علامت این عبارت در فاصله ی  $(-3, 1)$  منفی است. با تغییر این علامت ، پس از عبور از ریشه ها

علامت دیگر فاصله ها نیز تعیین می شود. توجه داشته باشید که این دو ریشه ساده هستند.





مثال ۲: عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$p = \frac{4x^2 - x^4}{x + 3}$$

حل:

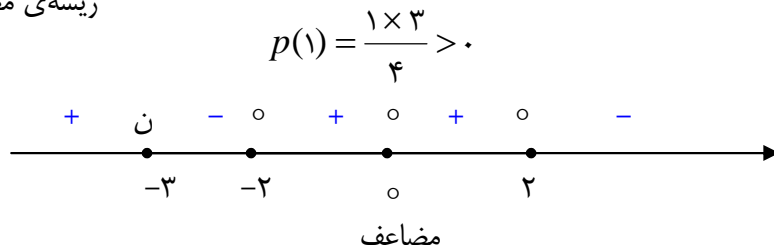
$$p = \frac{x^2(4 - x^2)}{x + 3} = \frac{x^2(2 - x)(2 + x)}{x + 3}$$

$x^2 = 0 \rightarrow x = 0$  ریشه‌ی مضاعف

$2 - x = 0 \rightarrow x = 2$

$2 + x = 0 \rightarrow x = -2$

$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$



\*\*\*

### تمرین برای حل :

۱۸: عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

۱)  $A = -x^2 + x + 2$

۴)  $D = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$

۲)  $B = (x^2 - 9)(3x - 1)$

۵)  $E = \frac{(x - 1)^2(3 - x)}{x + 2}$

۳)  $C = \frac{x(x - 3)^2}{x^2 + x - 2}$

۶)  $F = \frac{(3x - x^2 + 10)(x - 1)^4(x - \sqrt{3})}{(x - 3)^2}$

\*\*\*

### قسمت پنجم : حل نامعادلات

با نامعادله قبلاً آشنا شده اید و می دانید که نامساوی

$$3x + 1 > 5 - x$$

یک نامعادله ی درجه ی اول است. مجموعه ی جواب نامعادله مجموعه ی مقادیری است که در نامعادله صدق می کنند. و منظور از حل یک نامعادله تعیین مجموعه ی جواب آن است.

### نامعادله های درجه ی اول

اگر بیشترین توان متغیر یک نامعادله برابر یک باشد، نامعادله درجه ی اول است. روش حل معادله های درجه-ی اول به سادگی می توان مانند معادله ی درجه اول عمل کرد. با این تفاوت که اگر دو طرف یک نامعادله را در یک عدد منفی ضرب یا تقسیم کنیم، جهت نامعادله عوض می شود.  
مثال : نامعادله های زیر را حل کنید.

$$5x - 1 \geq 3x - 7$$

حل :

$$5x - 3x \geq -7 + 1 \rightarrow 2x \geq -6 \rightarrow x \geq -3$$

**تمرین ۱۹ :** نامعادله ی زیر را حل کنید و مجموعه ی جواب آن را به صورت یک بازه بنویسید.

$$4x + 1 < 6x + 10$$

**تمرین ۲۰ :** نامعادله ی زیر را حل کنید و مجموعه ی جواب آن را به صورت یک بازه بنویسید.

$$-2 < 3x - 1 \leq 8$$

### تمرین برای حل :

**۲۱ :** نامعادله های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } 1 < 2x - 3 \leq 3 \quad \text{ب) } x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3 \quad \text{ج) } -2 < \frac{5-x}{2} < 0$$

**۲۲ :** دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه ی جواب آن را به صورت یک بازه بنویسید.

$$\begin{cases} 3x + 1 > 7 \\ 5 - 2x < 9 \end{cases}$$

### نامعادله های درجه ی دوّم

برای حل یک نامعادله ی درجه دوّم به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱ : تمام جملات نامعادله را به طرف چپ منتقل می کنیم.

۲ : پس از ساده کردن، عبارت بدست آمده را تعیین علامت می کنیم.

۳ : با توجه به جدول تعیین علامت ، ناحیه ی جواب را مشخص می کنیم.

تمرین ۲۳ : نامعادله ی  $x^2 < 3x - 2$  را حل کنید.

حل :

$$x^2 < 3x - 2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ معادله ی هم ارز}$$

$$(x-1)(x-2) = 0 \rightarrow x=1, x=2$$

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2 < 0$	+	o	-	o
	+	o	-	+

لذا مجموعه جواب این نامعادله می شود  $x \in (1, 2)$

\*\*\*

### تمرین برای حل :

۲۴ : هر یک از نامعادله های زیر را حل کنید.

۱)  $x^2 - 8x + 12 > 0$

۲)  $x^2 + 7 < 3x$

۳)  $4 \geq x^2$

\*\*\*

**تذکره:** به طریقی مشابه می توان نامعادلات درجات بالاتر و یا نامعادلات شامل عبارت های گویا را نیز حل

کرد.

تمرین ۲۵ : نامعادله ی  $\frac{x}{2-x} \geq 1$  را حل کنید.

حل :

$$\frac{x}{2-x} \geq 1 \rightarrow \frac{x}{2-x} - 1 \geq 0 \rightarrow \frac{x-2+x}{2-x} \geq 0 \rightarrow \frac{2x-2}{2-x} \geq 0$$

$$2x-2=0 \rightarrow x=1$$

$$2-x=0 \rightarrow x=2$$

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$+\infty$
$2x-2$	-	o	+	+
$2-x$	+	+	o	-
$\frac{2x-2}{2-x} \geq 0$	-	o	+	نامعین

مجموعه ی جواب  $= [1, 2)$

تمرین ۲۶: نامعادله ی زیر را حل کنید.

الف)  $\frac{x^2-9}{2x+1} \geq 0$

ب)  $\frac{x^2-2}{x} < 1$

تمرین برای حل :

۲۷: هر یک از نامعادله های زیر را حل کنید.

۱)  $x^3 - 5x^2 - 6x > 0$

۵)  $\frac{1-x}{3+x} \geq 0$

۹)  $\frac{2m-1}{m} > 1$

۲)  $\frac{(x-2)(x-3)}{x-1} \leq 0$

۶)  $\frac{x^2+3x-4}{x+2} < 0$

۱۰)  $\frac{x^3-x}{x^2-2x+2} \leq 0$

۳)  $\frac{x-1}{x-2} > 2$

۷)  $\frac{3+t}{4-t^2} < 0$

۱۱)  $\frac{4u+8}{u-1} \geq 3$

۴)  $\frac{x-2}{x+1} > 0$

۸)  $\frac{x^2-2}{x} > x$

۱۲)  $\frac{x+2}{x-1} - \frac{1}{x-2} \leq 1$

تمرین ۲۸: حدود  $m$  را چنان تعیین کنید که نمودار سهمی  $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$  همواره در

زیر محور  $x$  ها قرار گیرد.

حل : معادله درجه ی دوّم است.

$$y < 0 \rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \rightarrow 3 - 4m(m-1) < 0 \rightarrow 4m^2 - 4m - 3 < 0 \\ a < 0 \rightarrow m - 1 < 0 \rightarrow m < 1 \end{cases}$$

و به کمک تعیین علامت عبارت درجه ی دوّم و تعیین اشتراک مجموعه ی جواب های دو نامعادله داریم.

$$m < -\frac{1}{2}$$

تمرین برای حل :

۲۹: اگر عبارت  $(k-1)x^2 + (k-1)x + 1$  به ازای هر مقدار  $x$  مثبت باشد، حدود  $k$  را به دست آورید.

\*\*\*

دو ویژگی مهم قدر مطلق برای حل نامعادلات

اگر  $a$  یک عدد حقیقی مثبت و  $u$  یک عبارت جبری باشد. در این صورت می توان ویژگی های زیر را بیان کرد.

الف : نامساوی  $|u| \leq a$  با نامساوی  $-a \leq u \leq a$  معادل است.

ب : نامساوی  $|u| \geq a$  با نامساوی های  $u \geq a$  و  $u \leq -a$  معادل است.

توجه داشته باشید که دو نامساوی را معادل گویند که مجموعه ی جواب آنها یکسان است. لذا با داشتن یکی از این نامساوی می توان دیگری را نوشت.

برای مثال اگر  $|3x+1| < 5$  آنگاه می توان نوشت :

$$-5 < 3x+1 < 5$$

به کمک این دو ویژگی، می توان نامعادله های شامل قدرمطلق به شکل فوق را با تبدیل به یک نامعادله ی ساده تر حل نمود.

مثال : نامعادله ی  $|3x+1| < 5$  را حل کنید.

حل :

$$-5 < 3x+1 < 5 \xrightarrow{-1} -6 < 3x < 4 \xrightarrow{\div 3} -2 < x < \frac{4}{3}$$

تمرین برای حل :

۳۰: نامعادله های زیر را حل کنید.

الف)  $|2x - 1| > 5$

د)  $|5 - 2x| \geq 1$

ب)  $|x - 3| \leq 2$

و)  $|7 - 2x| < 1$

ج)  $|\frac{x}{3} + 1| < \frac{2}{3}$

**توجه:** اگر دو طرف نامعادله هایی به شکل های فوق را به توان دو برسانیم. می توان، به کمک تعیین علامت نامعادله را نیز حل کرد.

**تمرین ۳۱:** نامعادله های زیر را حل کنید.

۱)  $|2x + 1| \geq 3$

۳)  $|2x - 3| < x$

۲)  $|3x - 1| < 4$

۴)  $|x + 3| \leq |2x - 1|$

**تمرین ۳۲:** یک نامعادله ی قدرمطلق بنویسید که مجموعه ی جواب آن بازه ی (۱,۹) باشد.

حل :

$$1 < x < 9 \longrightarrow 1 - 5 < x - 5 < 9 - 5 \longrightarrow -4 < x - 5 < 4 \longrightarrow |x - 5| < 4$$

**توجه:** عدد وسط بازه ی (a,b) برابر  $\frac{a+b}{2}$  است. لذا اگر از هر طرف نامساوی  $a < x < b$  مقدار

$\frac{a+b}{2}$  را کم کنیم، می توان نامساوی به صورت متقارن به دست آورد. سپس به کمک ویژگی های

قدرمطلق نامعادله ی قدرمطلق تشکیل داد.

**تمرین ۳۳:** یک نامعادله ی قدر مطلق بنویسید که مجموعه ی جواب آن بازه ی (-۱,۷) باشد.

**تمرین ۳۴:** یک نامعادله ی قدر مطلق بنویسید که مجموعه ی جواب آن بازه ی [-۱۱,۳] باشد.

**تمرین ۳۵:** یک نامعادله ی قدر مطلق بنویسید که مجموعه ی جواب آن بازه ی  $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$  باشد.

**نتیجه:** به کمک روش فوق می توان نوشت:

$$a < x < b \rightarrow a - \frac{a+b}{2} < x - \frac{a+b}{2} < b - \frac{a+b}{2} \rightarrow \frac{a-b}{2} < x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}$$

$$\rightarrow -\frac{b-a}{2} < x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2} \xrightarrow{\frac{b-a}{2} > 0} |x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}$$

\*\*\*

### روش سریع برای حل نامعادلات

برای حل نامعادله‌ی قدر مطلق به شکل  $|u| \leq |v|$  می‌توان به روش زیر عمل کرد.

$$|u| \leq |v| \rightarrow u^2 \leq v^2 \rightarrow u^2 - v^2 \leq 0$$

$$\rightarrow (u+v)(u-v) \leq 0$$

**مثال :** نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$|2x-1| \leq |-x+7|$$

حل :

$$|2x-1| \leq |-x+7| \rightarrow (2x-1-x+7)(2x-1+x-7) \leq 0 \rightarrow (x+6)(3x-8) \leq 0$$

$$\frac{x=-6 \text{ or } x=\frac{8}{3}}{\rightarrow -6 \leq x \leq \frac{8}{3}}$$

توجه داشته باشید که همین سبک را می‌توان برای نامعادلاتی که به شکل  $|u| < |v|$  یا  $|u| \geq |v|$  یا

$|u| > |v|$  می‌باشند نیز می‌توان بکار برد.

**نتیجه :** برای حل نامعادله‌ی  $|ax+b| \leq |cx+d|$  مطابق سبک فوق می‌توان مستقیماً به صورت زیر

عمل کرد.

$$((a+c)x + (b+d))((a-c)x + (b-d)) \leq 0$$

**مثال :** نامعادله زیر را حل کنید.

$$|2x-1| \leq |-x+7|$$

حل :

$$\rightarrow (x+6)(3x-8) \leq 0 \rightarrow -6 \leq x \leq \frac{8}{3}$$

**مثال:** مجموعه ی جواب نامعادله ی  $\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1$  را به دست آورید.

حل:

$$\left| \frac{x-2}{2x+1} \right| > 1 \rightarrow \frac{|x-2|}{|2x+1|} > 1 \rightarrow |2x+1| < |x-2| \rightarrow (2x+1)^2 < (x-2)^2$$

$$\rightarrow 4x^2 + 4x + 1 < x^2 - 4x + 4 \rightarrow 3x^2 + 8x - 3 < 0$$

$$\frac{3x^2 + 8x - 3 = (3x-1)(x+3) = 0}{\rightarrow -3 < x < \frac{1}{3}}$$

و با توجه به اینکه  $x = -\frac{1}{3}$  ریشه ی مخرج نامعادله ی داده شده است. این ریشه را باید حذف کرد. پس

مجموعه ی جواب نامعادله به صورت زیر است.

$$\text{مجموعه ی جواب} = \left(-3, \frac{1}{3}\right) - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

\*\*\*

## تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان