

ریاضی ۲

پایه یازدهم « رشته ی علوم تجربی »

فصل ۴ : مثلثات

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

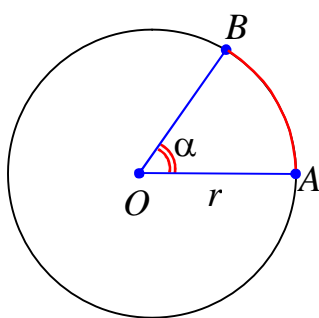
استان خوزستان

مهر ۱۳۹۹

درس اول : واحدهای اندازه گیری زاویه

در سالهای گذشته با مفهوم زاویه آشنا شده اید. به یاد می آورید که برای اندازه گیری زاویه از درجه استفاده می شود. در واقع درجه یکی واحدهای اندازه گیری زاویه است. استفاده از درجه در برخی موارد مشکلاتی را به همراه دارد، لذا از واحدهای دیگر نیز استفاده می شود. در اینجا در پی آن هستیم که رادیان را به عنوان واحد دیگر اندازه گیری زاویه معرفی نماییم. استفاده از رادیان در برخی مسائل، ضروری است.

قسمت اول : آشنایی با رادیان



یک رادیان برابر اندازهی زاویهی مرکزی از یک دایره است که طول کمان روبرو به آن زاویه، برابر شعاع دایره باشد.

$$\overset{\frown}{AB} = r \leftrightarrow \alpha = 1 \text{ rad}$$

تمرین ۱: در یک دایره به شعاع ۵ سانتی متر، طول کمانی برابر ۱۰ سانتی متر می باشند. اندازهی زاویهی مرکزی روبرو به این کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۲: در یک دایره به شعاع ۲ سانتی متر، طول کمانی برابر ۱۲ سانتی متر می باشند. اندازهی زاویهی مرکزی روبرو به این کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

نتیجه ۱: اندازهی یک زاویه بر حسب رادیان برابر خارج قسمت اندازهی طول کمان روبرو به آن زاویه بر اندازهی شعاع آن است.

$$\theta = \frac{l}{r}$$

تمرین ۳: نشان دهید که محیط یک دایره به شعاع r برابر 2π رادیان است.

حل :

$$\frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

تمرین ۴: به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه مرکزی ۹۰ درجه (ربع دایره) چند رادیان است؟

حل :

$$\frac{۳۶۰}{۲\pi} = \frac{۹۰}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{۲\pi \times ۹۰}{۳۶۰} = \frac{\pi}{۲} \text{ rad}$$

تمرین ۵: به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه مرکزی ۱۸۰ درجه (نیم دایره) چند رادیان است؟ چرا؟

تمرین ۶: به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه‌ی ۳۰ درجه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۷: به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه‌ی ۲۷۰ درجه را بر حسب رادیان به دست آورید.

نتیجه ۲: یک دایره (دوران کامل) برابر ۳۶۰ درجه و ۲π رادیان است.

تمرین برای حل :

۸: اندازه‌ی زاویه های ۱۲۰ درجه و ۴۵ درجه را بر حسب رادیان به دست آورید.

۹: اندازه‌ی زاویه های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان را بر حسب درجه به دست آورید.

۱۰: اندازه‌ی یک زاویه‌ی مرکزی در یک دایره ۱/۵ رادیان و طول کمان روبرو به آن زاویه ۹ سانتی متر است. اندازه‌ی شعاع دایره را بدست آورید.

۱۱: حساب کنید که چه مدت طول می کشد تا عقربه‌ی دقیقه شمار ساعت به اندازه‌ی $\frac{۵\pi}{۲}$ رادیان دوران کند؟

قسمت دوم: رابطه ی بین رادیان و درجه

نظر به اینکه یک دایره کمائی برابر ۳۶۰ درجه و 2π می باشد. با تشکیل تناسب می توان، رابطه ی زیر بین اندازه ی زاویه بر حسب درجه و اندازه ی زاویه بر حسب رادیان بیان کرد.

$$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$$

نتیجه: برای تبدیل واحد های اندازه ی زاویه از رابطه ی زیر استفاده می شود.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

تمرین ۱۰: اندازه ی زاویه ای ۳۰ درجه است، اندازه ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۱۱: اندازه ی زاویه ای -90 درجه است، اندازه ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۱۲: اندازه ی زاویه ای $\frac{2\pi}{3}$ رادیان است، اندازه ی این زاویه را بر حسب درجه به دست آورید.

نتیجه: زاویه ای که اندازه ی آن یک درجه باشد، اندازه ی آن بر حسب رادیان برابر $\frac{\pi}{180}$ است. بنابراین:

$$\frac{\pi}{180} \text{ رادیان} = \text{یک درجه}$$

تمرین ۱۳: طول برف پاک کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی متر است. فرض کنید برف پاکن، کمائی به

اندازه ی ۱۲۰ درجه طی می کند.

الف: اندازه ی کمان را بر حسب رادیان به دست آورید.

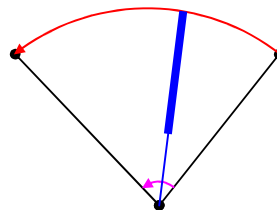
ب: طول کمان طی شده توسط نوک برف پاکن چند سانتی متر است؟ ($\pi = 3/14$)

حل:

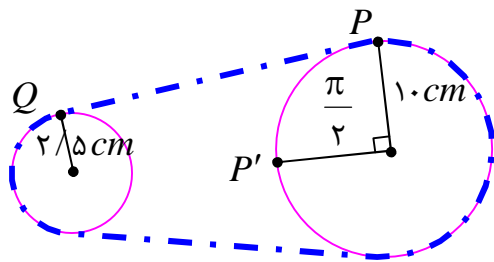
$$\text{الف) } \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{120}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{ب) } \theta = \frac{L}{r}$$

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{L}{24} \rightarrow L = \frac{2\pi \times 24}{3} = 16\pi \approx 50/24 \text{ cm}$$



تمرین ۱۴: در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به



شعاع های ۱۰ و ۲/۵ سانتی متر را به هم وصل کرده است.

بررسی کنید که وقتی قرقره ی بزرگتر $\frac{\pi}{2}$ رادیان می

چرخد، (یعنی نقطه ی P در موقعیت P' قرار می گیرد.)

قرقره ی کوچکتر چند رادیان می چرخد؟ ($\pi \text{ rad} = 3/14 \text{ rad}$)

حل : ابتدا مسافتی را که نقطه ی P بر روی محیط قرقره ی بزرگتر طی می کند، به دست می آوریم.

$$\theta = \frac{\widehat{PP'}}{R} \rightarrow \widehat{PP'} = R\theta = 10 \times \frac{\pi}{2} = 5\pi = 15.7 \text{ cm}$$

چون دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند، پس قرقره ی کوچکتر نیز 5π سانتی متر حرکت می کند.

برای این قرقره داریم:

$$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{5\pi}{2/5} = 2\pi \text{ rad}$$

بنابراین وقتی قرقره ی بزرگتر ربع دور می چرخد، قرقره ی کوچک تر یک دور کامل می چرخد و نقطه ی Q

به مکان خود باز می گردد.

تمرین ۱۵: ایستگاه فضایی بین المللی را مطابق شکل

مقابل در نظر بگیرید که در فاصله ی تقریبی ۴۰۰ کیلومتری

بالای سطح کره ی زمین قرار دارد. این ایستگاه توسط ایستگاه

زمینی از نقطه ی A تا نقطه ی B که با مرکز زمین زاویه ی

۴۵ درجه می سازد، رصد می شود. تعیین کنید که این ایستگاه

چه مسافتی را در مدار خود از A' تا B' پوشش می دهد؟ شعاع

تقریبی زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.

حل :

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{45}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{\pi}{4} \rightarrow \angle \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{L}{r} \rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\widehat{A'B'}}{6400 + 400} \rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\widehat{A'B'}}{6800} \rightarrow \widehat{A'B'} = \frac{6800 \cdot \pi}{4} \approx 5338 \text{ km}$$

تمرین برای حل :

۱۶: اندازه‌ی زاویه‌ی ای که عقربه‌ی ساعت شمار از ساعت ۱ بعد از ظهر تا ۳ بعد از ظهر حرکت می کند را برحسب درجه و رادیان بیان کنید.

۱۷: اندازه‌ی زاویه‌ی ای $\frac{\pi}{20}$ رادیان است. اندازه‌ی این زاویه را برحسب درجه به دست آورید.

۱۸: یک دایره‌ی مثلثاتی رسم کنید و روی آن زاویه‌های منطبق بر محورهای مختصات را برحسب رادیان مشخص کنید.

۱۹: جدول زیر را کامل کنید.

۱۵			۱۳۵	زاویه برحسب درجه
	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$		زاویه بر حسب رادیان

۲۰: درستی یا نادرستی جملات زیر را بنویسید.

الف) در دایره‌ی ای به شعاع ۱ سانتی متر، طول کمان روبرو به زاویه‌ی π رادیان، تقریباً برابر $\frac{3}{14}$ سانتی متر است.

ب) انتهای کمان زاویه‌ی $\frac{6\pi}{5}$ رادیان، در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد.

ج) اگر زاویه‌ی بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی برابر ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه‌ی قاعده‌ی این مثلث، کوچکتر از اندازه‌ی هر یک از ساق‌های آن است.

د) زاویه‌های $\frac{2\pi}{3}$ رادیان و $\frac{\pi}{9}$ رادیان و $\frac{7\pi}{36}$ رادیان، زاویه‌های یک مثلث را تشکیل می دهند.

جداول مقادیر نسبت های مثلثاتی تعدادی از زاویه ها

الف) زاویه های مهم

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
sin		۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
cos		۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
tan		۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	نامعین
cot		نامعین	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰

تمرین ۲۱: مقدار عبارت زیر را تعیین کنید.

$$A = 2 \sin \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4} - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + 4 \sin \frac{\pi}{2}$$

ب) زاویه های مرزی

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	برحسب درجه	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin		۰	۱	۰	-۱	۰
cos		۱	۰	-۱	۰	۱
tan		۰	نامعین	۰	نامعین	۰
cot		نامعین	۰	نامعین	۰	نامعین

تمرین ۲۲: مقدار عبارت زیر را تعیین کنید.

$$B = \sin \frac{\pi}{2} \cos \pi - 2 \tan \frac{\pi}{4} - \sqrt{3} \tan 2\pi + 4 \sin \frac{3\pi}{2}$$

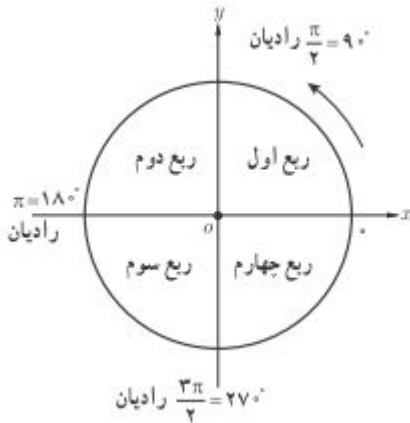
تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه استان خوزستان

درس دوم : روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

در این درس علاوه بر یادآوری تعدادی از روابط مثلثاتی سال قبل، روابط جدیدی نیز بین نسبت های مثلثاتی معرفی می نماییم.

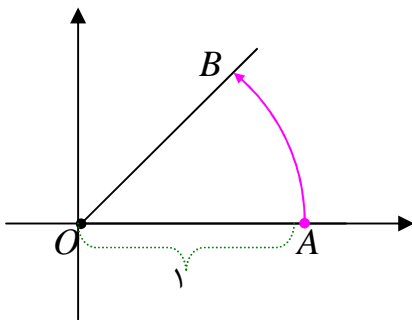
قسمت اول : یادآوری تعدادی از روابط مثلثاتی



می دانید، دایره ای است که مرکز آن مبدأ مختصات و اندازه ی شعاع آن یک واحد طول باشد، را دایره ی مثلثاتی یا دایره ی استاندارد می نامند.

در هر دایره ی مثلثاتی برای تشکیل زاویه، نقطه ی A را مبدأ حرکت در نظر می گیرند. حال اگر نقطه ی A را حول مرکز دایره دوران دهیم تا نقطه ی B بدست آید، در این صورت زاویه ی AOB حاصل می شود.

تذکر :



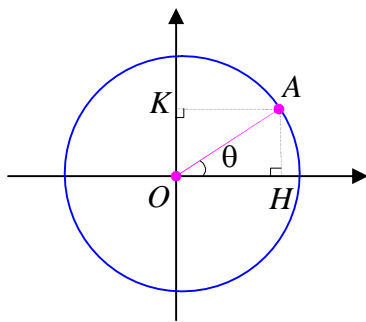
۱ : اگر دوران در خلاف جهت عقربه های ساعت باشد، زاویه را مثبت و اگر در جهت حرکت عقربه های ساعت باشد، زاویه را منفی در نظر می گیرند.

۲ : اگر نقطه ی A دوران داده نشود، زاویه صفر می باشد. اگر

نقطه ی A را به اندازه ی یک دور کامل دوران دهیم به محل اولیه ی خود بر می گردد. یک دوران کامل زاویه ای برابر 360 درجه یا 2π را تشکیل می دهد.

تمرین ۱ : زاویه ی $\frac{3\pi}{4}$ رادیان ، در کدام ربع از دایره ی مثلثاتی قرار می گیرد؟ این زاویه را روی دایره ی

مثلثاتی مشخص کنید.



بر این اساس می توان نسبت های مثلثاتی را روی دایره ی مثلثاتی نیز تعریف کرد.

اگر نقطه ی $A(x_0, y_0)$ روی دایره ی استاندارد قرار گیرد. در این حالت می توان نوشت:

$$OA = r = 1$$

$$\sin \theta = \frac{y_0}{r} = \frac{y_0}{1} = y_0 \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{x_0}{r} = \frac{x_0}{1} = x_0$$

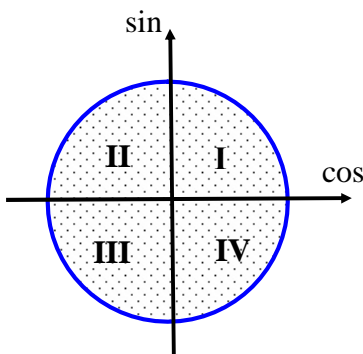
$$\tan \theta = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{و} \quad \cot \theta = \frac{x_0}{y_0} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

همچنین با توجه به رابطه ی فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه ی OAH می توان نوشت:

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2 \rightarrow \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

به همین جهت است که محور طول ها را محور کسینوس ها و محور

عرض ها را محور سینوس ها می نامند.



گاهی لازم می شود، که علامت نسبت های مثلثاتی را در نواحی

متخلف را داشته باشیم. با توجه به تعریف قبل می توان جدول زیر را

برای تشخیص علامت نسبت های مثلثاتی در دایره ی مثلثاتی تنظیم

نمود.^۱

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

^۱. برخی برای حفظ کردن علامت های جدول، به ترتیب نواحی و فقط برای خانه های مثبت نسبت های سینوس، کسینوس و تانژانت، از حروف کلمه ی **هستک** استفاده می کنند.

با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در دایره‌ی مثلثاتی ، می توان اتحاد های زیر را بیان نمود.

۱. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	۳. $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	۵. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
۲. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	۴. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	۶. $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

نتیجه : اگر α یک زاویه‌ی دلخواه باشد. در این صورت:

الف) $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

ب) $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

ج) $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$

د) $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

همچنین با توجه به تعاریف فوق واضح است که سینوس و کسینوس هر زاویه ، عددی است که در فاصله‌ی $[-1, 1]$ قرار می گیرد.

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad \text{و} \quad -1 \leq \sin \theta \leq 1$$

تمرین ۲: اگر یک ضلع زاویه‌ی θ در ربع سوم دایره‌ی مثلثاتی باشد و $\sin \theta = -\frac{1}{3}$ باشد. سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

تمرین ۳: اگر $\cot \alpha = -2$ و $\cos \alpha > 0$ ، سایر نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی α را تعیین کنید.

تمرین برای حل :

۴: اگر $\cos x = -\frac{4}{5}$ و $\sin x > 0$ نسبت های مثلثاتی دیگر زاویه‌ی x را بیابید.

۵: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\cot \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{3} \times \sin \frac{\pi}{4} =$

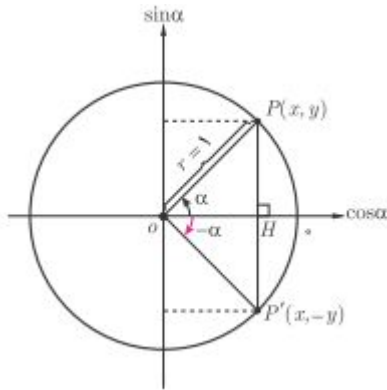
ب) $\frac{\tan^2(\frac{\pi}{6}) + \sin^2(\frac{\pi}{4})}{\cot^2(\frac{\pi}{4}) - \cos^2(\frac{\pi}{3})} + \cos^2(75) + \sin^2(75) =$

قسمت دوم: نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

اگر α یک زاویه روی دایرهی مثلثاتی باشد، $-\alpha$ قرینهی آن است. با توجه به شکل مقابل بین نسبت های

مثلثاتی زاویهی α و قرینهی آن یعنی $-\alpha$ رابطهی زیر وجود

دارد.



$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$$

تمرین ۶: نسبت های مثلثاتی زاویهی -30° درجه را به دست آورید.

تمرین ۷: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$

ب) $\frac{\cos(-90^\circ) + \sin(-270^\circ)}{\sin(-180^\circ) - \cos(-360^\circ)} =$

ج) $\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$

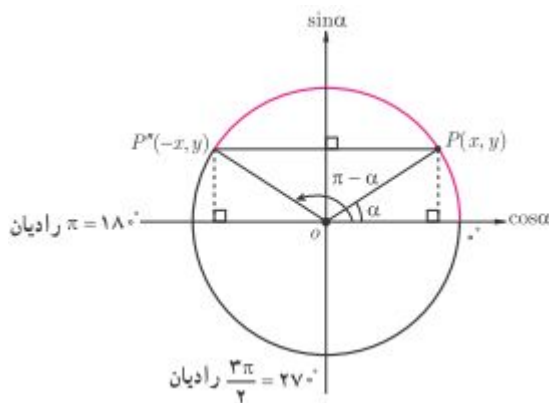
د) $\cos(-45^\circ) \times \cos(-60^\circ) + \sin(-45^\circ) \times \sin(-60^\circ) =$

قسمت سوم : نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل

دو زاویه را مکمل گویند، هرگاه مجموع اندازه های آنها ۱۸۰ درجه یا π رادیان^۲ باشد. اگر β و α دو زاویه‌ی مکمل باشند، در این صورت می توان نوشت، $\alpha + \beta = \pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta = \pi - \alpha$$

بین نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی α و مکمل آن یعنی β با توجه به شکل مقابل، می توان رابطه‌ی زیر را نوشت :



$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin(\alpha) \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos(\alpha) \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan(\alpha) \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot(\alpha) \end{aligned}$$

تمرین ۸ : مکمل هر یک از زاویه های زیر را مشخص کنید.

- الف) ۷۵° ب) ۲۵° ج) $\frac{\pi}{۱۲}$ د) $\frac{-\pi}{۴}$

تمرین ۹ : حاصل هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

- الف) $\tan \frac{۲\pi}{۳} =$ ت) $\cot(-۱۲۰^\circ) =$
 ب) $\cos \frac{۳\pi}{۴} =$ ث) $\cos(۱۳۵^\circ) =$
 پ) $\sin ۱۲۰^\circ =$

تمرین ۱۰ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۶}$ رادیان را به دست آورید.

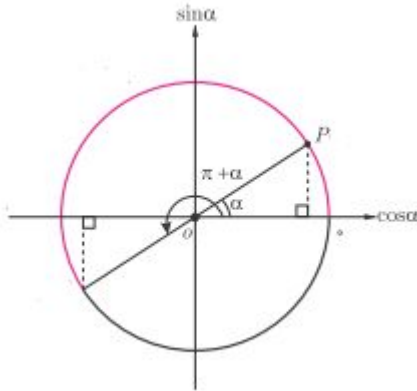
^۲. و به طور کلی مجموع آنها $\pi + ۲k\pi$ رادیان باشند.

قسمت چهارم : نسبت های مثلثاتی زاویه های با اختلاف π رادیان

اگر دو زاویه α و β طوری باشند که اختلاف آنها 180° درجه یا π رادیان شود. در این صورت می توان نوشت، $\beta - \alpha = \pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta = \pi + \alpha$$

لذا می توان رابطه ی زیر را نوشت :



$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot(\alpha)$$

تمرین ۱۱ : نسبت های مثلثاتی زاویه ی 225° درجه را به دست آورید.

تمرین ۱۲ : حاصل هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\cot \frac{5\pi}{4} =$

ب) $\cos(-\frac{4\pi}{3}) =$

پ) $\sin 225^\circ =$

ت) $\tan(225^\circ) =$

ث) $\sin(-\frac{7\pi}{6}) =$

تمرین ۱۳ : نسبت های مثلثاتی زاویه ی $\frac{7\pi}{6}$ رادیان را به دست آورید.

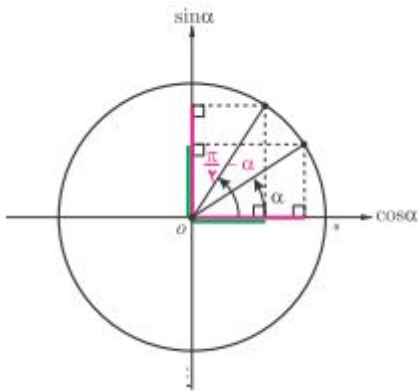
قسمت ششم : نسبت های مثلثاتی زاویه های با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ رادیان

اگر دو زاویه β و α طوری باشند که اختلاف آنها ۹۰ درجه یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان شود. در این صورت می توان

نوشت، $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

لذا می توان رابطه ی زیر را نوشت :



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan(\alpha)$$

تمرین ۱۷ : حاصل هر یک از نسبت مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$$

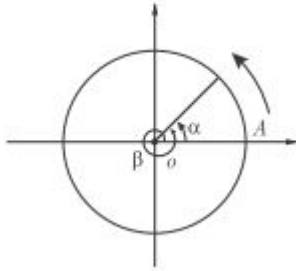
تمرین ۱۸ : نسبت های مثلثاتی زاویه ی ۱۳۵ درجه را به دست آورید.

قسمت هفتم: نسبت های مثلثاتی با مجموع یا تفاضل 2π رادیان

اگر دو زاویه α و β طوری باشند که اختلاف آنها 360° درجه یا 2π رادیان شود. در این صورت می توان نوشت، $\beta - \alpha = 2\pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta = 2\pi + \alpha$$

لذا می توان رابطه ی زیر را نوشت :



$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\tan(2\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$$

$$\cot(2\pi + \alpha) = \cot(\alpha)$$

تمرین ۱۹: حاصل هر یک از نسبت مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\sin(405^\circ) =$

ب) $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$

روش سریع محاسبه ی نسبت های مثلثاتی

بر اساس آنچه که تاکنون داشتیم می توان روابط دیگری را بررسی کرد که به طور مختصر این روابط را به شکل زیر عنوان می کنیم.

الف) اگر زاویه ی مثلثاتی شامل مضرب های صحیح π باشد، نسبت مثلثاتی تغییر نمی کند.

ب) در نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس می توان مضربهای زوج π را حذف کرد ولی اگر مضربهای فرد π را حذف کنیم، باید پس از حذف یک علامت منفی جلوی نسبت مثلثاتی قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(3\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(3\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin \alpha$$

ج) در نسبت های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت تمام مضربهای صحیح π را می توان حذف کرد.

مثلاً:

$$\tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(3\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

د) در تمام نسبت های مثلثاتی می توان $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ را حذف کرد ولی پس از حذف باید:

۱. سینوس را به کسینوس و تانژانت را به کتانژانت تغییر داد و برعکس

۲. با فرض حاده بودن زاویه α ، ربعی که زاویهی مثلثاتی در آن واقع است را روی دایرهی مثلثاتی پیدا

کرده و علامت نسبت مثلثاتی آنرا مشخص نموده و جلوی نسبت مثلثاتی جدید قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos \alpha \quad \text{ربع دوم}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha \quad \text{ربع سوم}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\cot \alpha \quad \text{ربع اول}$$

توجه ۱: اگر $n \in N$ آنگاه همواره داریم:

$$\sin(n\pi + \alpha) = (-1)^n \sin \alpha$$

$$\tan(n\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cos(n\pi + \alpha) = (-1)^n \cos \alpha$$

$$\cot(n\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

توجه ۲: با توجه به قواعد بالا همواره داریم.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

تمرین ۲۰: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\tan ۱۲^\circ =$

۴) $\cos(-۱۵^\circ) =$

۲) $\cos(۱۳۵^\circ) =$

۵) $\sin\left(\frac{۱۳\pi}{۲} - \alpha\right) =$

۳) $\cot(۲۱۰^\circ) =$

۶) $\sin(\alpha - ۳\pi) =$

تمرین ۲۱: تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sqrt{۲} \sin(۱۳۵^\circ) - ۲ \cot(۳۰^\circ) \cdot \cos(۲۱۰^\circ) - \tan(-۱۳۵^\circ) = ۳$$

تمرین ۲۲: در تساوی زیر به جای x یک زاویه‌ی مناسب قرار دهید.

$$\sin(x) = \cos(۱۰^\circ + x)$$

حل: دو زاویه باید متمم همدیگر باشند. پس:

$$x + ۱۰ + x = ۹۰ \rightarrow ۲x = ۸۰ \rightarrow x = ۴۰$$

تمرین برای حل:

۲۳: مقدار دقیق عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\sin\left(\frac{۳\pi}{۴}\right) =$

ب) $\tan\left(\frac{۱۱}{۶}\pi\right) =$

ج) $\cos\left(\frac{۲۵\pi}{۳}\right) =$

۲۴: نشان دهید که $\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right) + \cos(\pi - \theta) = ۰$

۲۵: مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\tan(-۳۰^\circ) \cot(۱۵^\circ) - \tan(۱۳۵^\circ) =$

ب)
$$\frac{\sin(۲۴^\circ) \times \cos(۱۲^\circ) + \cos(-۲۷^\circ) \times \sin(۳^\circ)}{\cos(۲۲۵^\circ) \times \cos(-۱۳۵^\circ) + \tan(۴۵^\circ)} =$$

۲۶: حاصل $\tan(۲۰^\circ) + \tan(۴۰^\circ) + \tan(۶۰^\circ) + \dots + \tan(۱۸۰^\circ)$ را به دست آورید.

۲۷: حاصل $\frac{\sin(30^\circ)}{1 - \cos(24^\circ)}$ را به دست آورید.

۲۸: مقدار عددی عبارت مقابل را تعیین کنید.

$$A = \frac{\cos(24^\circ) + \sin(-15^\circ)}{\tan(-45^\circ)}$$

۲۹: درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(x - 2\pi) \times \sin(x - \pi) + \tan(-x) \times \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$$

ب) $3 \sin(7^\circ) + \sin(55^\circ) + \cos(215^\circ) + 2 \cos(16^\circ) = \cos(2^\circ)$

۳۰: رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$\sin(23^\circ) - 2 \sin(14^\circ) + \sin(41^\circ) + \cos(-5^\circ) + \sin(4^\circ) = 0$$

۳۱: آیا دو زاویه می توان یافت که سینوس یکسان داشته باشند؟ چرا؟ برای کسینوس چطور؟

۳۲: درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin(84^\circ) = \sin(6^\circ)$

ب) $\cos(-324^\circ) = \cos(36^\circ)$

ج) $\tan(-100^\circ) = \tan(8^\circ)$

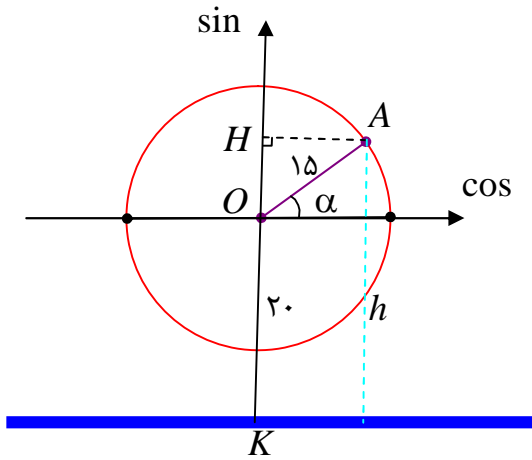
د) $\sin(175^\circ) = \sin(155^\circ)$

۳۳: در تساوی های زیر به جای x یک زاویه‌ی مناسب قرار دهید.

الف) $\sin(x) = \cos(2^\circ + x)$

ب) $\tan\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{9} + x\right)$

درس سوم : توابع مثلثاتی



قبل از ورود به بحث، توابع مثلثاتی، مثال زیر را حل می کنیم.

یک شهر بازی چرخ و فلکی دارد که شعاع دایره‌ی آن ۱۵ متر است. فاصله‌ی مرکز دایره‌ی این چرخ و فلک تا سطح زمین ۲۰ متر است. واضح است که ارتفاع هر کابین مانند کابین A با تغییر زاویه‌ی α تغییر می کند و برای ارتفاع کابین می توان نوشت:

$$\sin \alpha = \frac{OH}{OA} \rightarrow OH = OA \cdot \sin \alpha = 15 \sin \alpha$$

$$h = KH = OK + OH = 20 + 15 \sin \alpha$$

$$\rightarrow h = 20 + 15 \sin \alpha$$

هر تابع مشابه تابع فوق را یک **تابع مثلثاتی** می نامند. با توجه به این تابع به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف: ارتفاع کابین را وقتی که $\alpha = 120^\circ$ را به دست آورید.

ب : مقدار حداقلی و مقدار حداکثری ارتفاع کابین را تعیین کنید.

ج : تعیین کنید، که زاویه‌ی α چقدر باشد تا ارتفاع کابین ۲۰ متر شود.

قسمت اول : توابع مثلثاتی

هر تابع شامل نسبت های مثلثاتی را تابع مثلثاتی می گویند. تابع های $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$

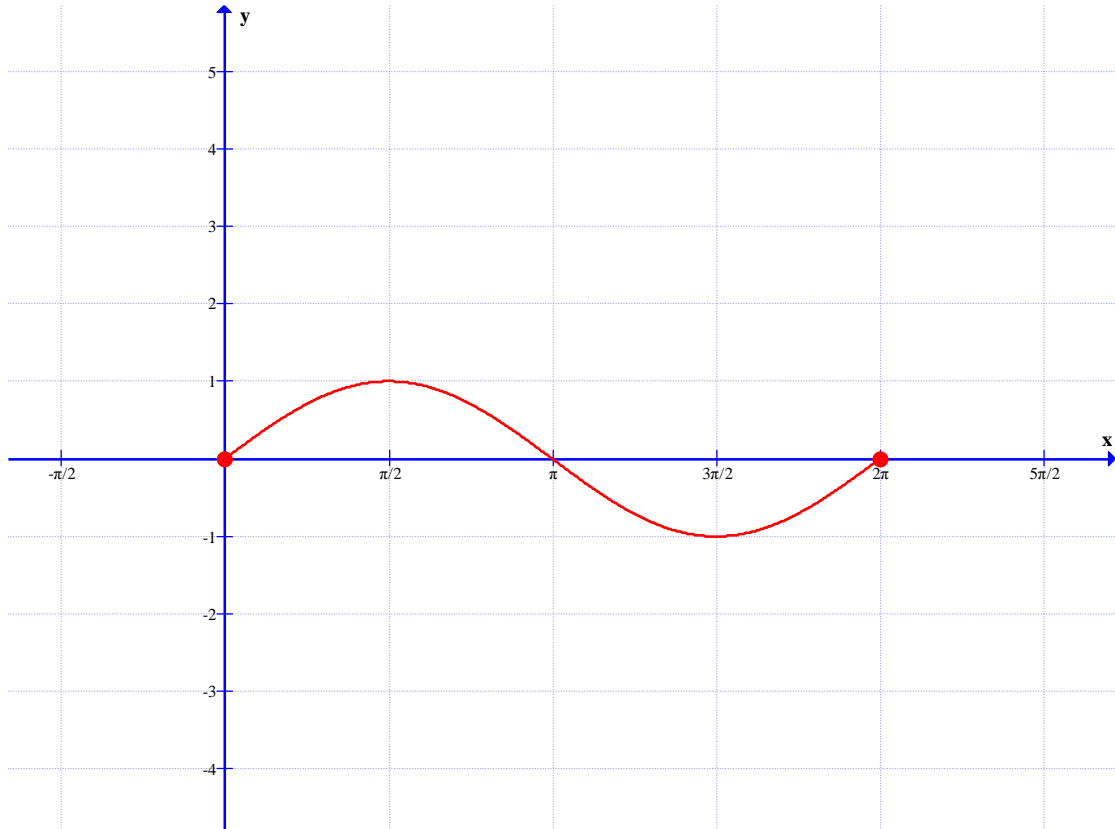
ساده ترین تابع های مثلثاتی هستند. برای رسم نمودار چنین توابعی ساده ترین روش، انتخاب چند نقطه به

کمک معادله و پیدا کردن آنها روی دستگاه مختصات (روش نقطه یابی) می باشد.

مثال ۱ : نمودار تابع $f(x) = \sin x$ را در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه از نمودار تابع را به کمک معادله‌ی داده شده ، انتخاب می کنیم.

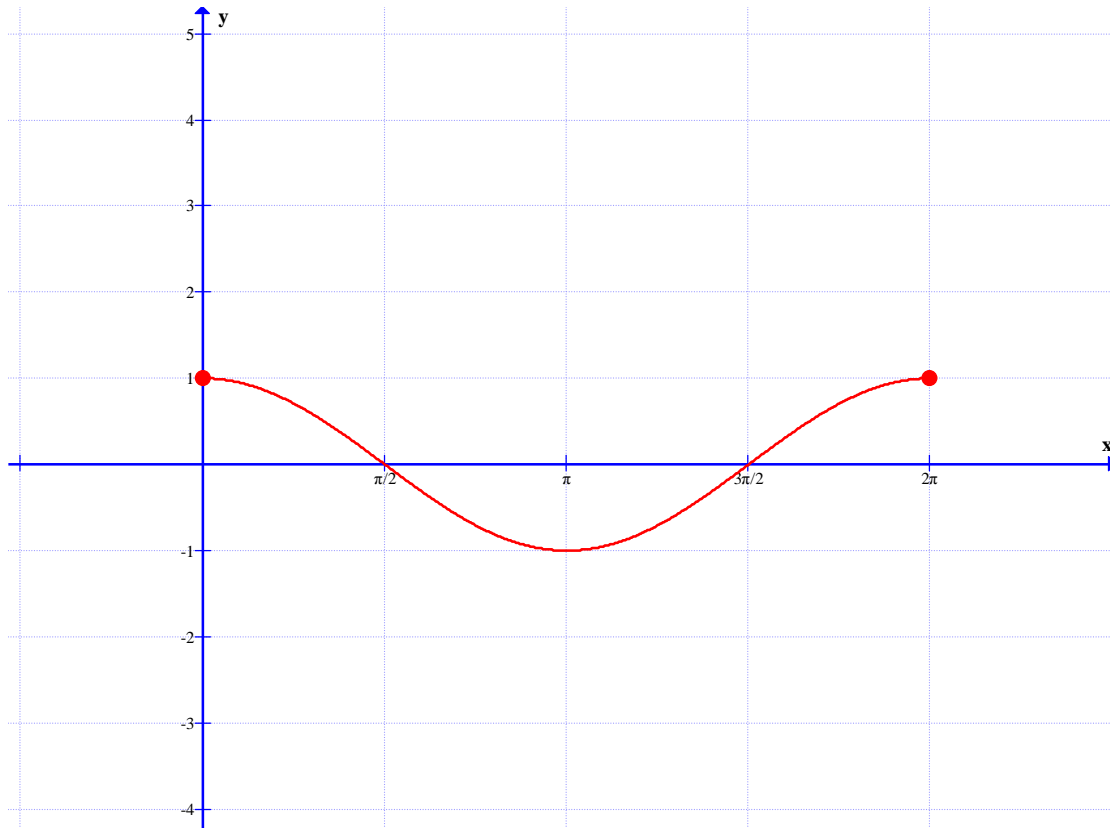
x	.	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	.	۱	.	-۱	.



مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = \cos x$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه از نمودار تابع را به کمک معادله‌ی داده شده ، انتخاب می کنیم.

x	.	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	۱	.	-۱	.	۱



تمرین ۱: نمودار تابع های $f(x) = \cos x$ و $f(x) = \sin x$ را در فاصله ی $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

قسمت دوم : توابع مثلثاتی

در ادامه به بررسی خواص این توابع می پردازیم.

خاصیت ۱: مقدار حداکثری (max) تابع های $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ برابر ۱ و مقدار

حداقلی (min) آنها برابر -۱ می باشد.

خاصیت ۲: دامنه ی تابع های $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آنها

بازه ی $[-1, 1]$ می باشد.

خاصیت ۳: تابع $f(x) = \sin x$ از مبدأ مختصات می گذرد، ولی تابع $f(x) = \cos x$ از نقطه ی $(0, 1)$

می گذرد.

خاصیت ۴: این دو تابع متناوب هستند. یعنی در فواصل معینی نمودار آنها تکرار می شود. طول هر یک از

این فاصله ها را دوره ی تناوب می نامند. دوره ی تناوب این دو تابع $T = 2\pi$ می باشد.

تمرین ۲: مقدار تابع $f(x) = 2 \sin 3x$ را در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{2}$ بدست آورید.

تمرین ۳: مقدار تابع $f(x) = -2 \sin(\pi - x)$ را در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{6}$ بدست آورید.

تمرین ۴: مقدار تابع زیر را در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{6}$ بدست آورید.

$$f(x) = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

تمرین ۵: مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = 3 + 2 \sin x$$

تمرین برای حل:

۶: مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = 3 - 5 \cos x$$

۷: مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = 7 + 2 \sin x$$

۸: گزاره های زیر برای تابع $f(x) = \sin x$ نوشته شده اند. ($k \in \mathbb{Z}$)

الف: حداکثر مقدار تابع سینوس در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{2}$ است.

ب: حداکثر مقدار تابع سینوس در نقاطی به طول های $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ است.

ج: حداقل مقدار تابع سینوس در نقطه‌ی $x = \frac{3\pi}{2}$ است.

د: حداقل مقدار تابع سینوس در نقاطی به طول های $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ است.

گزاره های دیگری مانند گزاره های فوق برای تابع $f(x) = \cos x$ بنویسید.

الف: حداکثر مقدار تابع کسینوس در نقطه‌ی است.

ب: حداکثر مقدار تابع کسینوس در نقاطی به طول های است.

ج: حداقل مقدار تابع کسینوس در نقطه‌ی است.

د: حداقل مقدار تابع کسینوس در نقاطی به طول های است.

۹: در هر مورد جای خالی را چنان کامل کنید که گزاره‌ی حاصل درست باشد. ($k \in Z$)

الف) دامنه‌ی تابع سینوس مجموعه‌ی و برد آن مجموعه‌ی است.

ب) دامنه‌ی تابع کسینوس مجموعه‌ی و برد آن مجموعه‌ی است.

پ) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x = k\pi$ ، برابر است.

ت) مقدار تابع کسینوس در نقاطی به طول‌های برابر با صفر است.

ث) حداکثر مقدار تابع سینوس است که در نقاطی به طول‌های $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ است.

ج) حداقل مقدار تابع سینوس است که در نقاطی به طول‌های به دست می‌آید.

ح) حداکثر مقدار تابع کسینوس است که در نقاطی به طول‌های $x = 2k\pi$ است.

خ) حداقل مقدار تابع کسینوس است که در نقاطی به طول‌های به دست می‌آید.

۱۰: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 3 \cos x$

ب) $y = 1 + \sin x$

ج) $y = 2 \sin x - 1$

د) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$

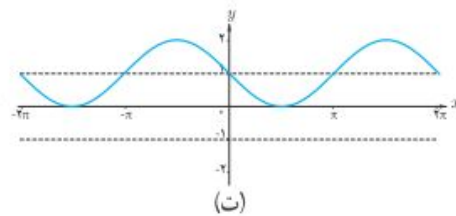
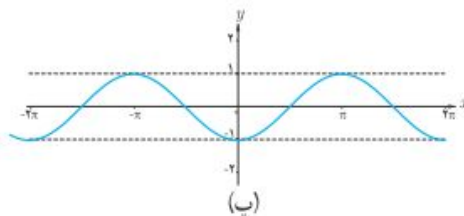
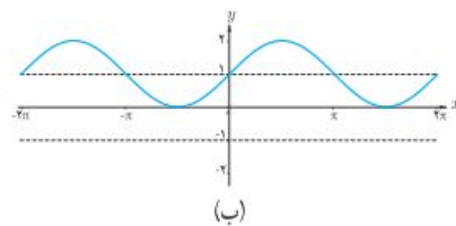
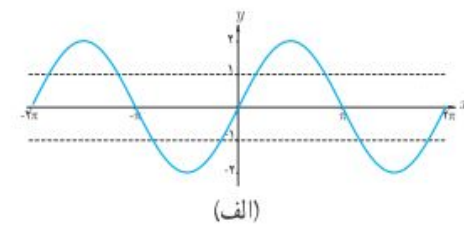
۱۱: هر یک از نمودارهای زیر مربوط به کدام تابع است.

۱ $y = 2 \sin x$

۲ $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

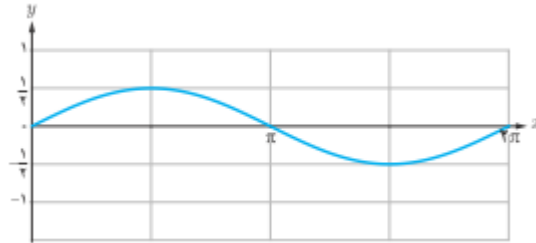
۳ $y = \sin x + 1$

۴ $y = -\sin x + 1$

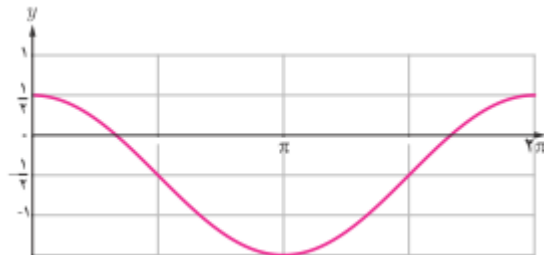


۱۲: با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست اند؟

الف : شکل زیر نمودار تابع $y = \frac{1}{3} \sin x$ را نشان می دهد.



ب : شکل زیر نمودار تابع $y = \cos x - \frac{1}{3}$ را نشان می دهد.



پ : برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است، نمودار تابع سینوس را به اندازه‌ی یک واحد به موازات محور x ها انتقال دهیم.

ت : برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -\cos x$ کافی است، نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان