

ریاضی ۱

پایه می دهم « رشته های علوم تجربی و ریاضی و فیزیک »

فصل ۵: تابع و مفهوم آن

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

مهر ۱۳۹۹

درس اول : مفهوم تابع

یکی از مفاهیم مهم و کاربردی در ریاضی و فیزیک ، مفهوم تابع می باشد. بوسیله‌ی این مفهوم می توان رابطه‌ی بین پدیده های پیرامون خود را به راحتی بیان نمود. در این درس با این مفهوم به صورت مقدماتی آشنا می شوید.

قسمت اول : مفهوم تابع

در لغت تابع به معنای پیرو، مطیع ، وابسته و شناخته می شود. در ریاضی هرگاه رابطه‌ی بین دو متغیر چنان باشد که با تغییر یکی ، دیگری تغییر کند. گویند متغیر دوم تابعی از متغیر اول است و متغیر اول را متغیر اصلی و دومی را متغیر تابع یا «تابع» می گویند. برای مثال، هر چقدر تعداد ساعت هر یک از کارگران یک کارگاه زیاد شود، دستمزد آن نیز زیاد می شود. همچنین هر چقدر تعداد ساعت هر یک کم شود، دستمزد آن نیز کم می شود. لذا دستمزد کارگران کارگاه تابعی از میزان ساعت کاری آنها است.

در دیدگاه دیگر هرگاه بستگی بین دو متغیر چنان باشد که متغیر اول در یک لحظه فقط به یک متغیر دیگر نظیر شود، گویند متغیر دوم تابعی از متغیر اول است.

مثال: هر یک از رابطه های زیر یک تابع می باشند.

- ۱ : هر دانش آموز در هر لحظه فقط یک وزن دارد. پس رابطه‌ی بین سن و وزن دانش آموز تابع است.
- ۲ : هر پرنده‌ی در حال پرواز در هر لحظه یک ارتفاع دارد، پس رابطه‌ی بین زمان پرواز و ارتفاع پرنده یک تابع است.

مثال : هر یک از رابطه های زیر یک تابع نمی باشند.

- ۱ : هر شخص ممکن است در هر لحظه به دو یا چند تیم ورزشی علاقه مند باشد. پس این رابطه تابع نیست.
- ۲ : هر شخص ممکن است در هر لحظه به دو یا چند غذا علاقه مند باشد. پس این رابطه تابع نیست.

تمرین برای حل :

۱ : کدامیک رابطه های زیر یک تابع را معلوم می کند؟ توضیح دهید.

الف : رابطه ای که به هر ضلع مربع ، محیط آن را نسبت دهد.

ب : رابطه ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت دهد.

ج : رابطه ای که به هر دانش آموز ، گروه خونی او را نسبت دهد.

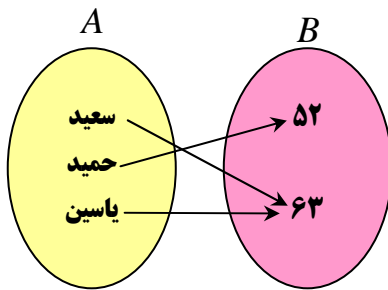
د : رابطه ای که به هر دانش آموز ، دوستان او را نسبت دهد.

هـ : رابطه ای که به هر عدد ، ریشه های دوّم آن عدد را نسبت دهد.

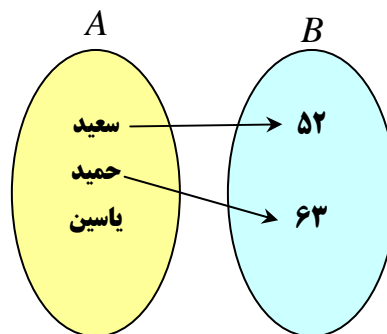
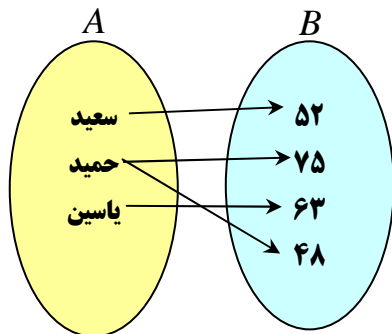
و : رابطه ای که به هر عدد ، ریشه های سوّم آن عدد را نسبت دهد.

در واقع با توجه به آنچه که در بالا گفته شد، می توان گفت : هر رابطه که هر عضو مجموعه A را دقیقاً به یک عضو از مجموعه B نسبت دهد را یک **تابع** از مجموعه A به مجموعه B می نامند.

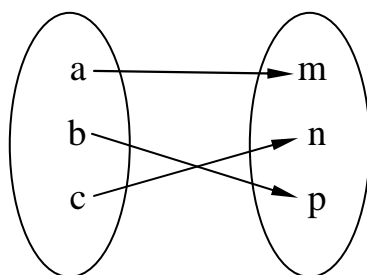
برای مثال اگر نمودار پیکانی نام دانش آموز کلاس و وزن آنها را در نظر بگیریم. با توجه به این تعریف، رابطه ی بین دانش آموزان و وزن آنها یک تابع است.



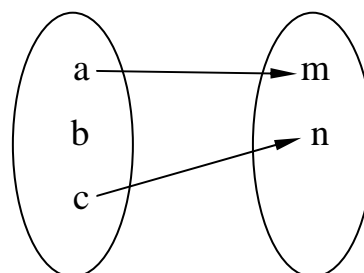
اما طبق تعریف، رابطه های زیر تابع نمی باشند.



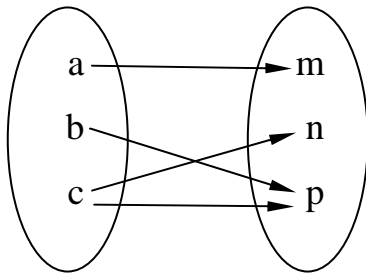
تمرین ۲ : کدامیک از نمودار های زیر یک تابع را مشخص می کند؟



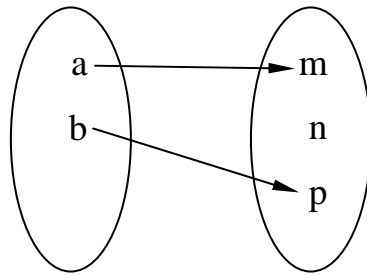
(۱)



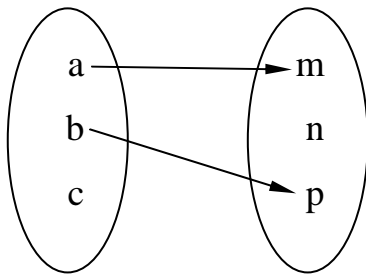
(۲)



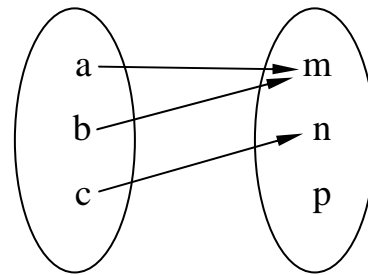
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

حل :

(۱) طبق تعریف این نمودار یک تابع مشخص می کند.

(۲) طبق تعریف چون از b پیکان خارج نشده است ، پس این نمودار تابع نیست.

(۳) طبق تعریف چون از c دو پیکان خارج شده است ، پس این نمودار تابع نیست.

(۴) طبق تعریف این نمودار یک تابع مشخص می کند.

(۵) طبق تعریف چون از c پیکان خارج نشده است ، پس این نمودار تابع نیست.

(۶) طبق تعریف این نمودار یک تابع مشخص می کند.

تمرین ۳: تمام تابع هایی را بنویسید که از $A = \{a, b, c\}$ به $B = \{p, q\}$ تعریف می شوند. سپس

تعداد آنها را تعیین کنید.

تمرین ۴: اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{p, q\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟

حل: طبق تعریف تابع ، هر عضو B می تواند حداکثر از ۴ عضو A به دست آمده باشد و چون B دو عضو

دارد ، پس حداکثر توابعی که از A به B تعریف می شوند برابر $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ باشند.

۱. به طور کلی اگر مجموعه ی A دارای m عضو و مجموعه ی B دارای n عضو باشد. حداکثر n^m تابع از A به B وجود دارد.

تمرین برای حل:

۵: الف: اگر $A = \{2, 3\}$ و $B = \{4, 5, 6\}$. رابطه‌ای از A به B بنویسید که تابع باشد.

ب: اگر $A = \{2, 3\}$ و $B = \{4, 5, 6\}$. رابطه‌ای از A به B بنویسید که تابع نباشد.

۶: اگر $A = \{a\}$ و $B = \{c, d, e\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟ آنها را بنویسید.

۷: اگر $A = \{a, b\}$ و $B = \{c, d\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟ آنها را بنویسید.

۸: ابتدا تعداد تابع هایی را بنویسید که از $A = \{a, b\}$ به $B = \{5, 6, 7\}$ تعریف می شوند و سپس تمام

آنها را تعیین کنید.

قسمت دوم: روش های نمایش تابع

یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن، به هر عضو از A

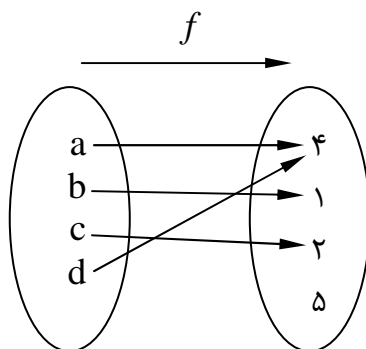
دقیقاً یک عضو از B نظیر می شود. در این وضعیت مجموعه‌ی A را **دامنه** و مجموعه‌ی B را **هم دامنه** یا

مقصد تابع می نامند و می نویسند.

$$f: A \rightarrow B$$

در ادامه روش های نمایش یک تابع را بیان می کنیم.

۱: نمایش پیکانی



یک رابطه از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B ، که با **روش**

پیکانی یا نمودار ون نمایش داده می شود، تنها در صورتی

تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

مانند تابع مقابل:

تذکر: در این روش نمایش تابع، ممکن است به یک یا چند هم دامنه (B)

عضو هم دامنه پیکانی وارد نشود. یا به بعضی از آنها یک یا چند پیکان وارد شود. هر زیر مجموعه از هم دامنه

که به آن پیکان وارد شده است را **برد** تابع می نامند.

در تابع مثال فوق داریم.

دامنه $A = D_f = \{a, b, c, d\}$

هم دامنه $B = \{۱, ۲, ۴, ۵\}$

برد $R_f = \{۱, ۲, ۴\}$

نتیجه ی ۱: مجموعه ی تمام عضو هایی که یک تابع روی آنها اثر می کند (که همگی در مجموعه ی A

هستند). را **دامنه** و مجموعه ی تمام عضو هایی از مجموعه ی B (هم دامنه) که متناظر با اعضای دامنه قرار

می گیرند را **برد** آن تابع می نامند. معمولاً دامنه ی تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می دهند.

نتیجه ی ۲: در حالت کلی برد تابع همواره زیر مجموعه ی هم دامنه ی آن است.^۲ یعنی $R_f \subseteq B$

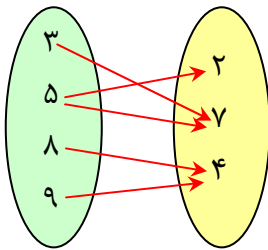
تمرین ۹: مجموعه های $A = \{۱, ۲\}$ و $B = \{a, b, c\}$ داده شده اند.

الف: به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B بنویسید که تابع باشند.

ب: به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B بنویسید که تابع نباشند.

ج: تعداد کل توابعی را بنویسید که می توان از A به B تعریف کرد.

تمرین ۱۰: نمودار پیکانی رابطه ای به شکل مقابل رسم شده است.



۸ (۴)

۲ (۳)

۷ (۲)

۳ (۱)

با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد بود؟

۲: نمایش تابع توسط زوج های مرتب

مجموعه ای از زوج های مرتب^۳ را در نظر می گیریم. اگر هیچ دو زوج مرتب متمایزی موجود نباشند که مولفه

های اوّل آنها برابر باشند، این مجموعه تابعی خواهد بود که در آن مولفه های اوّل، اعضای دامنه و مولفه های

دوّم، اعضای برد می باشند.

^۲. در حالتی که $R_f = B$ باشد. گویند تابع پوشا است.

^۳. هر دو تایی به شکل (a, b) که محل قرار گرفتن اجزای آن مهم است را زوج مرتب می نامند. a را مؤلفه ی اوّل (طول) و b را مؤلفه ی دوّم (عرض) می نامند.

به عنوان مثال، تابعی که در مورد (۱) با روش پیکانی نمایش داده ایم. در واقع مجموعه‌ی زوج های مرتبی به صورت زیر را تشکیل می دهد.

$$f = \{(a, 4), (b, 1), (c, 2), (d, 4)\}$$

به طور کلی برای تابع f که از x به y تعریف شده است، می توان نوشت:

$$f = \{(x, y) \mid x \in D_f, y \in R_f\}$$

بنابراین در نمایش تابع به صورت **زوج مرتب**، اگر زوج های مرتب دارای مولفه های اول برابر باشند، باید مولفه های دوم آن ها نیز برابر باشند^۴.

تمرین ۱۱: کدام یک از مجموعه های زیر تابع است؟

الف) $f_1 = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5)\}$

ج) $f_3 = \{(2, 5), (5, 2), (3, 2), (2, 3), (0, 0)\}$

ب) $f_2 = \{(1, 3), (2, 5), (1, 2)\}$

د) $f_4 = \{(1, 3), (2, 0), (4, 7), (1, 3)\}$

تمرین ۱۲: اگر مجموعه‌ی $\{(2, 5), (5, 7), (1, 4), (5, 2k + 1)\}$ تابع باشد. مقدار k را بیابید.

تمرین ۱۲: اگر مجموعه‌ی $\{(2, \alpha - \beta), (2, 3), (1, \alpha + \beta), (3, 0), (1, -1)\}$ تابع باشد.

مقدار α و β را بیابید.

تمرین ۱۳: اگر مجموعه‌ی زیر یک تابع باشد، مقدار a را بیابید.

$$f = \{(1, 3), (2, 0), (1, t^2 - 2t)\}$$

تمرین ۱۴: اگر مجموعه‌ی زیر یک تابع باشد، مقدار m را بیابید.

$$f = \{(1, 3), (2, 0), (-1, 4), (1, m^2 - 2m), (m, 7)\}$$

تمرین ۱۵: دامنه و برد تابع زیر را بنویسید.

$$f = \{(3, 2), (5, 7), (-3, 4), (8, 4)\}$$

تمرین ۱۵: دامنه و برد تابع زیر را بنویسید.

$$f = \{(3, 2), (5, 2), (-3, 2), (2, 2), (1, 2)\}$$

^۴ . اگر چنین نباشد، مجموعه ی داده شده تابع نیست.

۳: نمایش تابع به صورت جدول

نمایش تابع به صورت **جدول**، مشابه نمایش زوج مرتبی تابع است. در این نمایش مقادیر x ها، دامنه و مقادیر y ها برد تابع را نمایش می دهند.

$$f: \begin{array}{c|cccccc} x & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \hline y & y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \end{array}$$

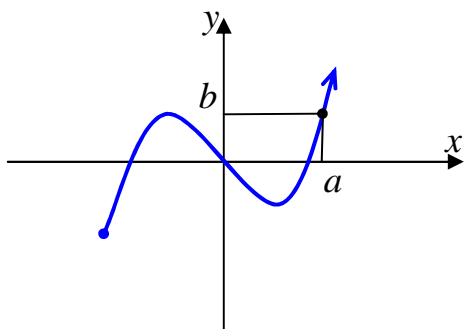
به عنوان مثال، نمایش تابع مورد (۱) به صورت جدول، به شکل زیر است.

$$f: \begin{array}{c|cccc} x & a & b & c & d \\ \hline y & 4 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

تمرین ۱۶: تابعی بنویسید که دامنه ی آن دو عضو و برد آن یک عضو داشته باشد.

تمرین ۱۷: دو تابع بنویسید که دامنه و برد آنها یکسان باشند ولی هیچ دو زوج مرتب آنها یکسان نباشند.

۴: نمایش تابع به صورت هندسی (نمایش دکارتی)

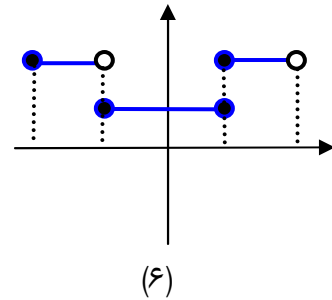
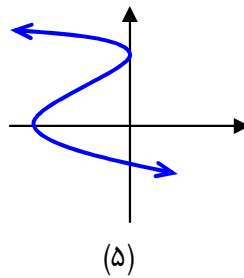
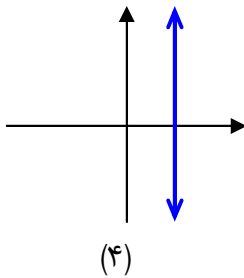
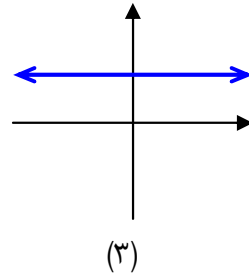
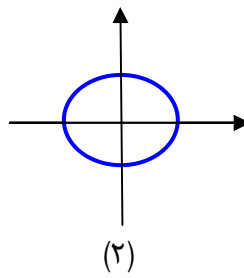
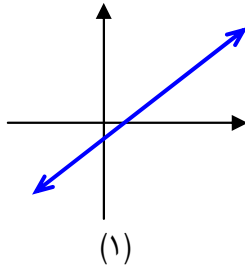


اگر مجموعه ی f ، نمایش زوج های مرتب تشکیل دهنده ی یک تابع باشد، هر زوج مرتب مانند $(a, b) \in f$ یک نقطه از صفحه (در دستگاه مختصات دکارتی) را مشخص می کند. با تعیین محل تمام نقاط، نمودار (منحنی) تابع f پدید می آید.

با توجه به آنچه در مورد تعریف تابع گفته شد، یک منحنی هنگامی نمایش یک تابع است که هر خط موازی

محور عرضها آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (**آزمون خط قائم**)

تمرین ۱۸ : کدامیک از نمودارهای زیر یک تابع را مشخص می کند؟



تمرین ۱۹ : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f = \{(1,2), (3,-1), (4,0), (-1,1)\}$$

تمرین ۲۰ : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f = \{(x, y) \mid y = x^2, -1 \leq x < 1\}$$

تمرین ۲۱ : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4\}$$

تمرین ۲۲ : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

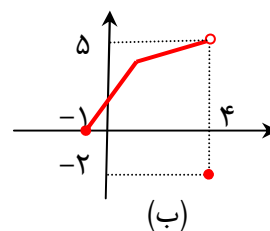
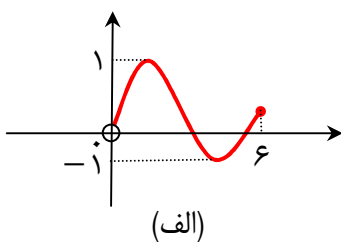
$$f = \{(x, y) \mid y = |x|\}$$

تذکر : اگر تابعی به صورت هندسی نمایش داده شده باشد، تصویر نمودار تابع روی محور x ها، دامنه و

تصویر نمودار روی محور y ها، برد را مشخص می کنند. به عبارت دیگر :

$$D_f = \{x \in R \mid (x, y) \in f\} \quad \text{و} \quad R_f = \{y \in R \mid (x, y) \in f\}$$

تمرین ۲۳ : دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.



تمرین ۲۴: نمودار تابع $f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1\}$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۵: نمایش تابع از طریق ضابطه

برای تابع f که از مجموعه A به مجموعه B تعریف شده است، رابطه‌ای که هر x از A را به y متناظرش از B مرتبط می‌کند، **ضابطه** یا قانون تابع می‌گوییم و به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$f : A \rightarrow B$$
$$y = f(x)$$

به عنوان مثال اگر تابع به هر عضو مجموعه $A = [-1, 1]$ مربع آن را نسبت دهد، در این صورت می‌توان نوشت.

$$f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$$
$$y = x^2$$

تذکر ۱: گاهی تابع را صرفاً با ارائه‌ی ضابطه معرفی می‌کنند و اشاره‌ای به دامنه‌ی آن نمی‌شود. در این موارد، دامنه‌ی تابع را بزرگترین مجموعه‌ای که ضابطه‌ی تابع روی آن تعریف شده باشد، در نظر می‌گیرند.

تذکر ۲: خروجی هر عضو دامنه مانند x را با y یا $f(x)$ نمایش می‌دهند.

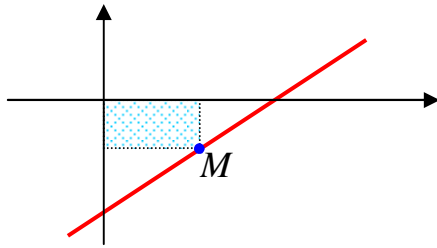
مثال الف: اگر گفته شود که تابع $f(x) = \frac{x+1}{2x-6}$ داده شده است. نتیجه می‌گیریم که دامنه‌ی تابع باید $R - \{3\}$ باشد.

مثال ب: اگر گفته شود که تابع $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ داده شده است. نتیجه می‌گیریم که دامنه‌ی تابع باید $[-2, 2]$ باشد.

تمرین ۲۵: معادله‌ی تابعی را بنویسید که مساحت یک شش ضلعی منتظم را به ضلع آن وابسته کند.

تمرین ۲۶: معادله‌ی تابعی را بنویسید که حجم کره را به شعاع آن وابسته کند.

تمرین ۲۷: مجموع دو عدد ۱۰ است. اگر یکی از آنها x باشد. معادله‌ی تابعی را بنویسید که حاصل ضرب آنها را به x وابسته کند.



تمرین ۲۸: در شکل مقابل یک مستطیل به محور های مختصات و خط $x + 2y = 1$ محدود شده است، معادله‌ی تابعی را بنویسید که مساحت مستطیل را به x وابسته کند.

توجه: گاهی تابع را فقط با یک ضابطه تعریف می کنند، ولی گاهی لازم است که تابع را با چند ضابطه تعریف کرد.

مثال (۱) تابع زیر یک تابع سه ضابطه ای است.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x > 2 \\ -x^2 & -2 < x < 2 \\ 2x + 3 & x \leq -2 \end{cases}$$

با توجه به این تابع جدول زیر را کامل کنید.

x	-۳	۱	۴	۰	-۲	۲
y						

توجه داشته باشید که تابع چند ضابطه ای به طور کلی به صورت زیر است.

$$f(x) = \begin{cases} m(x) & x \in D_m \\ n(x) & x \in D_n \end{cases}$$

که در این صورت دامنه این تابع با اجتماع دامنه های تمام ضابطه های آن برابر است.

$$D_f = D_m \cup D_n$$

توجه کنید که دامنه های ضابطه ها، در تابع چند ضابطه ای بنابر تعریف تابع باید جدا از هم باشند.

$$D_m \cap D_n = \Phi$$

مثال (۲) تابع قدر مطلق یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$D_f = \{x \in R \mid x \geq 0\} \cup \{x \in R \mid x < 0\} = R$$

$$R_f = \{y \in R \mid y \geq 0\} = [0, +\infty)$$

مثال ۳) تابع علامت یک تابع سه ضابطه ای است.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$D_s = \{x \in R \mid x > 0\} \cup \{0\} \cup \{x \in R \mid x < 0\} = R$$

$$R_s = \{1, 0, -1\}$$

تذکره: تابع علامت را می توان به صورت زیر نیز تعریف کرد.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

تمرین ۲۹: نمودار توابع قدرمطلق و علامت را رسم کنید.

تمرین ۳۰: نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x < -1 \end{cases}$$

تمرین ۳۱: هر یک از توابع زیر را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید.

الف) $f(x) = \frac{2x}{|x|}$

ب) $g(x) = 1 + |x - 2|$

حل: الف)

$$x \neq 0 \rightarrow D_f = R - \{0\}$$

$$\begin{cases} \text{If } x > 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow \frac{2x}{|x|} = \frac{2x}{x} = 2 \\ \text{If } x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow \frac{2x}{|x|} = \frac{2x}{-x} = -2 \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} \text{If } x \geq 2 \rightarrow x - 2 \geq 0 \rightarrow |x - 2| = x - 2 \\ \text{If } x < 2 \rightarrow x - 2 < 0 \rightarrow |x - 2| = -(x - 2) \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 + (x - 2) & x \geq 2 \\ 1 - (x - 2) & x < 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \geq 2 \\ 3 - x & x < 2 \end{cases}$$

تمرین ۳۲: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -2x - 3 & x < 0 \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۳۳: در هر مورد تابعی مثال بزنید که

الف : دامنه‌ی آن شامل دو عضو باشد.

ب : برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

ج : دامنه‌ی آن تنها یک عضو داشته باشد.

د : دامنه‌ی آن نامتناهی باشد ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

هـ : دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

۳۴: آیا جدول زیر یک تابع نشان می‌دهد؟ چرا؟

$f:$	x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	y	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲

۳۵: نمایش جبری تابع های زیر را بنویسید.

الف	x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	y	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶

ب	x	-۲	-۱	۰	۱	۴	۶
	y	۱۳	۱۱	۹	۷	۱	-۳

ج	x	۱	۲	۳	۴	۰	-۱
---	-----	---	---	---	---	---	----

y	۲	۴	۸	۱۶	۱	$\frac{1}{2}$
-----	---	---	---	----	---	---------------

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۴	۴	۴	۴	۴	۴

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۲	۳	۴	۵	۶

x	۱	۲	۳	۰	-۵	-۱
y	۱	۲	۳	۰	۵	۱

۳۶: اگر $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$ مطلوب است، تعیین:

الف) $f(0) =$

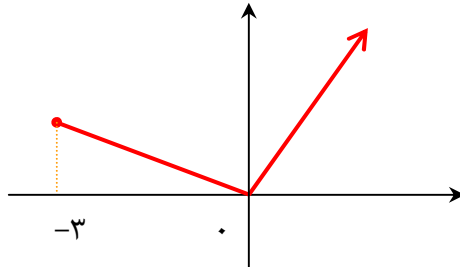
ج) $f(-\sqrt{2}) =$

هـ) $f(1+x) =$

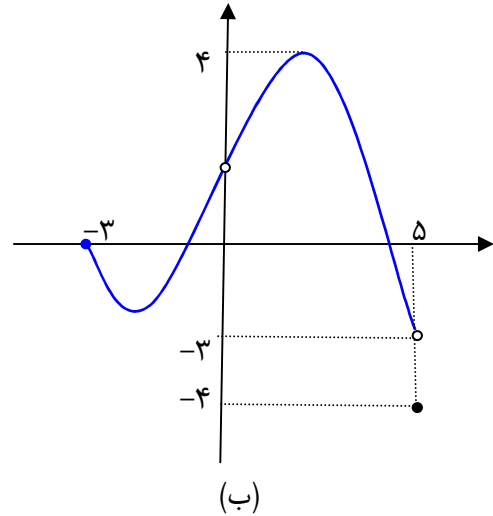
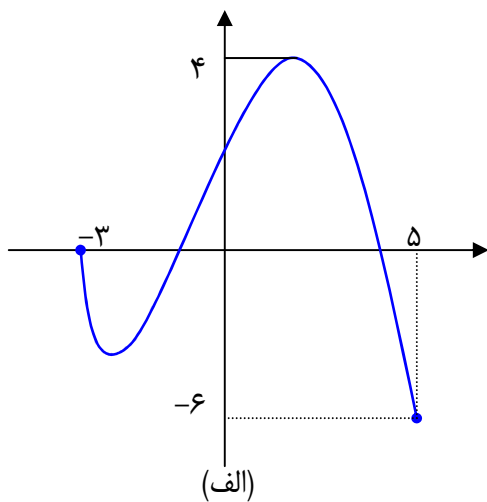
ب) $f(-1) =$

د) $f(k) =$

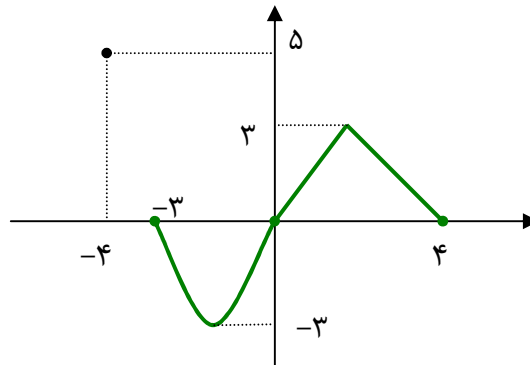
۳۷: دامنه و برد تابع زیر را بنویسید.



۳۸: دامنه و برد تابع های زیر را بنویسید.



۳۹: دامنه و برد تابع زیر را بنویسید. برد تابع شامل چند عدد طبیعی است؟ آنها را بنویسید.



۴۰: دو تابع رسم کنید که دامنه‌ی آنها $(-3, 3)$ و برد آنها $[0, 5]$ باشد.

۴۱: نمودار تابع مقابل را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x - 3 & x < 0 \end{cases}$$

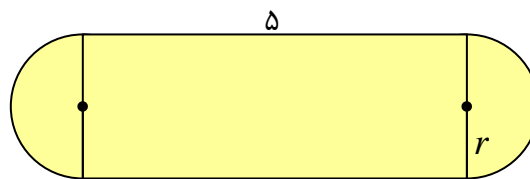
۴۲: یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است، اگر

ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد. حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

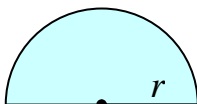
۴۳: طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ی ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل

را بر حسب تابعی از عرض آن بیان کنید.

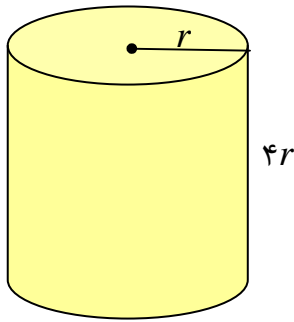
۴۴: با توجه به شکل مقابل تابعی بنویسید که مساحت شکل را بر حسب شعاع بیان کند.



۴۵: تابعی بنویسید که مساحت نیم دایره را بر حسب شعاع آن بیان کند.



۴۶: محیط نیم دایره ی مقابل را به عنوان تابعی بر حسب r بنویسید.



۴۷: با توجه به شکل مقابل تابعی بنویسید که حجم جسم را بر حسب شعاع بیان کند.

۴۸: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x & x > 1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ x & x < -1 \end{cases}$$

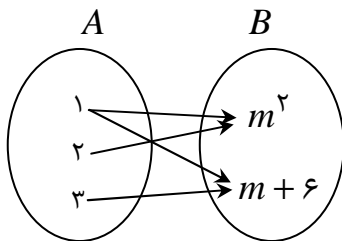
۴۹: کدام یک از موارد زیر یک تابع را نمایش می دهد. چرا؟ نمودار هر یک را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x+2 & x \leq 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

۵۰: معادله ی زیر یک تابع است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x \geq 1 \\ 3x + 5a & x \leq 1 \end{cases}$$

مقدار a را بیابید.



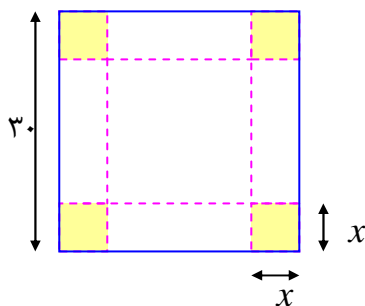
۵۱: مقدار m را طوری تعیین کنید که رابطه ی مقابل یک تابع باشد.

۵۲: از چهار گوشه ی مقوایی مربع شکل به ضلع ۳۰ سانتی متر،

مربع های دیگری به ضلع x سانتی متر جدا می کنیم. سپس لبه

های مقوا را از روی خط چین تا می کنیم تا جعبه ای (بدون در)

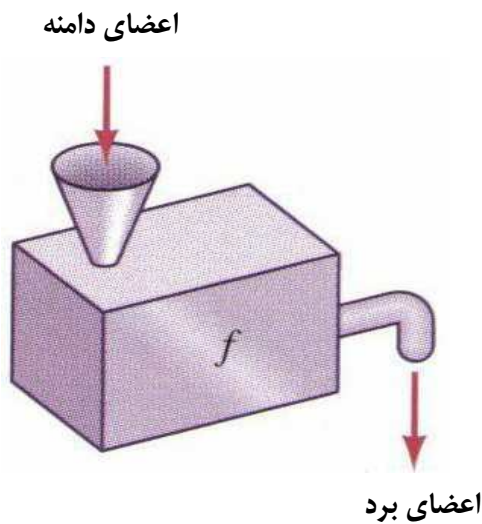
به دست آید. حجم جعبه را به صورت تابعی از x بنویسید.



درس دوم : مفاهیم تکمیلی تابع

در درس قبل با مفهوم تابع آشنا شده اید. در این درس نگاهی دیگر به این مفهوم در ضمن تکمیل بحث های موجود خواهیم داشت.

قسمت اول : دامنه و برد تابع



اگر تابع را به عنوان یک دستگاه در نظر بگیریم ، به طوری که هر ورودی آن دقیقاً دارای یک خروجی باشد، در این صورت ورودی های تابع را دامنه و خروجی های آن را برد تابع می نامند. با توجه به روش های مختلف نمایش تابع ، دامنه و برد را به صورت های متفاوت می توان مشخص کرد.

تمرین ۱ : دستگاه مقابل هر عضو مجموعه-

ی $A = \{۳, ۵, ۶, ۷, ۱\}$ را ابتدا دو برابر و سپس یک واحد از حاصل به دست آمده کم می کند.

مجموعه ی خروجی های این دستگاه عبارت است :

$$B = \{۵, ۹, ۱۱, ۱۳, ۱\}$$

چون این رابطه هر عضو A را فقط به یک عضو از مجموعه ی B نسبت می دهد. پس این رابطه یک تابع است. در این صورت :

الف : معادله ی (ضابطه ی) این تابع را بنویسید.

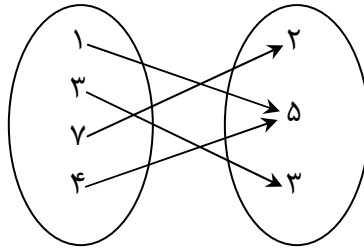
ب : مقدار $f(۷)$ چند است.

در این قسمت دامنه و برد را برای چند تابع متفاوت تعیین می کنیم.

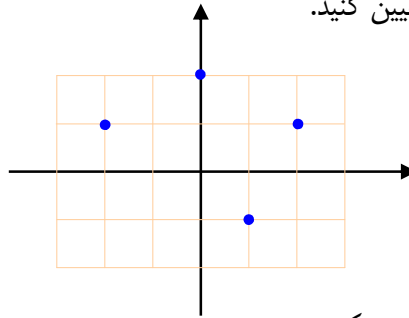
تمرین ۲ : دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.

$$f = \{(۱, ۳), (-۲, ۵), (۳, ۰), (۲, ۵)\}$$

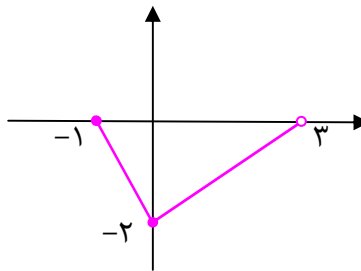
تمرین ۳: دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.



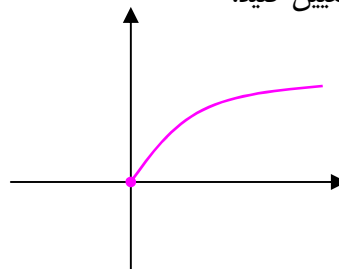
تمرین ۴: دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.



تمرین ۵: دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.



تمرین ۶: دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.



تمرین ۷: دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = -3x^2 + 6x + 1$$

تمرین ۸: دامنه و برد تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = x^2 + 4x$$

تمرین ۹: تابعی بنویسید که دامنه ی آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

تمرین ۱۰: آیا تابعی وجود دارد که دامنه ی آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟

روش های تعیین دامنه ی توابع

بزرگترین مجموعه ای که به ازای تمام اعضای آن یک تابع تعریف شده باشد، را دامنه ی آن تابع می نامند.

بر این اساس موارد زیر را در حالت کلی می توان برای تعیین دامنه ی توابع بیان کرد.

الف) تابع چند جمله ای

دامنه ی هر تابع چند جمله ای ، مجموعه ی تمام اعداد حقیقی است.

مثال : دامنه ی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = 3x^2 + x^5 - 4x + 1$$

حل : این تابع یک تابع چندجمله ای است، لذا دامنه ی آن مجموعه ی اعداد حقیقی است.

$$D_f = R$$

ب) تابع کسری

دامنه ی هر تابع کسری ، مجموعه ی تمام اعداد حقیقی بجز ریشه های مخرج آن است.

لذا برای تعیین دامنه ی تابع کسری کافی است، ابتدا ریشه های مخرج را تعیین و از الگوی زیر استفاده کرد.

$$D_f = R - \{ \text{ریشه های مخرج} \}$$

مثال : دامنه ی تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{3-x}$$

حل : ابتدا ریشه های مخرج کسر (ها) را تعیین می کنیم.

$$x-1=0 \rightarrow x=1 \quad \text{و} \quad 3-x=0 \rightarrow x=3$$

$$D_f = R - \{1, 3\}$$

ج) تابع رادیکالی با فرجه ی زوج (تابع اصم)

دامنه ی هر تابع اصم ، مجموعه ی تمام اعداد حقیقی است که به ازای آنها زیر رادیکال نامنفی باشد.

$$f(x) = \sqrt{u} \rightarrow u \geq 0$$

مثال : دامنه ی تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \sqrt{5x-10}$$

حل : عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد. پس :

$$5x - 10 \geq 0 \rightarrow 5x \geq 10 \rightarrow x \geq 2$$

لذا دامنه‌ی این تابع می شود.

$$D_f = [2, +\infty)$$

د) تابع رادیکالی با فرجه‌ی فرد

دامنه‌ی این چنین توابعی با دامنه‌ی عبارت زیر رادیکال برابر است.

مثال : دامنه‌ی تابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \sqrt[5]{\frac{3x}{x^2 - 4}}$$

حل: کافی است که دامنه‌ی تابع $u = \frac{3x}{x^2 - 4}$

را تعیین کنیم. این تابع، یک تابع کسری است، در این صورت:

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$D_f = R - \{+2, -2\}$$

توجه داشته باشید که قبل از تعیین دامنه‌ی یک تابع ، ساده کردن آن مجاز نمی باشد.

تمرین برای حل : دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

$$۱۱) f(x) = 2 - x^3 + 4x \quad ۱۶) f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \quad ۲۱) f(x) = \frac{5}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$۱۲) f(x) = \frac{1}{3}x - 2x^5 + 1 \quad ۱۷) f(x) = \frac{x}{x^2 + 9} \quad ۲۲) f(x) = \sqrt{\frac{2}{3 - x}}$$

$$۱۳) f(x) = \frac{3x}{2x - 8} \quad ۱۸) f(x) = \frac{3x}{x^3 - 16x} \quad ۲۳) f(x) = \sqrt[4]{\frac{2}{x - 1}}$$

$$۱۴) f(x) = \frac{5x - 1}{x^2 + 3x} \quad ۱۹) f(x) = \sqrt{8 - 2x} \quad ۲۴) f(x) = \sqrt{\frac{-5}{x - 1}}$$

$$۱۵) f(x) = \frac{4x - 1}{x^2 - 9} \quad ۲۰) f(x) = \frac{-7}{\sqrt{2x - 6}} \quad ۲۵) f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 7x - 1}$$

۲۶: دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

ب) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt{3x - 6}}$

۲۷: معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن R باشد.

۲۸: تابعی مثال بزنید که دامنه‌ی آن $R - \{3\}$ باشد.

۲۹: تابعی مثال بزنید که دامنه‌ی آن $[5, +\infty)$ باشد.

قسمت دوم : مقدار تابع در یک نقطه

تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f = \{(2, 5), (0, 3), (4, -1), (-2, 5)\}$$

می‌گویند مقدار تابع در نقطه‌ی $x = 2$ برابر ۵ است و می‌نویسند: $f(2) = 5$

همچنین مقدار تابع در نقطه‌ی $x = 0$ برابر ۳ است، لذا $f(0) = 3$

به طور کلی اگر (a, b) یک زوج مرتب از تابعی باشد. در این صورت مقدار تابع در نقطه‌ی $x = a$ برابر b

$$b = f(a) \text{ است و می‌نویسند.}$$

اگر معادله‌ی تابع معلوم باشد، برای تعیین مقدار تابع در نقطه‌ی $x = a$ از دامنه‌ی آن، کافی است مقدار a را

در معادله‌ی تابع به جای x جایگزین کنیم.

مثال: اگر $f(x) = 3x - x^2 + 4$ مقدار تابع را در نقطه‌ی $x = -1$ بدست آورید.

حل :

$$f(-1) = 3(-1) - (-1)^2 + 4 = -3 - 1 + 4 = 0$$

تمرین برای حل :

۳۰: مقدار تابع $f = \{(1, 7), (0, 4), (2, -9), (3, 7)\}$ را در نقطه‌ی $x = 2$ بدست آورید.

۳۱: مقدار تابع $f(x) = 10x - x^2$ را در نقطه‌ی $x = 3$ بدست آورید.

۳۲: اگر $f(x) = x^2 + 3x$ مقدار تابع را در نقاط داده شده را به دست آورید.

۱) $f(-1) =$ ۳) $f(2) =$ ۵) $f(-2) =$
 ۲) $f(1) =$ ۴) $f(0) =$ ۶) $f(3) =$

۳۳: اگر $f(x) = 1 - 2x + x^2$ یک تابع باشد، تساوی های زیر را بدست آورید.

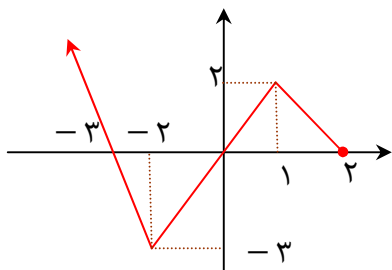
الف) $f(-3)$ ج) $f(5k)$ هـ) $f(1-x)$
 ب) $f(k)$ د) $f(2x)$ و) $f(f(x))$

۳۴: اگر $f(x) = -x^2 + 3x$ و $g(x) = 3x^2 - 3x + 1$ تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $f(-1) =$ ۳) $4f(3) =$ ۵) $2f(0) - g(1) =$
 ۲) $g(2) =$ ۴) $f(-1) + g(4) =$ ۶) $\frac{f(4) + g(2)}{g(0)} =$

۳۵: اگر $f(x) = 2^x$ نشان دهید که: $\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = f(4)$

۳۶: اگر $f(x) = x^3 - 1$ نشان دهید که $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = a^2 + b^2 + ab$



۳۷: با توجه به نمودار مقابل :

الف : مقدار $f(-2)$ را تعیین کنید.

ب : دامنه و برد تابع را بنویسید.

تعیین مقدار تابع در توابع چند ضابطه ای

برای تعیین مقدار تابع وقتی یک تابع چند ضابطه ای داده شده باشد، به محدوده های تعیین شده برای هر

ضابطه توجه شود. برای مثال در تابع دو ضابطه ای

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 2 \\ 3x + 5 & x < 2 \end{cases}$$

اگر بخواهیم مقدار تابع را در نقطه ی $x = 1$ حساب کنیم. با توجه به اینکه عدد «۱» از ۲ کمتر است، ضابطه ی

پایین را بکار می بریم.

$$f(1) = 3(1) + 5 = 8$$

به همین ترتیب برای محاسبه‌ی $f(3)$ از ضابطه‌ی بالا استفاده می‌کنیم.

$$f(3) = (3)^2 - 1 = 8$$

تمرین ۳۸: با توجه به تابع مقابل تساوی‌های زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 2 \\ 3x + 5 & x < 2 \end{cases}$$

$$۱) f(0) = \quad ۲) f(\sqrt{5}) = \quad ۳) f(2) = \quad ۴) f(-5) =$$

تمرین برای حل:

۳۹: تابع زیر را در نظر بگیرید سپس مقادیر داده شده را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x > 1 \\ 5 & -1 \leq x < 1 \\ -x + 4 & x < -1 \end{cases}$$

$$۱) f(3) = \quad ۳) f(\sqrt{5}) = \quad ۵) f(-1) =$$

$$۲) f(1) = \quad ۴) f(0) = \quad ۶) f(-5) =$$

۴۰: در تابع زیر اگر $f(2) = 2$ و $f(-2) = 0$ باشد، مقادیر a و b را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} ax & x > 1 \\ x - 1 & x \leq 1 \\ x + b & \end{cases}$$

۴۱: در تابع زیر مقدار a را چنان بیابید که $f(f(2)) = 5$ باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 7 & x > 1 \\ ax^2 - 4x & x \leq 1 \end{cases}$$

قسمت سوم : تابع خطی و تابع سهمی

الف : تابع خطی

هر تابع که بین مولفه های اول و دوم تمام زوج های مرتب آن یک رابطه ی خطی^۱ یکسانی وجود داشته باشد، را تابع خطی می نامند.

مانند تابع $f = \{(1,3), (2,5), (0,1), (-1,-1)\}$ که در تمام زوج های آن رابطه ی $y = 2x + 1$ برقرار است.

تذکر : هر تابع خطی دارای معادله ای به صورت زیر است.

$$f(x) = ax + b$$

لذا نمودار آن همواره یک خط راست است. (عدد a را شیب و عدد b را عرض از مبدأ می نامند.)

مثال: معادله ی یک تابع خطی را بنویسید که از دو نقطه ی $(2,7)$ و $(5,3)$ می گذرد.

حل : روش اول :

$$(5,3) \in f \rightarrow 3 = 5a + b$$

$$(2,7) \in f \rightarrow 7 = 2a + b$$

$$\begin{cases} 5a + b = 3 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \xrightarrow{(-1) \times} \begin{cases} 5a + b = 3 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5a - b = -3 \\ 2a + b = 7 \end{cases}$$

$$\rightarrow -3a = 4 \rightarrow a = \frac{4}{-3}, b = \frac{29}{3}$$

$$f(x) = ax + b \rightarrow f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3} \quad \text{معادله ی تابع خطی}$$

روش دوم :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 3}{2 - 5} = \frac{4}{-3}$$

$$y = m(x - x_1) + y_1 \rightarrow y = -\frac{4}{3}(x - 5) + 3 \rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} + 3 = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3}$$

تمرین ۴۲: معادله ی یک تابع خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات گذشته و در آن $f(2) = 3$ باشد.

^۱. رابطه ای را خطی می نامند، هرگاه نمودار آن یک خط راست باشد.

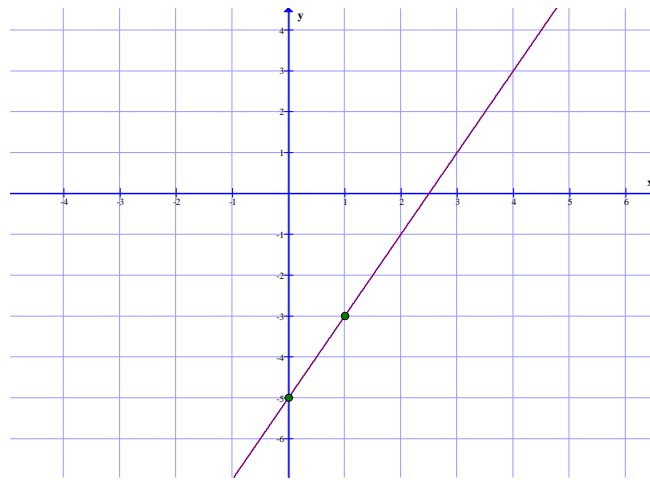
آموزش ریاضی ۱ تهیه کننده : جابر عامری

توجه: چون نمودار هر تابع خطی همواره یک خط راست می باشد، لذا برای رسم نمودار آن، انتخاب دو نقطه کافی است.

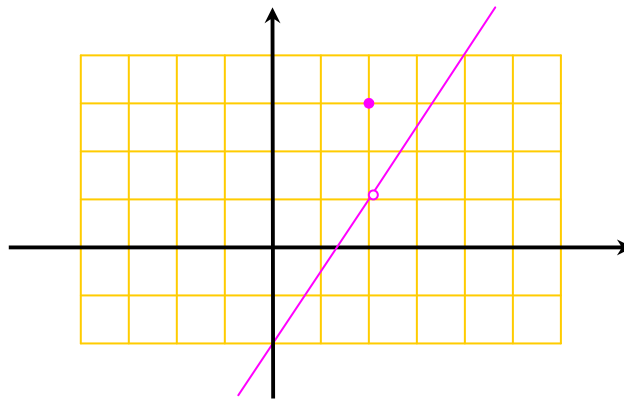
مثال: نمودار تابع $f(x) = 2x - 5$ را رسم کنید.

حل: کافی است دو مقدار دلخواه برای x در نظر بگیریم و بعد از تعیین مقدار y متناظر آنها، نقطه یابی کرده و نمودار را رسم کنیم.

x	۰	۱
y	-۵	-۳



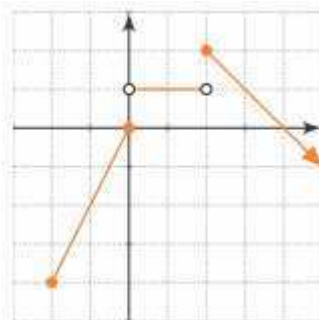
تمرین ۴۳: متناظر با نمودار زیر یک تابع دو ضابطه ای بنویسید.



تمرین ۴۴: با توجه به نمودار زیر:

الف: دامنه و برد تابع را بنویسید.

ب: ضابطه‌ی تابع را به دست آورید.



ب : تابع درجه‌ی دوّم (سهمی)

هر تابع به معادله‌ی کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ که در آن $a \neq 0$ باشد، را درجه‌ی دوّم (سهمی) می‌نامند. در فصل قبل با این تابع و روش رسم نمودار آن آشنا شده‌اید و فقط برای یادآوری به تمرین زیر اکتفا می‌کنیم.

تمرین ۴۵ : نمودار تابع $f(x) = x^2 + 4x - 1$ را رسم کنید و سپس کمترین مقدار آن را به دست آورید.

قسمت چهارم : تعریف دقیق دنباله

با توجه به تعریف تابع می‌توان تعریف دقیق زیر را برای دنباله در نظر گرفت.

هر دنباله، تابعی است که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد طبیعی و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌باشد.

$$N \rightarrow R$$

$$f(n) = t_n$$

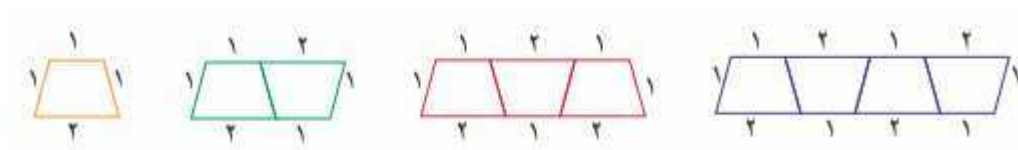
مثال : تابع زیر به شرط n یک عدد طبیعی باشد، یک دنباله است.

$$t_n = 2n + 1$$

تمرین ۴۶ : نمودار تابع خطی $f(x) = 2x + 1$ و دنباله‌ی $t_n = 2n + 1$ را در یک دستگاه مختصات

رسم کنید. سپس در مورد تفاوت آنها بحث کنید.

تمرین ۴۷ : الگوی زیر از تعدادی دوزنقه تشکیل شده است.



با توجه به این الگو ، سؤالات زیر را پاسخ دهید.

الف: جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل						

ب : آیا رابطه‌ی بین تعداد دوزنقه‌ها و محیط شکل یک تابع مشخص می‌کند؟ چرا؟

ج : نمودار این رابطه را رسم کنید.

تمرین برای حل :

۴۸ : برای یک تابع خطی داریم:

$$f(0) = 7 \quad \text{و} \quad f(2) = 11$$

الف : معادله‌ی این تابع را بنویسید. ب : نمودار تابع را رسم کنید.

۴۹ : نمودار یک تابع خطی از نقاط $(-4, 3)$ و $(0, -3)$ می‌گذرد. مطلوب است، تعیین:

$$\text{الف) } f(-1) = \quad \text{ب) } f(-4) = \quad \text{ج) } f(f(2)) =$$

۵۰ : برای اندازه‌گیری دما از واحد‌های سانتی‌گراد (C) و فارنهایت (F) استفاده می‌شود. این دو واحد

اندازه‌گیری رابطه‌ای به شکل زیر دارند.

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

الف : ۲۰ درجه‌ی سانتی‌گراد، بر حسب فارنهایت چقدر است؟

ب : صفر درجه‌ی سانتی‌گراد، معادل چند درجه‌ی فارنهایت است؟

ج : ۱۰۴ درجه‌ی فارنهایت چند درجه‌ی سانتی‌گراد است؟

د : معادله‌ای بنویسید که فارنهایت را به سانتی‌گراد تبدیل کند.

هـ : آیا رابطه‌ی بین این دو واحد اندازه‌گیری، یک تابع خطی است؟ چرا؟

۵۱ : در تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2 + ax + b$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که :

$$f(2) = 15 \quad \text{و} \quad f(0) = 1$$

۵۲ : ضابطه‌ی تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ را طوری به دست آورید که

$$\text{الف : تابع از مبدأ مختصات بگذرد.} \quad \text{ب : } f(1) = 4 \quad \text{ج : } f(-1) = 2$$

۵۳ : نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(1, -2)$ و $(2, -3)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به

عرض ۱ قطع می‌کند.

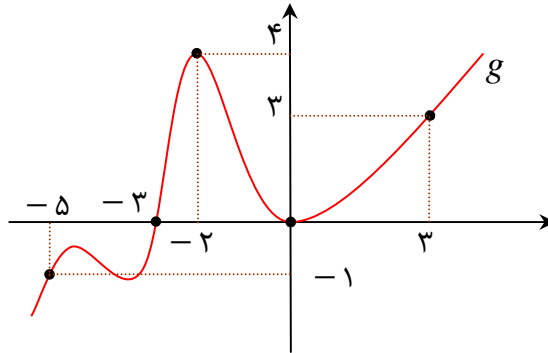
الف : نمایش جبری سهمی (معادله‌ی) آن را بیابید.

ب : نمودار سهمی را رسم کنید.

ج : دامنه و برد سهمی را مشخص کنید.

۶۰: توابع $f(x) = 3x^2 - \sqrt{x}$ و $g = \{(3, -1), (4, 2), (0, 3), (2, -1)\}$ و نمودار تابع h را در نظر

بگیرید و سپس تساوی های زیر را کامل کنید.



الف) $A = \frac{f(4) + g(2)}{h(3)}$

ب) $B = h(-3) + g(0) + 4f(1)$

ج) $f(0) + h(-5) - h(-2)$

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

درس سوم: انواع تابع

انواع متفاوتی از توابع وجود دارد. در این درس با برخی از آنها آشنا می شوید.

معرفی برخی از انواع توابع خاص

در ادامه چند تابع خاص که کاربردی های زیادی دارند، معرفی می کنیم

(۱) توابع چند جمله ای

هر تابع که نمایش جبری آن، چندجمله ای های جبری از یک متغیر باشد، را تابع چندجمله ای می نامیم.

مانند توابع زیر

الف) $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ ب) $g(t) = t^3 + \frac{1}{5}t^2 + \sqrt{2}$ ج) $h(r) = 4\pi r^3$

ولی توابع زیر چندجمله ای نیستند.

الف) $f(x) = \sqrt{x}$ ب) $g(t) = |t|$ ج) $h(\theta) = \sin \theta$

هر تابع خطی، یک تابع چندجمله ای درجه ی اول است.

$f(x) = ax + b$ و $(a \neq 0)$

هر تابع درجه ی دوّم (سه می) یک تابع چندجمله ای درجه ی دوّم است.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ و $(a \neq 0)$

تمرین ۱: یک تابع سه جمله ای درجه ی ۵ بنویسید.

تمرین ۲: کدام یک از توابع زیر چند جمله ای است؟

الف) $f(x) = \sqrt{2}x^3$ ب) $f(x) = \frac{1}{x}$ ج) $f(x) = 3^x$

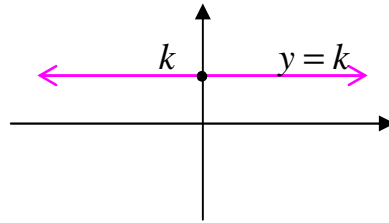
۲) تابع ثابت

هر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = k$ که در آن k یک عدد حقیقی باشد را تابع ثابت می‌نامند.

$$f(x) = 5$$

مانند تابع $f(x) = 5$

در تابع ثابت، هر x عضو دامنه به عدد k نظیر می‌شود. بنابراین برد این تابع همواره مجموعه‌ی یک عضوی $\{k\}$ خواهد بود. همچنین با توجه به این مطلب نتیجه گرفته می‌شود که نمودار تابع ثابت بر خط موازی محور طولها و گذرا از نقطه‌ی k ، روی محور عرض‌ها منطبق است.



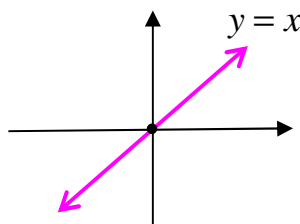
نتیجه: در حالت کلی دامنه‌ی تابع ثابت مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه‌ی یک عضوی $\{k\}$ است.

تمرین ۳: نمودار تابع $f(x) = -2$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را بنویسید.

۳) تابع همانی

هر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x$ را تابع همانی می‌نامند.

در تابع همانی، هر x عضو دامنه به همان x از برد نظیر می‌شود. بنابراین برد این تابع همواره با دامنه‌ی آن برابر است. همچنین با توجه به این مطلب نتیجه گرفته می‌شود که نمودار تابع ثابت بر خط موسوم به نیمساز ربع اول و سوم منطبق است.



نتیجه: در حالت کلی دامنه و برد تابع همانی مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

تمرین ۴: آیا هر تابع که دامنه و برد آن برابر باشند، یک تابع همانی است؟ چرا؟

۴) تابع قدرمطلق

اگر x یک عدد حقیقی باشد، قدر مطلق x را با نماد $|x|$ نمایش می دهند و آن را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

برای مثال :

الف) $|-4| = -(-4) = 4$

ب) $|3/14| = 3/14$

ج) $|-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

همچنین با این تعریف نتیجه می شود که

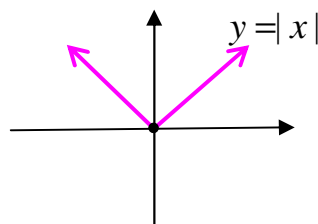
الف) قدر مطلق عدد صفر ، صفر است.

ب) دو عدد قرینه، قدر مطلق مساوی دارند. $|-x| = |x|$

هر تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ را تابع قدر مطلق می نامند. واضح است که دامنه ی تابع قدر مطلق در حالت کلی مجموعه ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه ی اعداد حقیقی غیر منفی است.

$$D_f = R \quad \text{و} \quad R_f = [0, +\infty)$$

بنابراین نمودار تابع قدر مطلق به شکل زیر است.



تمرین ۵: نمودار تابع $f(x) = |x|$ به کمک نقطه یابی رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را بنویسید.

تمرین برای حل:

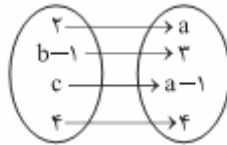
۶: اگر f یک تابع ثابت باشد، به طوری که $f(8) - f(6) + 3f(4) = 18$ در این صورت $f(3)$ را بیابید.

۷: اگر f یک تابع همانی باشد، به طوری که $f(8) - f(2) + af(4) = 18$ در این صورت مقدار a را بیابید.

۸: اگر f یک تابع همانی و g یک تابع ثابت باشد. با توجه به تساوی زیر مقدار $g(9)$ را بیابید.

$$5f(4) + 3g(0) - f(1) = 7$$

۹: تابع زیر همانی است. مقادیر a و b و c را بیابید.



۱۰: تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $|\sqrt{5} - \sqrt{3}| =$ ب) $|\sqrt{5} - \sqrt{7}| =$

۱۱: جدول زیر دمای سنگ های زیر زمین در عمق های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف: معادله ای برای تابع جدول فوق بنویسید.

ب: دمای یک سنگ در عمق ۱۰ کیلومتری را بیابید.

۱۲: تعیین کنید که کدام تابع همانی، کدام تابع ثابت و کدام یک تابع قدرمطلق و کدام سهمی است؟

الف	x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	y	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶

ب	x	-۲	-۱	۰	۱	۴	۶
	y	۲	۱	۰	۱	۴	۶

ج	x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	y	۳	۳	۳	۳	۳	۳

د	x	-۲	-۱	۰	۱	۴	۶
	y	-۲	-۱	۰	۱	۴	۶

۱۳: برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.

الف) مثالی از یک تابع چند جمله ای ارائه کنید.

ب) یک تابع همانی مثال بزنید که دامنه ی آن $\{\alpha, \beta, 2, 5\}$ باشد.

ج) یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند، ولی تابع همانی نباشد.

د) یک تابع ثابت مثال بزنید که دامنه ی آن $\{\alpha, \beta\}$ باشد.

هـ) مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنه ی آن ۵ عضوی باشد.

و) مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

۱۴: درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف) دامنه ی تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(+, +\infty)$ و برد آن نیز $(+, +\infty)$ است.

ب) دامنه ی تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ همه ی اعداد حقیقی و برد آن $(2, +\infty)$ است.

ج) دامنه ی تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر R است.

د) اگر $f(x) = 2x + 1$ آنگاه $f(1) = \frac{f(2)}{2}$

تهیه کننده: جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه استان خوزستان

درس چهارم : تبدیلات

گاهی لازم است نمودار یک تابع را به کمک نمودار تابع دیگری رسم کنیم. برای این کار از ویژگی های تبدیلات از قبیل انتقال یا بازتاب و ... استفاده می شود. در این درس روش های رسم نمودار توابع به کمک ویژگی های تبدیلات را نیز معرفی می کنیم.

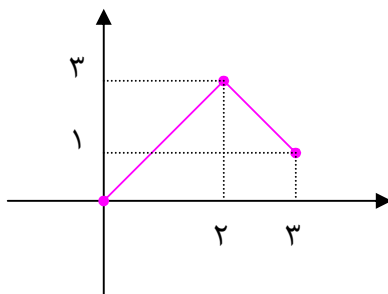
رسم نمودار توابع به کمک تبدیلات

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ که تابع اصلی نیز نامیده می شود، معلوم باشد در این صورت نمودار توابع جدید را به کمک نمودار تابع اصلی می توان رسم کرد. برای انجام این کار می توان از جداول زیر استفاده کرد که برای سادگی کار به دو حالت تبدیل کرده ایم. در این جداول a یک عدد مثبت فرض شده است.

حالت اول :

نتیجه	نحوه ی تبدیل	تابع جدید
نمودار به اندازه ی a واحد بالا می رود.	به عرض نقاط a واحد اضافه می شود.	$y = f(x) + a$
نمودار به اندازه ی a واحد پایین می رود.	از عرض نقاط a واحد کم می شود.	$y = f(x) - a$
اگر $0 < a < 1$ نمودار فشرده می شود. اگر $a > 1$ نمودار کشیده می شود.	عرض نقاط در a ضرب می شود.	$y = af(x)$

توجه : با انتخاب نقاط خاصی از نمودار تابع اصلی و انجام تبدیل روی آنها می توان نمودار تابع جدید را به دست آورد.

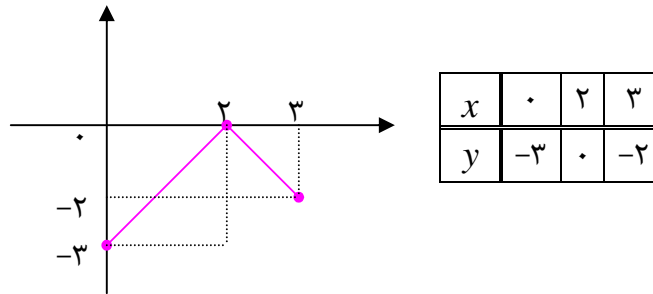


مثال : نمودار تابع f به شکل مقابل داده شده است. می خواهیم، به کمک این نمودار، نمودار تابع $y = f(x) - 3$ را رسم کنیم. برای این کار می توان ویژگی های تبدیلات را به کمک جدول فوق بکار برد.

حل : مختصات نقاط خاصی از این تابع به شکل زیر است.

x	۰	۲	۳
y	۰	۳	۱

اکنون با انجام تبدیل روی این نقاط، نقاط تابع جدید را می‌توان به دست آورد و سپس نمودار آن را نیز رسم نمود. طول نقاط ثابت می‌ماند ولی از عرض هر نقطه سه واحد کم می‌شود.

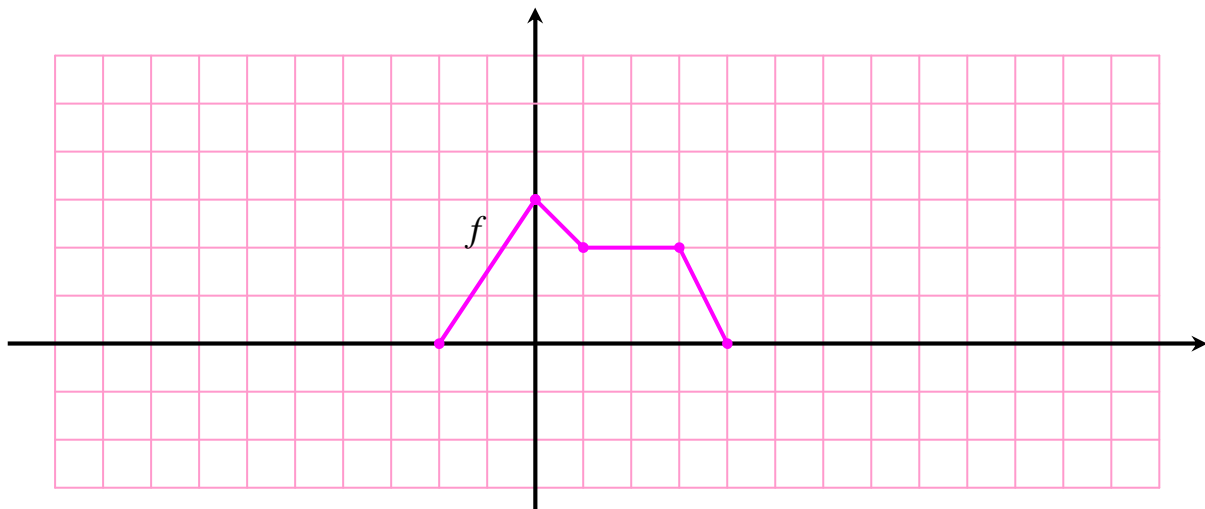


تمرین ۱: در شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ داده شده است. به کمک تبدیلات نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = f(x) + ۱$

ب) $y = f(x) - ۲$

ج) $y = ۲f(x)$

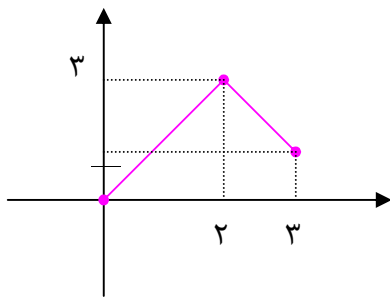


نتیجه: نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور طول‌ها است.

حالت دوم :

نتیجه	نحوه‌ی تبدیل	تابع جدید
نمودار به اندازه‌ی a واحد به عقب می‌رود.	از طول نقاط a واحد کم می‌شود.	عرض نقاط ثابت می‌ماند.
نمودار به اندازه‌ی a واحد به جلو می‌رود.	به طول نقاط a واحد اضافه می‌شود.	
اگر $0 < a < 1$ نمودار منبسط می‌شود. اگر $a > 1$ نمودار منقبض می‌شود.	طول نقاط در $\frac{1}{a}$ ضرب می‌شود.	
		$y = f(x + a)$ $y = f(x - a)$ $y = f(ax)$

توجه : با انتخاب نقاط خاصی از نمودار تابع اصلی و انجام تبدیل روی آنها می‌توان نمودار تابع جدید را به دست آورد.

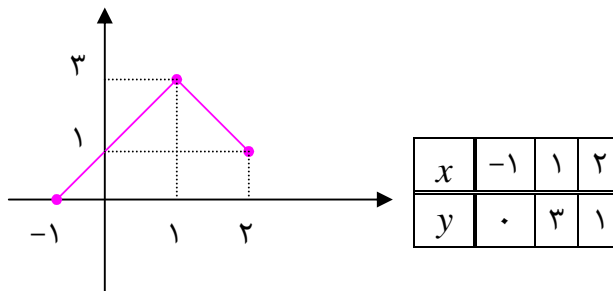


مثال : نمودار تابع f به شکل مقابل داده شده است. می‌خواهیم، به کمک این نمودار، نمودار تابع $y = f(x + 1)$ را رسم کنیم. برای این کار می‌توان ویژگی‌های تبدیلات را به کمک جدول فوق بکار برد.

حل : مختصات نقاط خاصی از این تابع به شکل زیر است.

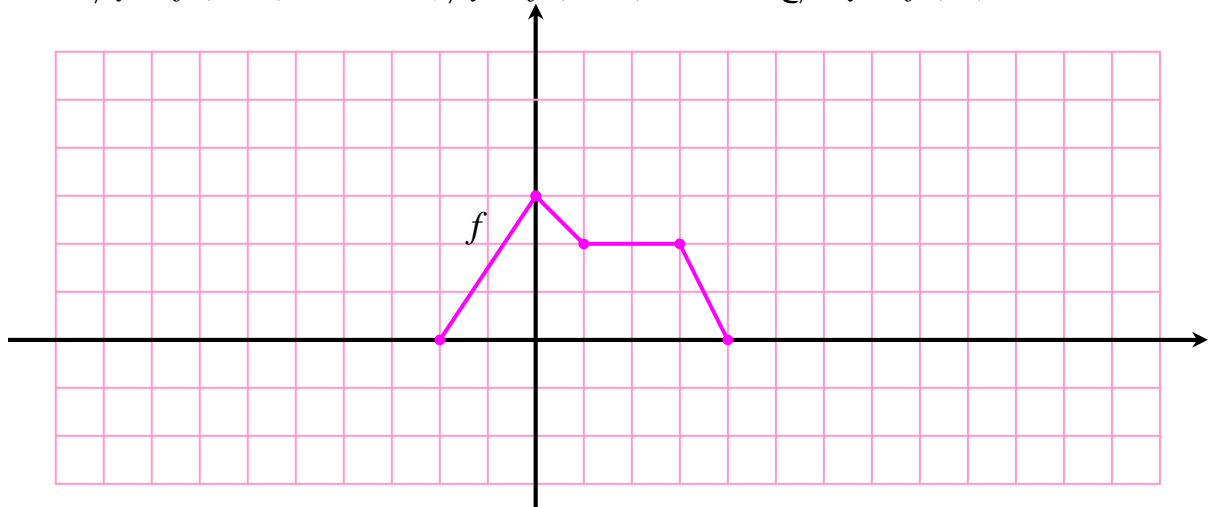
x	۰	۲	۳
y	۰	۳	۱

اکنون با انجام تبدیل روی این نقاط، نقاط تابع جدید را می‌توان به دست آورد و سپس نمودار آن را نیز رسم نمود. عرض نقاط ثابت می‌ماند ولی از طول هر نقطه یک واحد کم می‌شود.

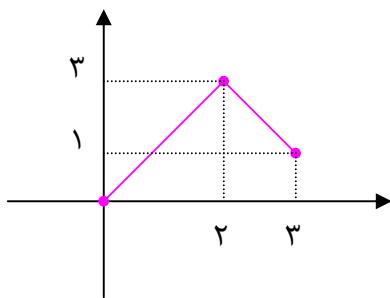


تمرین ۲: در شکل مقابل نمودار تابع $f(x)$ داده شده است. به کمک تبدیلات نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = f(x + 1)$ ب) $y = f(x - 2)$ ج) $y = f(2x)$



نتیجه: نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور عرض ها است.



مثال: نمودار تابع f به شکل مقابل داده شده است. می خواهیم،

به کمک این نمودار، نمودار توابع زیر را رسم کنیم. برای این کار می توان ویژگی های تبدیلات را به کمک جدول فوق بکار برد.

الف) $f(x) - 3$

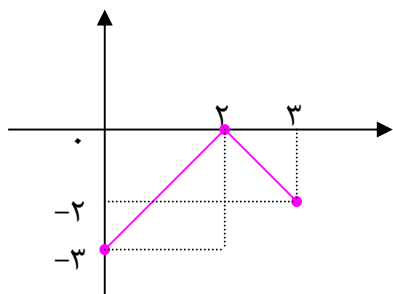
ب) $f(x + 1)$

ج) $2f(x)$

حل: مختصات نقاط خاصی از این تابع به شکل زیر است.

x	۰	۲	۳
y	۰	۳	۱

اکنون با انجام تبدیل روی این نقاط، نقاط تابع جدید را می توان به دست آورد و سپس نمودار آن را نیز رسم نمود.

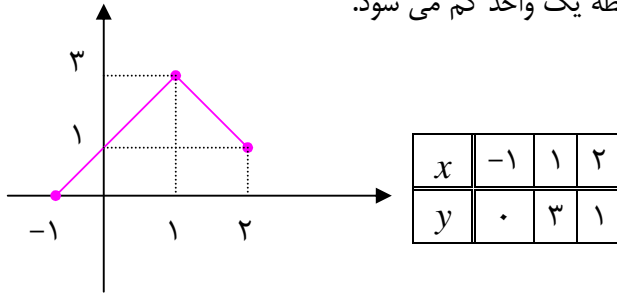


x	۰	۲	۳
y	-۳	۰	-۲

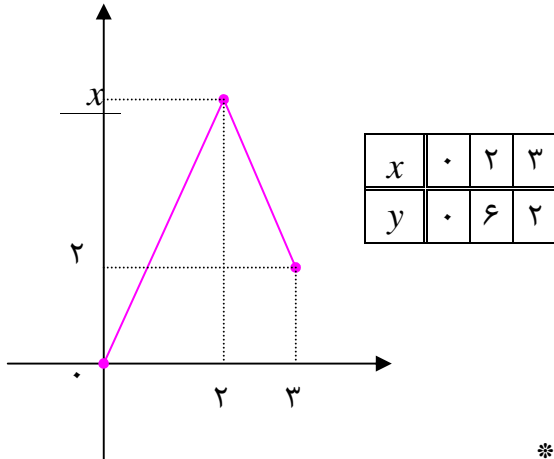
الف: طول نقاط ثابت می ماند ولی از

عرض هر نقطه سه واحد کم می شود.

ب: عرض نقاط ثابت می ماند ولی از طول هر نقطه یک واحد کم می شود.

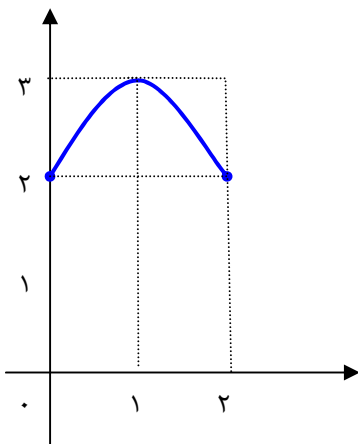
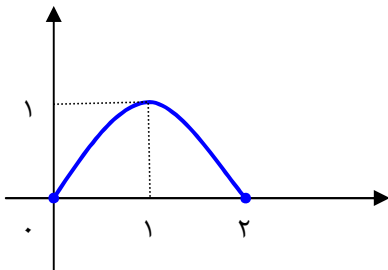


ج: طول نقاط ثابت می ماند ولی عرض نقاط دو برابر می شود.



مثال: نمودار تابع f با دامنه $[0, 2]$ و برد $[0, 1]$ در شکل مقابل نشان داده شده است. می خواهیم نمودار

های تابع زیر را رسم و دامنه و برد هر کدام را پیدا کنیم.



.....
 $f(x) + 2$ (۱)

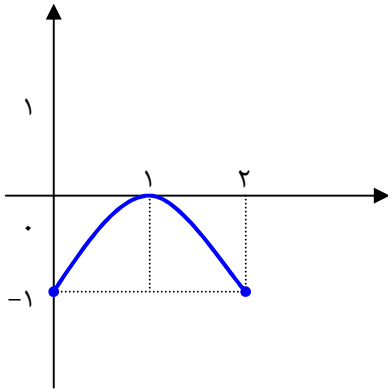
نمودار تابع $f(x)$ دو واحد بالا می رود.

$$D_{f(x)+2} = [0, 2]$$

$$R_{f(x)+2} = [2, 3]$$

$$f(x) - 1 \quad (2)$$

نمودار تابع $f(x)$ یک واحد پایین می رود.

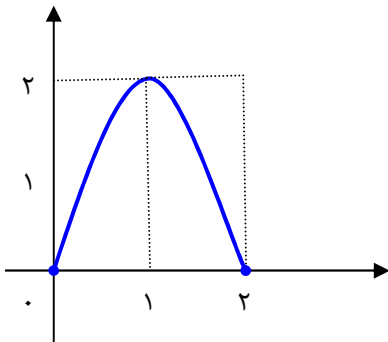


$$D_{f(x)-1} = [0, 2]$$

$$R_{f(x)-1} = [-1, 0]$$

$${}_2f(x) \quad (3)$$

عرض نقاط نمودار تابع $f(x)$ دو برابر می شوند.

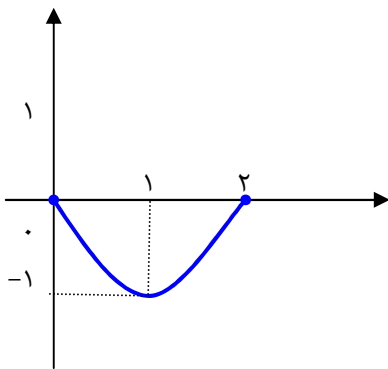


$$D_{{}_2f(x)} = [0, 2]$$

$$R_{{}_2f(x)} = [0, 2]$$

$$-f(x) \quad (4)$$

عرض نقاط نمودار تابع $f(x)$ قرینه می شوند.

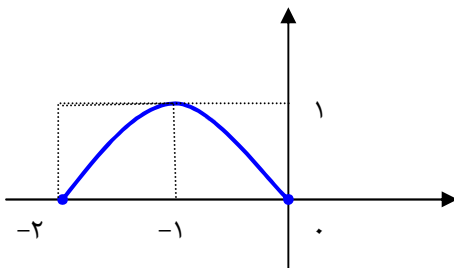


$$D_{-f(x)} = [0, 2]$$

$$R_{-f(x)} = [-1, 0]$$

$$f(x+2) \quad (5)$$

نمودار تابع $f(x)$ دو واحد عقب می رود.

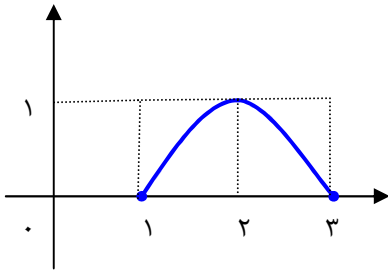


$$D_{f(x+2)} = [-2, 0]$$

$$R_{f(x+2)} = [0, 1]$$

$$0 \leq x+2 \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 0$$

$$f(x-1) \quad (6)$$



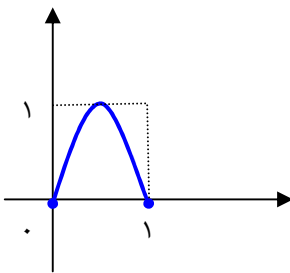
نمودار تابع $f(x)$ یک واحد جلو می رود.

$$D_{f(x-1)} = [1, 3]$$

$$R_{f(x-1)} = [0, 1]$$

$$0 \leq x-1 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

$$f(2x) \quad (7)$$



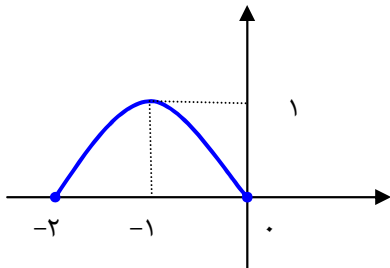
طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ در $\frac{1}{2}$ ضرب می شوند.

$$D_{f(2x)} = [0, 1]$$

$$R_{f(2x)} = [0, 1]$$

$$0 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$f(-x) \quad (8)$$



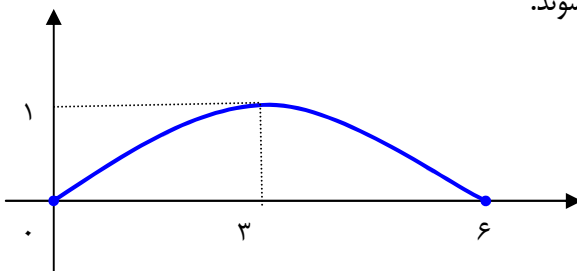
طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ در -1 ضرب می شوند.

$$D_{f(-x)} = [-2, 0]$$

$$R_{f(-x)} = [0, 1]$$

$$0 \leq -x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 0$$

$$f\left(\frac{x}{3}\right) \quad (9)$$

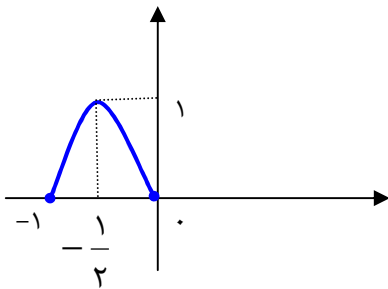


طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ در 3 ضرب می شوند.

$$D_{f\left(\frac{x}{3}\right)} = [0, 6]$$

$$R_{f\left(\frac{x}{3}\right)} = [0, 1]$$

$$f(-2x) \quad (۱۰)$$



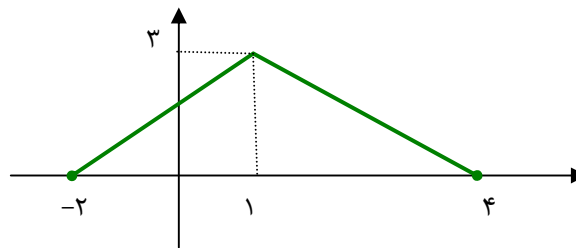
طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ در $-\frac{1}{2}$ ضرب می شوند.

$$D_{f(-2x)} = [-1, 0]$$

$$R_{f(-2x)} = [0, 1]$$

$$0 \leq 2x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$$

تمرین ۱۵: نمودار تابع معین f با دامنه ی $[-2, 4]$ و برد $[0, 3]$ در شکل زیر داده شده است.



در هر مورد نمودار تابع داده شده را رسم نموده و سپس دامنه و برد آن را بنویسید.

$$۱) y = f(x + 2)$$

$$۴) y = f(x) + 1$$

$$۷) y = \frac{1}{3} f(x - 1)$$

$$۲) y = f(x - 3)$$

$$۵) y = -2f(x)$$

$$۸) y = 2f(x) - 1$$

$$۳) y = f(2x)$$

$$۶) y = f\left(-\frac{1}{2}x\right) - 3$$

$$۹) y = f(2x - 1)$$

تمرین برای حل:

۳: به کمک نمودار تابع $y = |x|$ در فاصله ی $-2 \leq x \leq 2$ رسم کنید. سپس به کمک آن نمودار هر

یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } y = |x - 1|$$

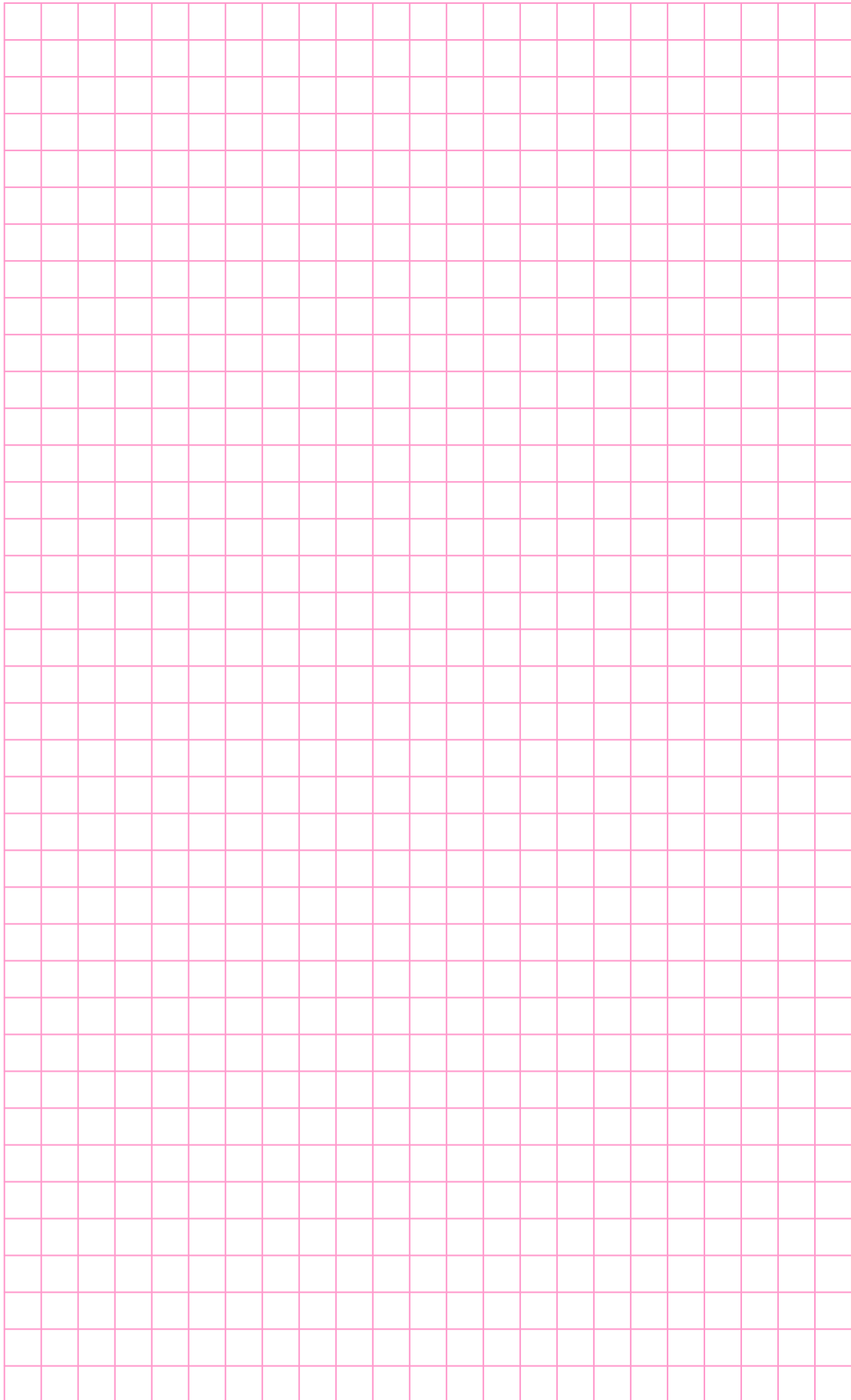
$$\text{ج) } y = |2x|$$

$$\text{هـ) } y = |x| + 2$$

$$\text{ب) } y = |x + 3|$$

$$\text{د) } y = \left|\frac{1}{2}x\right|$$

$$\text{و) } y = -3|x - 1| + 2$$



۴: به کمک نمودار تابع $y = x^2$ نمودار هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = x^2 - 1$

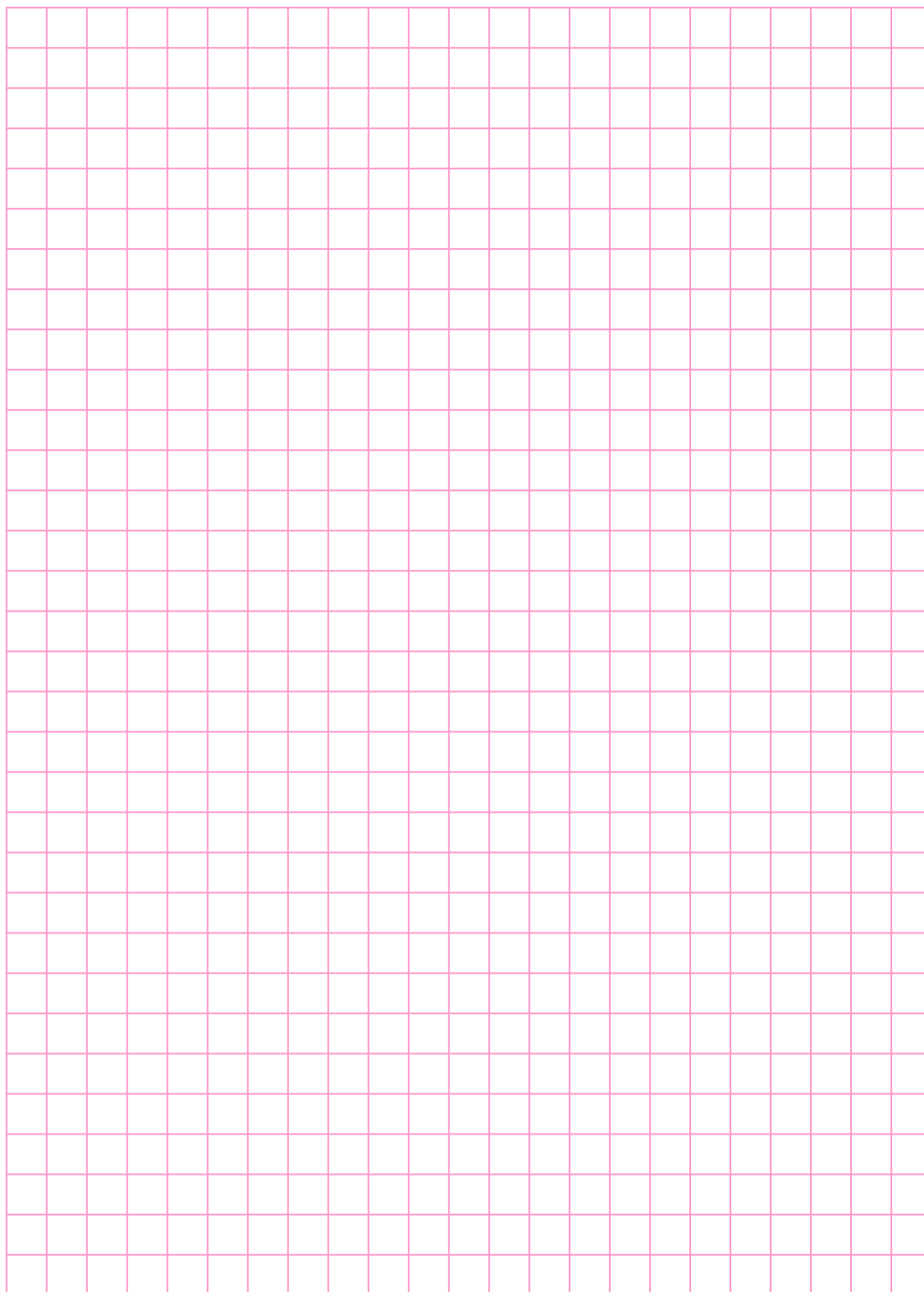
ج) $y = 2x^2$

ه) $y = -x^2$

ب) $y = x^2 + 3$

د) $y = \frac{1}{2}x^2$

و) $y = (x + 3)^2$

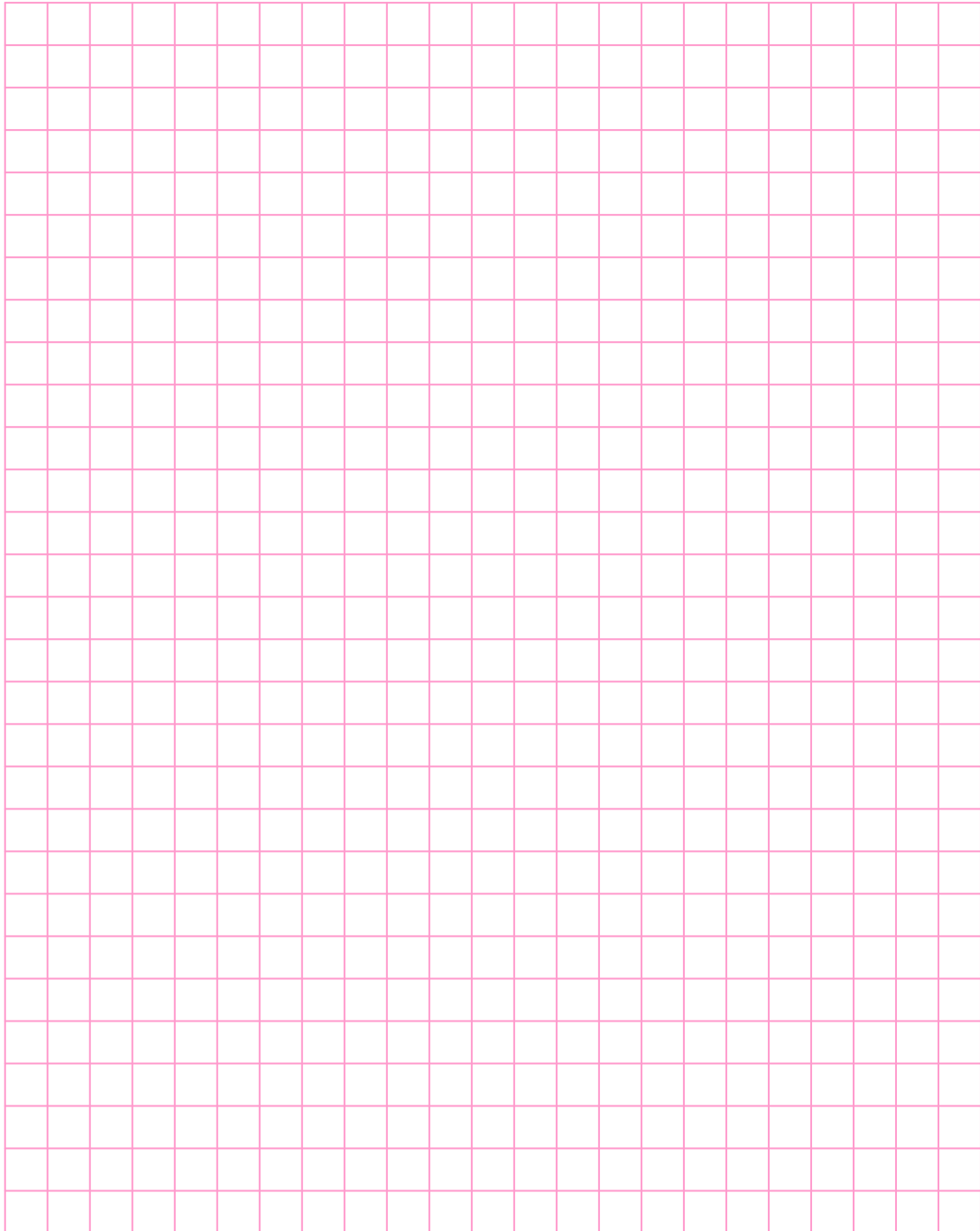


۵: به کمک نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ نمودار هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + \sqrt{x+2}$

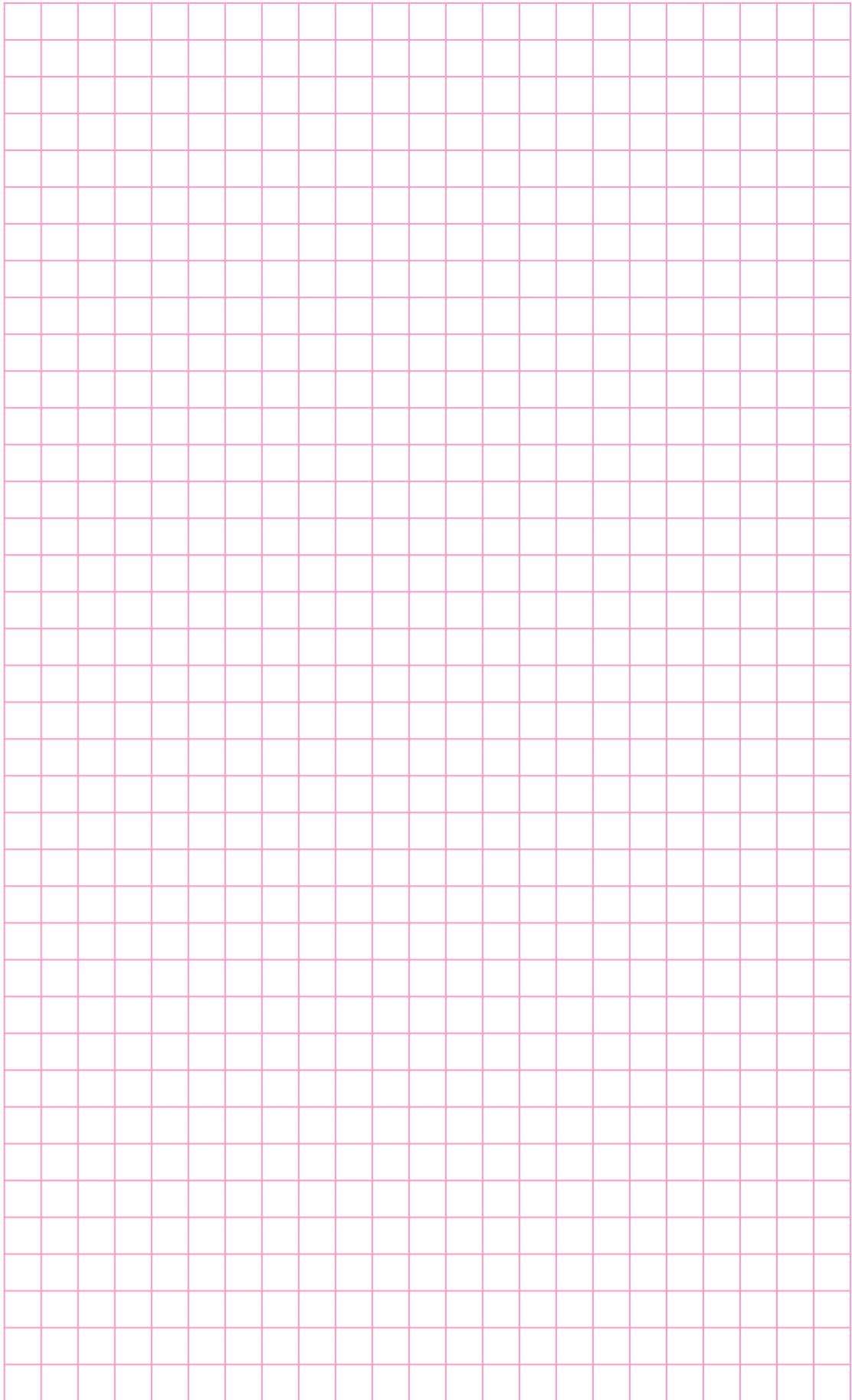
ب) $y = \sqrt{x-3} - 1$

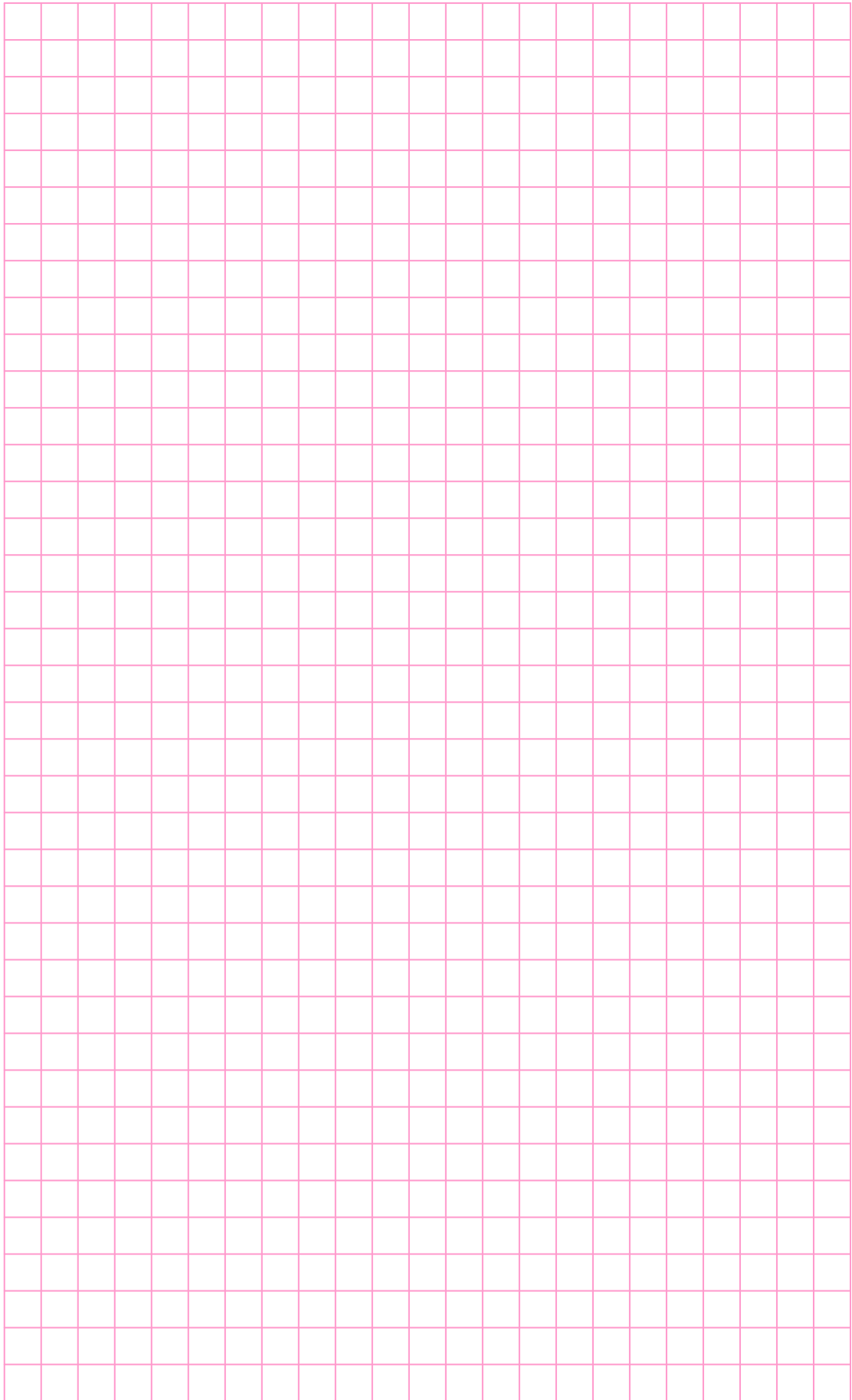
ج) $y = 1 + \sqrt{2x}$



تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir کانال تلگرام : @mathameri

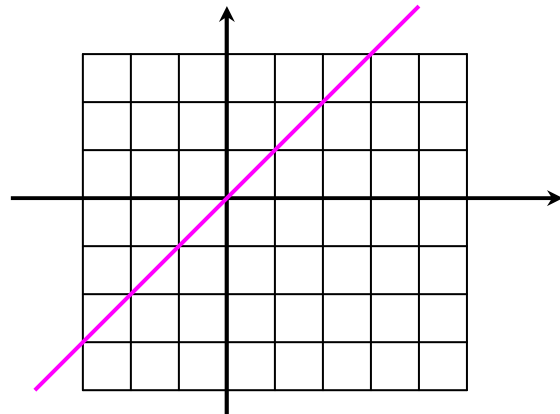




پیوست : نمودار چند تابع مهم

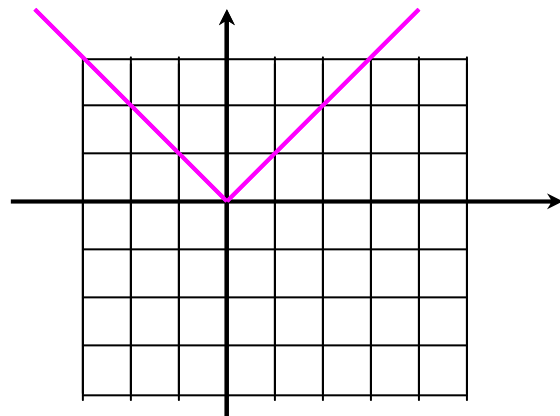
الف) $f(x) = x$

x	0	1
y	0	1



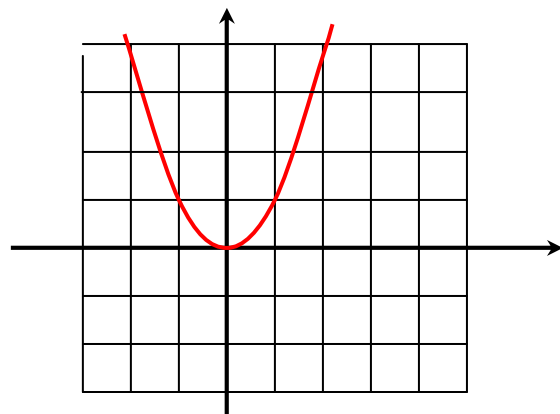
ب) $f(x) = |x|$

x	-1	0	1
y	1	0	1



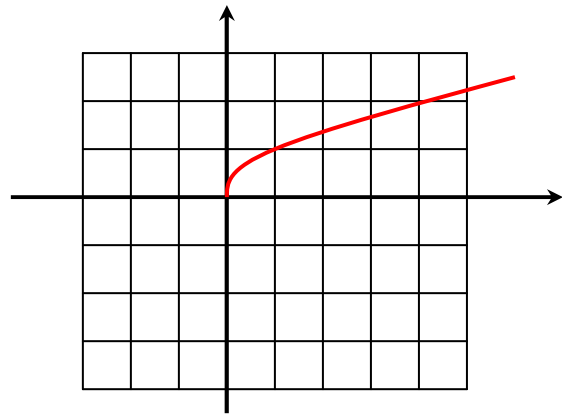
پ) $f(x) = x^2$

x	-1	0	1
y	1	0	1



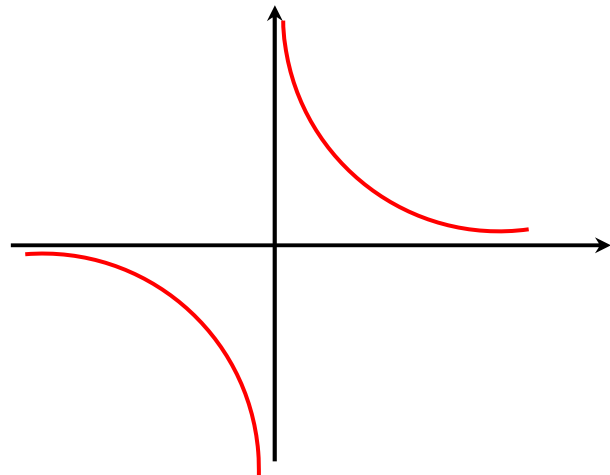
ت) $f(x) = \sqrt{x}$

x	-۱	۰	۱
y	-۱	۰	۱



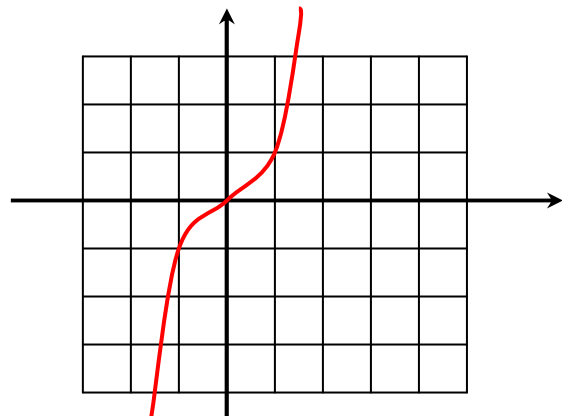
ث) $f(x) = \frac{1}{x}$

x	-۱	۰	۱
y	-۱	۰	۱



ج) $f(x) = x^3$

x	-۱	۰	۱
y	-۱	۰	۱



تهیه کننده: جابرعامری عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان