ریاضی ۳

پایه ی دوازدهم «رشته ی علوم تجربی»

فصل۵ : کاربرد مشتق

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

فروردین ۱۳۹۹

درس اوّل: اکسترمم های یک تابع

در این درس ابتدا یکنوایی تابع را به کمک مشتق بررسی می کنیم و سپس بعد از تعریف نقاط اکسترمم یک تابع، به کمک مشتق تابع، این نقاط را بررسی می نماییم.

تابع صعودی و نزولی

در فصول گذشته با تعریف توابع صعودی و نزولی آشنا شده ایم. بیاد داریم که :

الف : تابع f را روی بازه‌ی I یکنوا گوییم، هرگاه تابع f روی بازه‌ی I یا صعودی و یا نزولی باشد.

ب : تابع f را روی بازه‌ی I اکیداً یکنوا گوییم، هرگاه تابع f روی بازه‌ی I یا اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد.

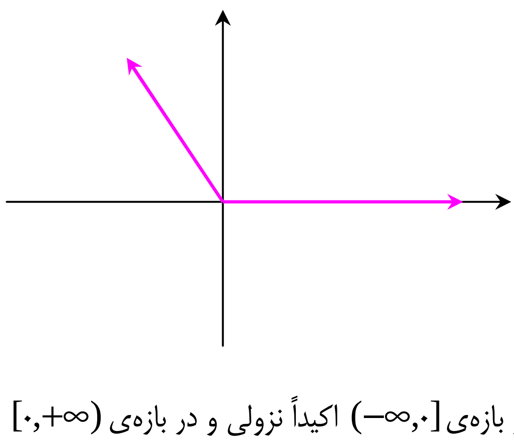
توجه ۱ : طبق تعریف، تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

توجه ۲ : اگر تابع f روی بازه‌ی I اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) باشد، آنگاه روی این بازه صعودی (نزولی) است.

مثال : با رسم نمودار ، یکنوایی تابع $f(x)=|x|-x$ را بررسی کنید.

حل :

$$f(x)=|x|-x=\begin{cases} ۰ & x\geq ۰ \\ -۲x & x<۰ \end{cases}$$



مشاهده می شود که تابع f در بازه‌ی $(-\infty,۰]$ اکیداً نزولی و در بازه‌ی $[۰,+\infty)$ ثابت است. به طور کلی تابع f در $(-\infty,+\infty)$ نزولی است.

کاربرد مشتق در تشخیص یکنوایی توابع

یکی از کاربردهای مهم مشتق تعیین یکنوایی توابع است. به قضیه‌ی زیر توجه کنید.

فرض کنید تابع f بر روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و بر بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر باشد. در این صورت :

الف : اگر به ازای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم $f'(x)>0$ ، آنگاه تابع بر $[a,b]$ اکیداً صعودی است.

ب : اگر به ازای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم $f'(x)<0$ ، آنگاه تابع بر $[a,b]$ اکیداً نزولی است.

ج : اگر به ازای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم $f'(x)=0$ ، آنگاه تابع بر $[a,b]$ ثابت است.

توجه۱ : شرط استفاده از قضیه‌ی فوق آن است که تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و بر بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر باشد.

توجه۲ : برای تعیین یکنوایی یک تابع، از تابع مشتق گرفته و ریشه های مشتق را در صورت وجود به دست می آوریم. سپس تابع مشتق را در قالب یک جدول[1] تعیین علامت می کنیم. در هر فاصله که علامت مشتق ، مثبت بود، منحنی تابع در آن فاصله اکیداً صعودی و در هر فاصله که علامت مشتق منفی بود، منحنی تابع در آن فاصله اکیداً نزولی است.

مثال : جدول تغییرات تابع $f(x)=x^3-3x+1$ را رسم کنید.

حل :

$$f(x)=x^3-3x+1 \to f'(x)=3x^2-3 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2-3=0 \to x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

لذا تابع f در بازه‌ی $[-1,1]$ اکیداً نزولی و در بازه های $(1,+\infty)$ و $(-\infty,-1)$ اکیداً صعودی است.

توجه :

۱ : عکس این قضیه برای توابع یکنوا درست نیست. برای مثال تابع $f(x)=x^3$ صعودی اکید است. امّا مشتق آن در $x=0$ مثبت نیست.

۲ : ممکن است مشتق تابعی صفر شود و آن تابع صعودی یا نزولی(غیر اکید) باشد. مانند تابع $f(x)=[x]$

[1] . این جدول را جدول تغییرات یا جدول رفتار تابع می نامند.

نقاط و مقدار های اکسترمم مطلق (سراسری)

نقطه‌ی $c \in D_f$ را نقطه‌ی مینیمم مطلق (سراسری) تابع f گویند، هرگاه به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. همچنین مقدار $f(c)$ را مقدار **مینیمم مطلق** تابع f می نامند. (به عبارت دیگر نقطه‌ی $(c, f(c))$ نقطه‌ی مینیمم مطلق تابع f است، هرگاه این نقطه از هیچ یک از نقاط واقع بر نمودار تابع f ، بالاتر نباشد.)

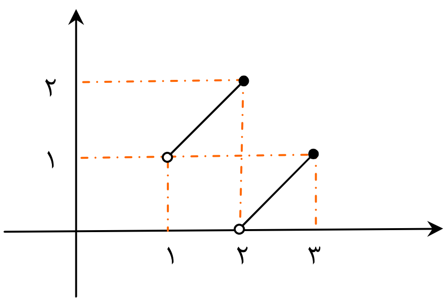
نقطه‌ی $c \in D_f$ را نقطه‌ی ماکزیمم مطلق (سراسری) تابع f گویند، هرگاه به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. همچنین مقدار $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق تابع f می نامند. (به عبارت دیگر نقطه‌ی $(c, f(c))$ نقطه‌ی ماکزیمم مطلق تابع f است، هرگاه این نقطه از هیچ یک از نقاط واقع بر نمودار تابع f ، پایین تر نباشد.)

هر نقطه‌ی مینیمم مطلق یا ماکزیمم مطلق ، نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع نامیده می شود.

مثال ۱ :

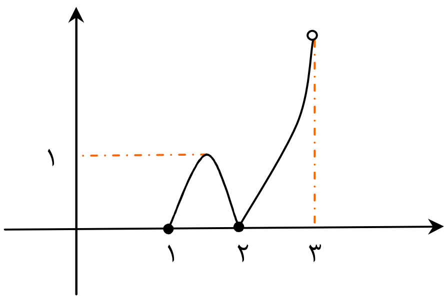
تابع f در بازه‌ی $[۱,۳]$ پیوسته نیست، امّا در $x = ۲$ دارای ماکزیمم مطلق است و $\max(f) = f(۲) = ۲$

امّا تابع در بازه‌ی $[۱,۳]$ مینیمم مطلق ندارد.



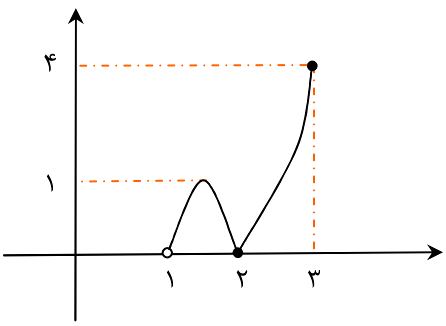
مثال ۲ :

تابع f در بازه‌ی $[۱,۳]$ پیوسته است و در $x = ۱$ و $x = ۲$ دارای مینیمم مطلق است و $\min(f) = f(۱) = f(۲) = ۰$ امّا تابع در بازه‌ی $[۱,۳]$ ماکزیمم مطلق ندارد.



مثال ۳ :

تابع f در بازه‌ی $[۱,۳]$ پیوسته نیست و در $x = ۲$ دارای مینیمم مطلق است که $\min(f) = f(۲) = ۰$ و در $x = ۳$ دارای ماکزیمم مطلق است که $\max(f) = f(۳) = ۴$



توجه :

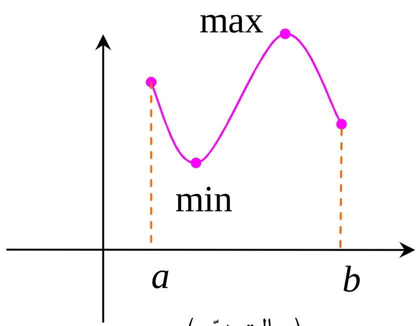
۱ : اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه در این بازه هم مقدار ماکزیمم و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

۲ : فرض کنید که تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد. در این صورت در سه حالت زیر مقادیر اکسترمم مطلق تابع را بررسی می کنیم.

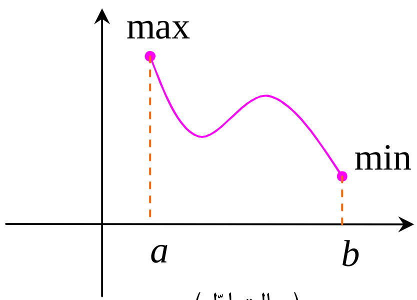
حالت اوّل : وقتی مقادیر اکسترمم مطلق را در نقاط انتهایی بازه داشته باشیم.

حالت دوّم : وقتی مقادیر اکسترمم مطلق را در نقاط درونی[2] بازه داشته باشیم و در آن نقاط مقدار مشتق صفر باشد.

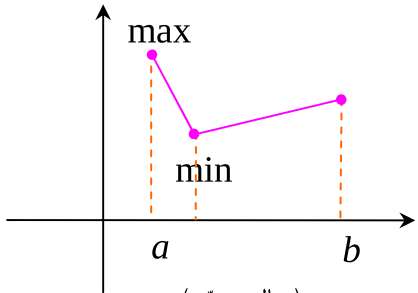
حالت سوّم : وقتی مقادیر اکسترمم مطلق را در نقاط درونی بازه داشته باشیم و در آن نقاط تابع مشتق پذیر نباشد.



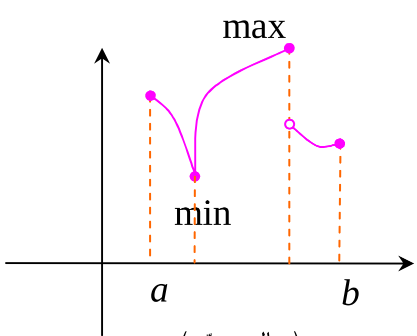
(حالت دوّم)



(حالت اوّل)



(حالت سوّم)



(حالت سوّم)

***

[2] . اگر تابع در بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد. آنگاه تمام نقاط بازه‌ی (a,b) را نقاط درونی و نقاط $x=b$ و $x=a$ را نقاط کناری می نامند. در بازه‌ی $[a,b)$ فقط $x=a$ و در بازه‌ی $(a,b]$ فقط $x=b$ مرزی و سایر نقاط درونی هستند.

نقاط بحرانی تابع

نقطه‌ی $c \in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f می نامیم، هرگاه یا $f'(c)$ موجود نباشد یا $f'(c)=0$

اگر نمودار تابع معلوم می باشد به راحتی نقاطی که تابع در آنها مشتق ناپذیر بوده و یا مشتق تابع در آنها صفر است را تعیین نمود. علاوه بر این برای تعیین نقاط بحرانی یک تابع، می توان مشتق تابع را بدست آورده و ریشه های صورت و مخرج آن را به عنوان نقطه‌ی بحرانی می پذیریم.

مثال : نقاط بحرانی تابع $f(x)=-2x^3+3x^2+1$ را روی بازه‌ی $[-1,1]$ بیابید.

حل : تابع چند جمله ای در تمام نقاط مشتق پذیر است. لذا در اینجا فقط نقاطی را تعیین می کنیم که در آنها مشتق برابر صفر باشد.

$$f(x)=-2x^3+3x^2$$

$$\rightarrow f'(x)=-6x^2+6x \xrightarrow{f'(x)=0} -6x^2+6x=0 \rightarrow x=0 \quad \text{یا} \quad x=1$$

پس نقاط $x=0$ و $x=1$ نقاط بحرانی نمودار تابع می باشند

مثال : نقاط بحرانی تابع $f(x)=-2x^3+3x^2+1$ را روی بازه‌ی $[-1,2]$ بیابید.

حل : تابع چند جمله ای در تمام نقاط مشتق پذیر است. لذا در اینجا فقط نقاطی را تعیین می کنیم که در آنها مشتق برابر صفر باشد.

$$f(x)=-2x^3+3x^2$$

$$\rightarrow f'(x)=-6x^2+6x \xrightarrow{f'(x)=0} -6x^2+6x=0 \rightarrow x=0 \quad \text{یا} \quad x=1 \notin [-1,2]$$

پس فقط نقطه‌ی $x=0$ نقطه‌ی بحرانی نمودار تابع می باشند

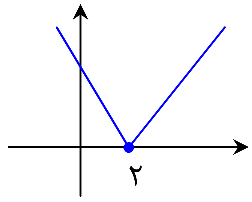
مثال : نقطه یا نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^3-3x$ را به دست آورید.

حل : تابع چند جمله ای در تمام نقاط مشتق پذیر است. دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

$$f'(x)=3x^2-3$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2-3=0 \rightarrow 3x^2=3 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=1\ ,\ x=-1$$

مثال : نقطه یا نقاط بحرانی تابع $f(x)=|x-۲|$ را تعیین کنید.



حل : دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. $D_f=R$

از طرفی این تابع در نقطه‌ی $x=۲$ مشتق پذیر نیست. این نقطه یک نقطه‌ی بحرانی تابع است.

مثال : نقطه یا نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{۴x-x^۲}$ را تعیین کنید.

حل : ابتدا دامنه‌ی تابع را تعیین می کنیم.

$$۴x-x^۲\geq ۰\rightarrow x(۴-x)\geq ۰\rightarrow ۰\leq x\leq ۴$$

$$\rightarrow D_f=[۰,۴]$$

اکنون از تابع مشتق گرفته و ریشه های صورت و مخرج آن را تعیین می کنیم.

$$f'(x)=\frac{۴-۲x}{۲\sqrt{۴x-x^۲}}\xrightarrow{f'(x)=۰}\frac{۴-۲x}{۲\sqrt{۴x-x^۲}}=۰\rightarrow x=۲$$

$x=۲$ ریشه های صورت

$x=۰$ و $x=۴$ ریشه های مخرج

لذا نقطه های $x=۴$ و $x=۰$ و $x=۲$ نقاط بحرانی نمودار تابع می باشند.

توجه : با توجه به این تعریف نتیجه می شود که اگر تابع f بر بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد، چون نقاط $x=b$ و $x=a$، نیز می توانند نقاط بحرانی نمودار تابع باشند.

مثال : نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق تابع $f(x)=۲x^۳+۳x^۲-۱۲x$ را در بازه‌ی $[-۱,۳]$ مشخص کنید.

حل :

$$f(x)=۲x^۳+۳x^۲-۱۲x\rightarrow f'(x)=۶x^۲+۶x-۱۲\xrightarrow{f'(x)=۰}۶x^۲+۶x-۱۲=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۶}x^۲+x-۲=۰\rightarrow x=۱\in[-۱,۳]\ ,\quad x=-۲\notin[-۱,۳]$$

$$f(۱)=۲(۱)^۳+۳(۱)^۲-۱۲(۱)=۲+۳-۱۲=-۷$$

$$f(-۱)=۲(-۱)^۳+۳(-۱)^۲-۱۲(-۱)=-۲+۳+۱۲=۱۳$$

$$f(۳)=۲(۳)^۳+۳(۳)^۲-۱۲(۳)=۵۴+۲۷-۳۶=۴۵$$

نقطه‌ی $(۱,-۷)$ می نیمم مطلق و نقطه‌ی $(۳,۴۵)$ ماکزیمم مطلق است.

تمرین : نقاط بحرانی توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x)=x^{۳}-۳x$

۲) $f(x)=\sqrt{۴x-۷}$

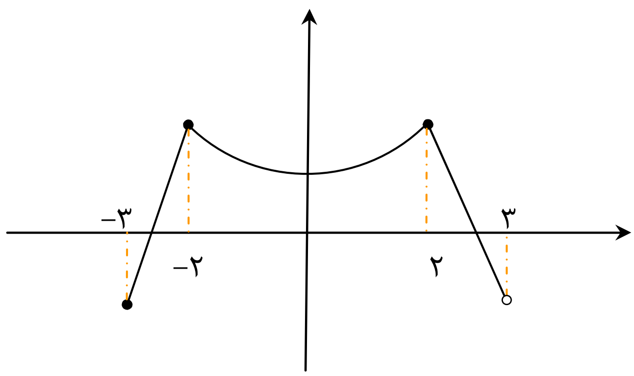
۳) $f(x)=\sqrt{x^{۳}-۴x}$

۴) $f(x)=||x|-۱|$

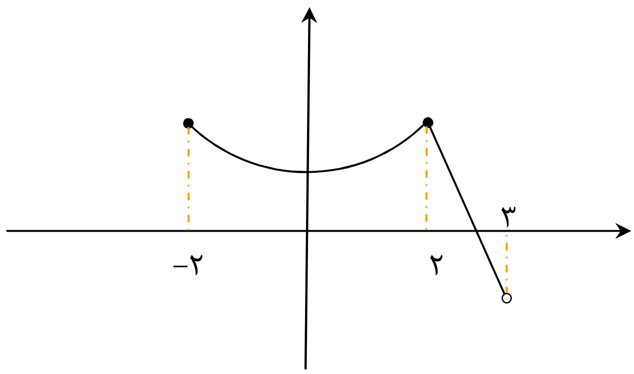
***

تمرین : در هر مورد نقطه یا نقاط بحرانی تابع داده شده را تعیین کنید.

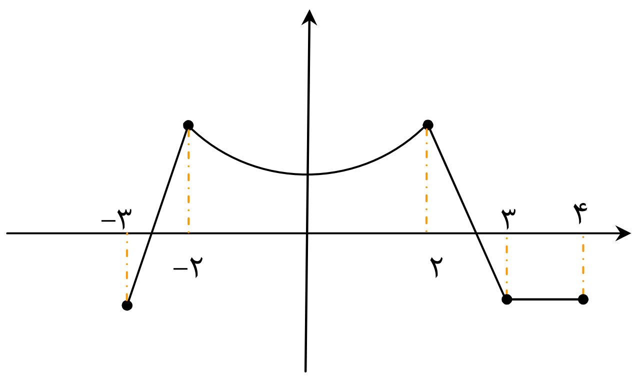
۵)



۶)



۷)



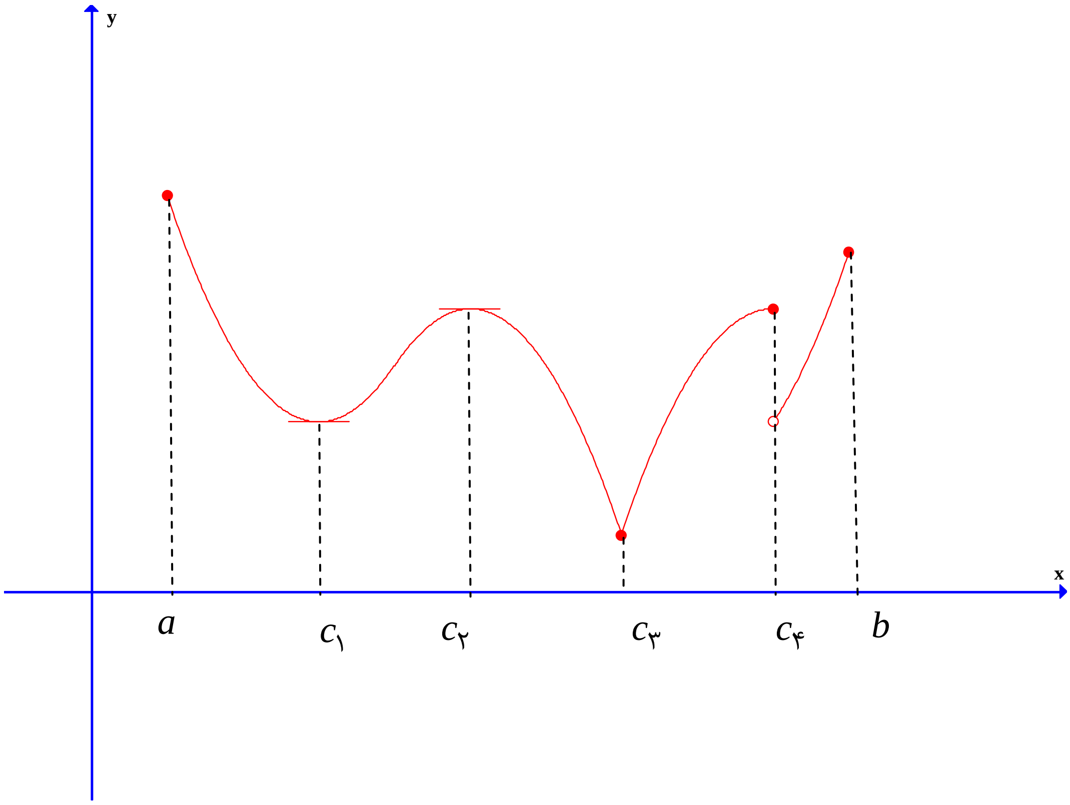
نقاط و مقدار های اکسترمم نسبی (موضعی)

اگر تابع f روی بازه‌ی باز I تعریف شده باشد و نقطه ای مانند $c \in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. آنگاه گوییم تابع f در نقطه‌ی c مینیمم نسبی (موضعی) دارد. c را نقطه‌ی مینیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع می نامند.

اگر تابع f روی بازه‌ی باز I تعریف شده باشد و نقطه ای مانند $c \in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. آنگاه گوییم تابع f در نقطه‌ی c ماکزیمم نسبی (موضعی) دارد. c را نقطه‌ی ماکزیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی تابع می نامند.

توجه : هر نقطه‌ی مینیمم نسبی یا ماکزیمم نسبی، نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع نامیده می شود.

مثال : شکل زیر نمودار تابع f است.



تابع f در نقاط $c_۱$ و $c_۳$ دارای مینیمم نسبی و در نقاط $c_۲$ و $c_۴$ دارای ماکزیمم نسبی است. همچنین با توجه به مثال بالا، نکات زیر قابل توجه می باشند.

۱ : شرط لازم برای آن که c نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f باشد، آن است که تابع f در یک همسایگی

(دو طرفه‌ی) نقطه‌ی c تعریف شده باشد. بنابراین اگر تابع f فقط روی بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده باشد، آنگاه نقاط a و b نمی توانند اکسترمم نسبی f باشند. (خلاصه اینکه نقاط انتهایی بازه‌ی $[a,b]$ ، اکسترمم نسبی نیستند.)

۲ : لزومی ندارد که تابع f در نقاط اکسترمم نسبی خود، پیوسته یا مشتق پذیر باشد. مانند نقاط $c_۴$ و $c_۳$

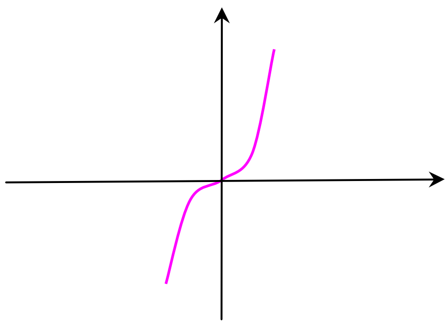
۳ : اگر تابع f در نقطه‌ی c دارای اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=۰$ است. مانند نقاط $c_۲$ و $c_۱$ (یعنی در نقاط اکسترمم نسبی مشتق پذیر هر تابع ، مقدار عدد مشتق برابر با صفر و خط مماس در آن نقطه افقی است.)

۴ : نقطه‌ی اکسترمم نسبی می تواند نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع f نیز باشد. مانند نقطه‌ی $c_۳$ که مینیمم نسبی و مطلق است.

۵ : اگر c نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه‌ی آن باشد و تابع f در یک همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، آن گاه نقطه‌ی c نقطه‌ی اکسترمم نسبی f نیز هست. مانند نقطه‌ی $c_۳$

۶ : هر نقطه‌ی واقع بر یک تابع ثابت یا واقع بر بخشی از یک تابع که ثابت است. هم مینیمم نسبی و هم ماکزیمم نسبی محسوب می شود. (زیرا در هر دو تعریف اکسترمم نسبی صدق می کند.)

۷ : هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی یک نقطه‌ی بحرانی f است.
اما هر نقطه‌ی بحرانی درونی لزوماً اکسترمم نسبی (یا مطلق) نیست. $x=۰$ نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x)=x^۳$ است. اما اکسترمم f (نسبی یا مطلق) نیست.



قضیه‌ی فرما : اگر تابع f در نقطه‌ی c دارای اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد. آنگاه $f'(c)=۰$ است.

نتیجه : هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع ، یک نقطه‌ی بحرانی است.

***

آزمون مشتق اوّل (چگونگی تعیین نقاط اکسترمم نسبی تابع)

فرض کنید c نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد. ($a<c<b$) و تابع f بر بـازه‌ی $I=(a,b)$ پیوسـته و بـر این بازه بجز احتمالاً در c ، مشتق پذیر باشد. در این صورت:

الف : اگر f' روی (a,c) مثبت و روی (c,b) منفی باشد، آنگاه f در c ماکزیمم نسبی دارد.

ب : اگر f' روی (a,c) منفی و روی (c,b) مثبت باشد، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

ج : اگر f' روی (a,c) و (c,b) تغییر علامت ندهد، آنگاه f در c اکسترمم نسبی ندارد.

توجه کنید که f می تواند در $x=c$ مشتق پذیر ($f'(c)=۰$) یا مـشتق ناپـذیر ($f'(c)$ وجـود نـدارد.) باشد. اما حتماً باید در این نقطه پیوستگی دو طرفه داشته باشد. در واقع با آزمون مشتق اول ، اکسترمم هـای نسبی پیوسته‌ی توابع را می توان تعیین نمود.

در این قسمت نیز می توان از جدول تغییرات تابع جهت تعیین علامت مشتق اوّل و تعیین نقاط اکسترمم نیـز کمک گرفت.

مثال : با رسم جدول تغییرات اکسترمم های نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=x^۴+\frac{۴}{۳}x^۳-۴x^۲$$

حل :

$$D_f=R$$

$$f'(x)=۴x^۳+۴x^۲-۸x\xrightarrow{f'(x)=۰}۴x^۳+۴x^۲-۸x=۰$$

$$\to ۴x(x^۲+x-۲)=۰\to ۴x(x+۲)(x-۱)=۰\to x=-۲\,,\,x=۰\,,\,x=۱$$

x	$-\infty$		-۲		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{۳۲}{۳}$	↗	۰	↘	$-\frac{۵}{۳}$	↗	$+\infty$
			min		max		min		

$(-۲,\frac{-۳۲}{۳})$ و $(۱,\frac{-۵}{۳})$ نقاط مینیمم نسبی تابع

$(۰,۰)$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع

مثال : با رسم جدول تغییرات اکسترمم های نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=x^۴-۶x^۲+۸x$$

حل :

$D_f = R$

$f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x + ۸ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۴x^۳ - ۱۲x + ۸ = ۰ \rightarrow ۴(x^۳ - ۳x + ۲) = ۰$

$\rightarrow ۴(x-۱)(x^۲ + x - ۲) = ۰ \rightarrow ۴(x-۱)(x-۱)(x+۲) = ۰ \rightarrow x = -۲ \,,\; x = ۱$ مضاعف

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	۰	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-۲۴	$\nearrow$	۳	$\nearrow$	$+\infty$
			min				

نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع $(-۲,-۲۴)$ و تابع نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع ندارد.

توجه کنید که در این تمرین برای حل معادله‌ی $f'(x) = ۰$ از قانون مجموع ضرایب (که در اینجا صفر است.) کمک گرفتیم. همچنین در نقطه‌ی $x = ۱$ مشتق تغییر علامت نداده است، پس این نقطه اکسترمم نسبی نیست.

نکته :

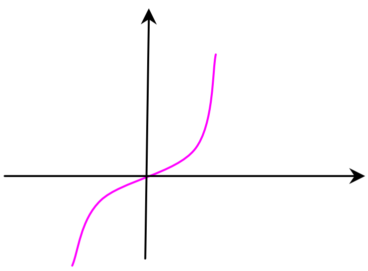
الف : نمودار هر تابع درجه‌ی دوّم به شکل $f(x) = ax^۲ + bx + c$ همواره دارای نقطه‌ی اکسترممی به طول $x = -\dfrac{b}{۲a}$ می باشد.

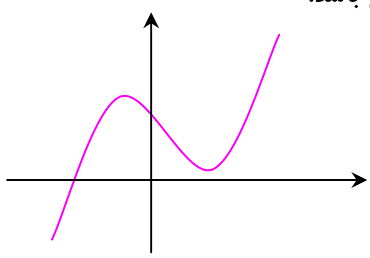
اگر $a > ۰$ آنگاه این نقطه می نیمم مطلق می باشد.

اگر $a < ۰$ آنگاه این نقطه ماکزیمم مطلق می باشد.

ب : نمودار هر تابع درجه‌ی سوّم به شکل $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ یا یک نقطه‌ی ماگزیمم نسبی و یک نقطه‌ی می نیمم نسبی (همزمان) دارد، یا هیچکدام را ندارد.

در صورتی که هر دو نقطه را داشته باشد، نقطه‌ی وسط این دو برابر همواره دارای نقطه ای به طول $x = -\dfrac{b}{۳a}$ می باشد.





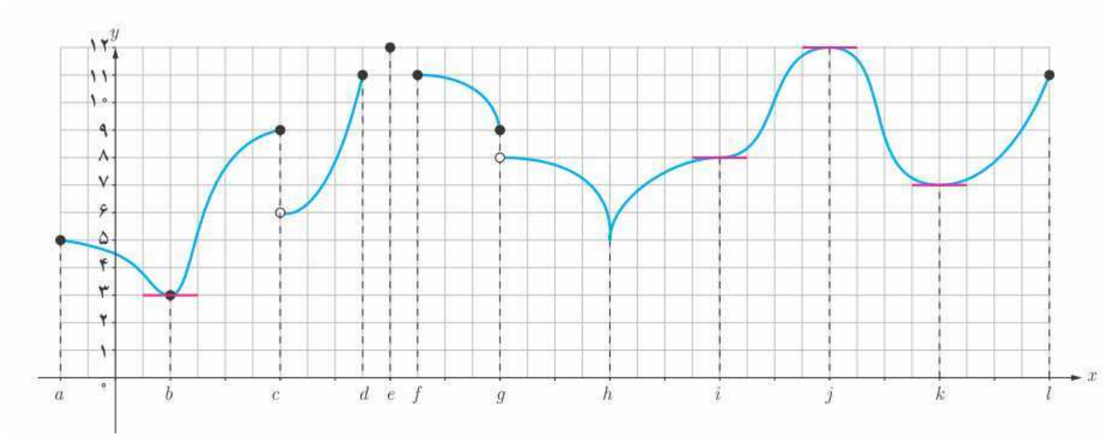
پ : اگر در نقطه ای مانند c مشتق اوّل صفر شود، طوری که در هـر دو طـرف آن نقطـه مـشتق اوّل تغییـر علامت ندهد. آن گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماگزیمم نسبی است.

ت : در توابع پیوستهی مشتق پذیر ریشه های ساده و ریشه های مکرر مرتبهی فرد معادلـهی $f'(x)=0$ ، طول نقاط اکسترمم نسبی تابع f هستند. (زیرا در این نقاط مشتق تغییر علامت می دهد.) امّا ریـشه هـای مکرر مرتبهی زوج ، طول نقاط اکسترمم نسبی تابع نیستند. (زیرا در این نقاط مشتق تغییر علامت نمی دهد.)

ث : برای تعیین علامت مشتق، می توان یک نقطهی دلخواه (غیر از ریشه های آن) را انتخاب و با جایگزین نمودن آن نقطه در مشتق، علامت عدد حاصل را در نظر گرفت.

تمرین برای حل :

۸ : در نمودار زیر نقاطی که تابع در آنها مماس افقی دارد، یعنی تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود دارد و برابر صفر است، مشخص شده اند. با توجه به این نمودار به سئوالات زیر پاسخ دهید.



الف : تمام نقاط اکسترمم نسبی را مشخص کنید.

ب : تمام نقطی که مشتق تابع در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید.

پ : تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید.

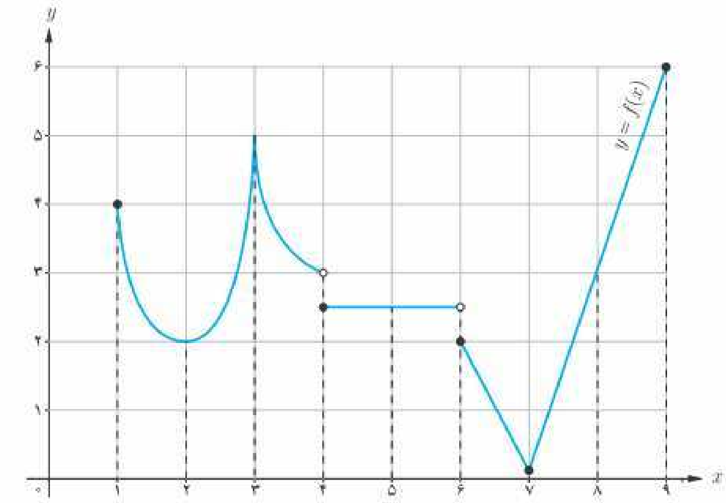
ت : آیا در همه ی نقاط اکسترمم نسبی مشتق وجود دارد؟

ت : در اکسترمم های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چقدر است؟

ج : آیا امکان دارد در نقطه ای مشتق برابر صفر باشد، ولی در آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد؟

چ : آیا امکان دارد در نقطه ای مشتق وجود نداشته باشد، ولی آن نقطه اکسترمم مطلق باشد.

۹ : نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید و سپس جدول داده شده را تکمیل کنید.



طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
max مطلق	×	×			×	×			✓
min مطلق	×	×			×	×			×
max نسبی	×	×			✓	×			×
min نسبی	×	✓			✓	×			×
نقطهٔ بحرانی	✓	✓			✓	✓			✓

۱۰ : درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف : هر تابع پیوسته بر یک بازه‌ی بسته، دارای اکسترمم های مطلق است.

ب : هر تابع پیوسته بر یک بازه‌ی باز، دارای اکسترمم های مطلق است.

پ : اگر $f'(c)$ وجود نداشته باشد، آنگاه $x=c$ نمی تواند اکسترمم نسبی باشد.

ت : اگر $f'(c)=۰$ باشد، آنگاه $x=c$ اکسترمم نسبی است.

ث : اگر $x=c$ طول یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=۰$

۱۱ : نمودار تابعی را رسم کنید که در آن نقاط اکسترمم باشد که مستق تابع در این نقاط موجود باشد.

سپس با توجه به این نمودار جای خالی را در گزاره های زیر کامل کنید.

الف : در نقاط اکسترمم، مشتق خط مماس برابر .... است.

ب : خط مماس بر نمودار تابع در این نقاط موازی محور ...... است.

۱۲ : اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ در بازه‌ی $[-2,2]$ را تعیین کنید.

۱۳ : مقادیر ماگزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $f(x)=|x^2-1|$ روی بازه‌ی $[-2,2]$ را تعیین کنید.

۱۴ : اکسترمم های نسبی و مطلق تابع $f(x)=x^3-2x^2-4x+6$ را در بازه‌ی $[-2,2]$ را به دست آورید و مشخص کنید که این تابع در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است؟

۱۵ : نمودار تابعی را رسم کنید که در فاصله‌ی $(1,5)$ مشتق پذیر باشد و در فاصله‌ی $(1,2)$ صعودی و در فاصله ی $(2,3)$ نزولی و در فاصله‌ی $(3,4)$ صعودی باشد.

۱۶ : نمودار تابعی را رسم کنید که در فاصله‌ی $(1,3)$ نزولی باشد و در فاصله‌ی $(3,4)$ ثابت باشد. طوری که در فاصله ی $(1,4)$ مشتق پذیر نباشد.

۱۷ : نمودار تابعی را رسم کنید که در فاصله‌ی $(1,3)$ نزولی باشد و در فاصله‌ی $(3,4)$ ثابت باشد. طوری که در فاصله‌ی $(1,4)$ مشتق پذیر باشد.

۱۸ : نمودار تابعی را رسم کنید که در بازه‌ی $[1,6]$ همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد.

الف : در فاصله‌ی $(1,6)$ مشتق پذیر باشد.

ب : در فاصله‌ی $(1,2)$ مشتق منفی باشد.

پ : در فاصله‌ی $(2,3)$ مشتق مثبت باشد.

ت : در فاصله‌ی $(3,4)$ مشتق صفر باشد.

ث : در فاصله‌ی $(4,6)$ مشتق منفی باشد.

۱۹ : نمودار تابعی را رسم کنید که همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد.

الف : نقطه‌ی ماکزیمم نسبی داشته باشد و مشتق در آن برابر صفر باشد.

ب : نقطه‌ی می نیمم نسبی داشته باشد و تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد.

پ : نقطه‌ی ماکزیمم مطلق نقطه‌ی بحرانی نباشد.

ت : نقطه‌ی ماکزیمم نسبی داشته باشد و تابع در آن ناپیوسته باشد.

ث: نقطه ای داشته باشد که اکسترمم نسی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.

۲۰ : نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه اش پیوسته باشد ولی ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

۲۱ : برای هر مورد نمودار یک تابع رسم کنید.

الف : تابع f در بازه ای مانند $[a.b]$ صعودی است، امّا صعودی اکید نباشد.

ب : تابع f در بازه ای مانند $[a.b]$ نزولی است، امّا نزولی اکید نباشد.

ج : تابع f در بازه ای مانند $[a.b]$ هم صعودی و هم نزولی است.

۲۲ : برای هر کدام از موارد زیر ، نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف : تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی است، امّا در برخی نقاط آن پیوسته نیست.

ب : تابعی در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن بازه پیوسته است، امّا در برخی نقاط آن بازه مشتق پذیر نیست.

ج : تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق پذیر است، امّا مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.

۲۳ : نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

۲۴ : نمودار هر یک از توابع زیر را در بازه ی داده شده رسم کنید و سپس نقاط اکسترمم نسبی و مطلق و نقاط بحرانی را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $f(x) = ۳x^{۲} - ۲x - ۵ \qquad ; \qquad [-۲,۱]$

ب) $f(x) = x^{۳} - ۳x \qquad ; \qquad [-۱,۲]$

ج) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ۰ \leq x < ۲ \\ ۴ - x & x \geq ۲ \end{cases}$

۲۵ : تعیین کنید که توابع زیر در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی هستند؟

الف) $f(x) = x^{۳} - ۳x + ۱$

ب) $f(x) = -x^{۳} + ۳x$

پ) $f(x) = ۲x^{۳} - ۳x^{۲} - ۱۲x + ۷$

ت) $f(x) = x^{۴}$

ث) $f(x) = \dfrac{x}{x - ۲}$

۲۶ : نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که تمام شرایط زیر را داشته باشد.

$f(۰)=۰$ و $f(۴)=-۲$ و $f(-۱)=۵$

نقطه‌ی $(۱,۱)$ ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس دوّم : چند کاربرد دیگر مشتق

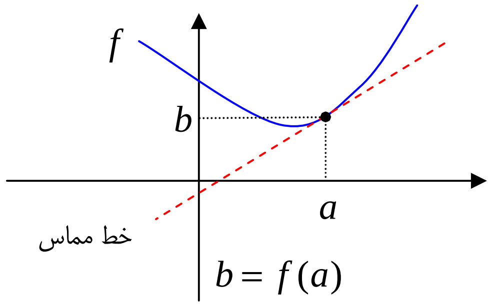
در این درس به بیان روش تعیین معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع ، روش رفع ابهام حدهای مبهم و همچنین روش های حل مسائل پارامتری و مسائل بهینه سازی به کمک مشتق می پردازیم.

الف : معادله‌ی خط مماس بر منحنی

همانطور که قبلاً اشاره شد، شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ واقع بر منحنی را به کمک مشتق می توان تعیین کرد. معادله‌ی خط مماس نیز از فرمول زیر بدست می آید.

شیب خط مماس $m=f'(a)$

معادله‌ی خط مماس $y=m(x-a)+b$



مثال : معادله‌ی خط مماس بر منحنی نمودار تابع $f(x)=۲+۵x+۳x^{۲}$ در نقطه‌ی $x=۰$ را بدست آورید.

حل :

$$x=۰ \xrightarrow{f(x)=۲+۵x+۳x^{۲}} f(۰)=۲+۵(۰)+۲(۰)^{۲}=۲$$

$$f'(x)=۵+۶x \rightarrow m=f'(۰)=۵+۶(۰)=۵$$ شیب خط مماس

$$y=m(x-a)+b \rightarrow y=۵(x-۰)+۲ \rightarrow y=۵x+۲$$ معادله‌ی خط مماس

تمرین برای حل :

۱ : معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^{۲}+۳x$ را در نقطه‌ی $x=۱$ به دست آورید.

۲ : معادله‌ی خط مماسی بر نمودار تابع مشتق تابع $f(x)=۲x^{۳}+۵x$ را در نقطه‌ی $x=-۱$ به دست آورید.

ب : قاعده‌ی هوپیتال

هرگاه g و f توابعی مشتق پذیر در a بوده و $f(a)=g(a)=0$ باشد، دراین صورت واضح است که حد کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ وقتی $x \to a$ به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می آید. برای رفع ابهام این کسر با فرض اینکه $x \neq a$ می توان به شکل زیر عمل کرد.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

یعنی برای محاسبه‌ی حد کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ وقتی که $x \to a$ اگر به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآید،کسری تشکیل می دهیم که صورت آن مشتق صورت کسر داده شده و مخرج آن نیز مشتق مخرج کسر داده شده باشند و سپس حد کسر بدست آمده را محاسبه می کنیم.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

توجه: اگر حد کسر جدید نیز به شکل $\frac{0}{0}$ در آید، عمل مشتق گیری را مجدداً تکرار می کنیم.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$$

حل :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}\underset{Hop}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{2x}{2x+1}=\frac{2(2)}{2(2)+1}=\frac{4}{5}$$

***

تمرین برای حل :

۳ : حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۴x-x^۲}{x^۲-۲x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{۴-\sqrt{۵x+۱}}{x^۲-۹}$

۵ : مقدار a را طوری بیابید که $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^۲-a^۲}{x-a}=۸$ باشد.

۶ : مقدار $\lim\limits_{x\to a} \frac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ کدام است؟

۱) $۲a$ ۲) $۳a$ ۳) $۴a$ ۴) $۶a$

۷ : با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{h}=(m-n)f'(a)$$

***

ج : روش هایی برای حل مسائل پارامتری

گاهی معادله‌ی یک تابع بر حسب یک یا چند پارامتر داده می شود و براساس شرایطی که تعیین می شود، محاسبه‌ی پارامتر ها ، مد نظر است. نکاتی که در این قسمت ارائه می شوند، می توانند در حل مسائل پارامتری کمک نمایند.

۱) هر نقطه‌ی عادی واقع بر منحنی دارای یک خاصیت است و آن این است که مختصاتش در معادله‌ی منحنی صدق می کند. نقطه‌ی عادی نقطه ای است که هیچگونه ویژگی در مورد آن ذکر نشده باشد.

مثال : در تابع $y=(m-۱)x^{۳}+۲mx-۱۳$ مقدار m را طوری بیابید که منحنی این تابع از نقطه‌ی $(۲,۳)$ بگذرد.

حل : نقطه‌ی داده شده ، یک نقطه‌ی عادی است لذا مختصات آن را در معادله‌ی تابع جایگزین می کنیم.

$$(۲,۳)\xrightarrow{y=(m-۱)x^{۳}+۲mx-۱۳}۳=(m-۱)(۲)^{۳}+۲m(۲)-۱۳\rightarrow ۸m-۸+۴m=۱۶$$
$$\rightarrow ۱۲m=۲۴\rightarrow m=۲$$

۲) نقطه‌ی ماگزیمم یا مینیمم دارای دو خاصیت می باشد.

الف) مانند یک نقطه‌ی عادی در تابع صدق می کند.

ب) با فرض وجود مشتق مرتبه‌ی اوّل در نقطه‌ی داده شده ، به ازاء طول این نقطه، مقدار مشتق مرتبه‌ی اوّل، برابر صفر می شود. $(y'=۰)$

مثال : تابع $y=x^{۳}+ax^{۲}+b$ داده شده است. مقدار b و a را طوری پیدا کنید که نقطه‌ی $M(۲,-۴)$ یکی از نقاط ماگزیمم یا مینیمم منحنی باشد.

حل : ابتدا مختصات آن را در معادله‌ی تابع جایگزین می کنیم.

$$(۲,-۴)\xrightarrow{y=x^{۳}+ax^{۲}+b}-۴=(۲)^{۳}+a(۲)^{۲}+b\rightarrow ۴a+b=-۱۲$$

چون این نقطه، ماگزیمم یا مینیمم تابع است. لذا در مشتق مرتبه‌ی اوّل نیز جایگزین می کنیم.

$$(۲,-۴)\xrightarrow{y'=۳x^{۲}+۲ax}۰=۳(۲)^{۲}+۲a(۲)\rightarrow ۱۲+۴a=۰\rightarrow a=-۳$$

در نهایت کمک رابطه‌ی اوّل ، مقدار b را تعیین می کنیم.

$a=-۳ \xrightarrow{۴a+b=-۱۲} ۴(-۳)+b=-۱۲ \rightarrow b=۰$

۳) نقطه‌ی عطف دارای دو خاصیت می باشد. (برای مطالعه)

الف) مانند یک نقطه‌ی عادی در تابع صدق می کند.

ب) با فرض وجود مشتق مرتبه‌ی دوّم در نقطه ی داده شده ، به ازاء طول این نقطه مقدار مشتق مرتبه‌ی دوّم، برابر صفر می شود. ($y''=۰$)

مثال : تابع $y=x^۳+ax^۲+bx+c$ داده شده است. مقدار c و b و a را طوری بیابید که نمودار تابع از مبدأ مختصات بگذرد و $A(۱,۱)$ نقطه‌ی عطف آن باشد.

حل :

$(۰,۰) \xrightarrow{y=x^۳+ax^۲+bx+c} ۰=(۰)^۳+a(۰)^۲+b(۰)+c \rightarrow c=۰$

$(۱,۱) \xrightarrow{y=x^۳+ax^۲+bx+c} ۱=(۱)^۳+a(۱)^۲+b(۱)+c \xrightarrow{c=۰} a+b=۰$

$y=x^۳+ax^۲+bx+c \rightarrow y'=۳x^۲+۲ax+b \rightarrow y''=۶x+۲a$

$(۱,۱) \xrightarrow{y''=۶x+۲a} ۰=۶(۱)+۲a \rightarrow a=-۳$

$a+b=۰ \xrightarrow{a=-۳} -۳+b=۰ \rightarrow b=۳$

۳) نقطه‌ی تماس دارای دو خاصیت می باشد.

الف) مانند یک نقطه‌ی عادی در تابع صدق می کند.

ب) با فرض وجود مشتق مرتبه‌ی اوّل در نقطه‌ی داده شده ، به ازاء طول این نقطه مقدار مشتق مرتبه‌ی اوّل، برابر شیب خط مماس می شود. ($y'=m$)

مثال : تابع $y=ax^۳+bx+۱$ داده شده است. مقدار b و a را طوری بیابید که خط $y=۵x-۳$ در نقطه ای به طول یک بر منحنی تابع فوق مماس شود.

حل :

$x=۱ \xrightarrow{y=۵x-۳} y=۵(۱)-۳=۲ \rightarrow A(۱,۲)$ نقطه‌ی تماس

$$(۱,۲)\xrightarrow{y=ax^{۳}+bx+۱}۲=a(۱)^{۳}+b(۱)+۱\to a+b=۱$$

واضح است که شیب خط مماس برابر ۵ است. این مقدار را نیز از مشتق به دست می آوریم.

$$y'=۳ax^{۲}+b\xrightarrow{x=۱}m=۳a(۱)^{۲}+b\xrightarrow{m=۵}۳a+b=۵$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases}a+b=۱\\ ۳a+b=۵\end{cases}\to a=۲\ ,\ b=-۱$$

تمرین برای حل :

۸ : تابع $y=x^{۳}+ax+b$ داده شده است. مقدار b و a را طوری بیابید که نمودار تابع از نقاط $(۰,-۲)$ و $(۱,۲)$ بگذرد.

۹ : منحنی نمایش تابع $y=\dfrac{x+m}{x+n}$ محور طول ها را در نقطه‌ی A و محور عرض ها را در نقطه‌ی B قطع می کند.اگر معادله‌ی خط AB به صورت $y=x-۱$ باشد. مقدار n و m را بیابید.

۱۰ : تابع $y=ax^{۳}+bx+c$ داده شده است. مقدار c و b و a را طوری بیابید که نمودار تابع از مبدأ مختصات بگذرد و در نقطه ای به طول یک دارای مینیممی برابر ۲- باشد.

۱۱ : تابع درجه‌ی سوّمی بنویسید که $A(۰,۴)$ نقطه‌ی ماگزیمم و $B(۲,۰)$ نقطه‌ی مینیمم آن باشد.

۱۲ : تابع درجه‌ی سوّمی بنویسید که $M(۰,۴)$ نقطه‌ی ماگزیمم و $N(۱,۲)$ مرکز تقارن آن باشد.

توجه : در تابع درجه‌ی سوم مرکز تقارن همان نقطه‌ی عطف می باشد.

۱۳ : ضرایب a و b را در تابع $f(x)=x^{۳}+ax+b$ طوری پیدا کنید که نقطه‌ی $(۱,۲)$، مینیمم نسبی داشته باشد.

۱۴ : مقدار k را طوری بیابید که خط مماس بر منحنی $y=kx^{۲}+۲x+۱$ در نقطه‌ی $x=۱$ موازی محور طول ها باشد.

۱۵ : در هر مورد تابع درجه سوّمی مثال بزنید که نقطه‌ی داده شده، نقطه‌ی عطف آن باشد.

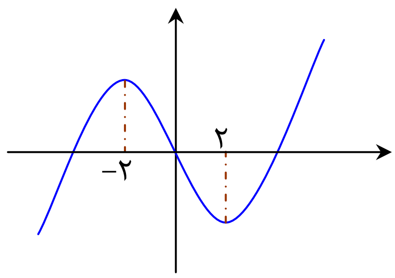
الف : نقطه‌ی $(۰,۰)$ ب : نقطه‌ی $(۱,۰)$ ج : نقطه‌ی $(۰,۱)$ د : نقطه‌ی $(۲,۲)$

۱۶ : مقادیر a و b و c را در تابع $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

الف : $f(۰)=۱$ و $f(۱)=۲$

ب : $x=\frac{۱}{۲}$ طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع f باشد.

۱۷ : اگر مبدأ مختصات نقطه‌ی عطف تابع درجه‌ی سوّمی با ضابطه‌ی $y=x^{۳}+ax^{۲}+bx+c$ باشد که نمودار آن در شکل مقابل داده شده است. مقادیر a و b و c را پیدا کنید.



***

د : حل مسائل بهینه سازی

در صنعت و اقتصاد فهمیدن بیشترین سود، کمترین هزینه ، کمترین سطح ، کمترین فاصله، کمترین زمان و... بسیار مورد توجه قرار می گیرد. هرگاه به دنبال کمترین یا بیشترین مقدار توابع باشیم، می توان از مفهوم مشتق تابع استفاده کنیم. برای حل این قبیل مسائل، ابتدا با توجه به صورت مسئله تابعی یک متغیره تشکیل می دهیم و ریشه های مشتق مرتبه‌ی اوّل آن را تعیین می کنیم و اگر لازم باشد، جدول تغییرات رسم کنید. توجه داشته باشید که فقط ریشه هایی را می پذیریم که شرایط مسئله‌ی را داشته باشند و در دامنه‌ی اعتباری[1] مسئله باشند.

مثال : مجموع دو عدد مثبت برابر ۳۸ است. بیشترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آنها را بیابید.

حل :

$$x+y=۳۸ \rightarrow y=۳۸-x$$

$$P=xy=x(۳۸-x)=۳۸x-x^۲$$

$$P(x)=۳۸x-x^۲ \rightarrow P'(x)=۳۸-۲x \xrightarrow{P'(x)=۰} ۳۸-۲x=۰ \rightarrow x=\frac{۳۸}{۲}=۱۹$$

$$Max(P)=۳۸(۱۹)-(۱۹)^۲=۳۶۱$$

مثال : حاصل ضرب دو عدد مثبت ۶۴ است. کمترین مقدار ممکن برای مجموع آنها را بیابید.

حل :

$$x.y=۶۴ \rightarrow y=\frac{۶۴}{x} \rightarrow S=x+y=x+\frac{۶۴}{x}$$

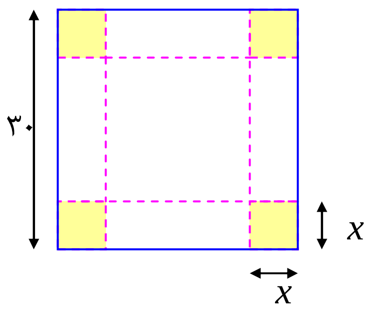
$$S(x)=x+\frac{۶۴}{x} \rightarrow S'(x)=۱+\frac{-۶۴}{x^۲} \xrightarrow{S'(x)=۰} ۱-\frac{۶۴}{x^۲}=۰ \rightarrow x^۲=۶۴ \rightarrow x=\pm۸$$

با توجه به صورت مسئله فقط مقدار $x=۸$ قابل قبول است. پس $y=\frac{۶۴}{۸}=۸$ لذا :

$$Min(S)=x+y=۸+۸=۱۶$$

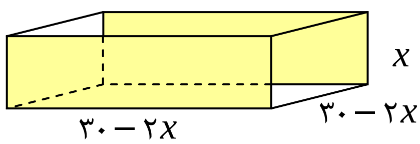
[1] . دامنه‌ی اعتباری، مجموعه‌ی مقادیری است که متغیر در آنها با معنی باشد. برای مثال وقتی گفته می شود که مساحت مربعی به ضلع x برابر $f(x)=x^۲$ می باشد. دامنه‌ی اعتباری این تابع این است که x فقط یک عدد مثبت است.

مثال : ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ سانتی متر را در نظر بگیرید. مطابق شکل می خواهیم از چهارگوشه‌ی آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین های مشخص شده در شکل، یک جعبه‌ی در باز بسازیم. مقدار x را طوری تعیین کنید که حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد.



حل : با توجه به مسئله کافی است که معادله‌ی حجم مکعب تشکیل شده را دهیم.

$v(x)=x(۳۰-۲x)^{۲}$ حجم مکعب



$$\to v(x)=x(۹۰۰-۱۲۰x+۴x^{۲})=۹۰۰x-۱۲۰x^{۲}+۴x^{۳} \quad ; \quad ۰<x<۱۵$$

$$\to v'(x)=۹۰۰-۲۴۰x+۱۲x^{۲}$$

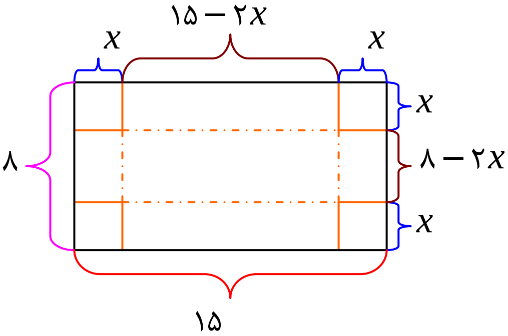
$$\xrightarrow{v'(x)=۰} ۹۰۰-۲۴۰x+۱۲x^{۲}=۰ \xrightarrow{\div ۱۲} ۷۵-۲۰x+x^{۲}=۰$$

$$\to x^{۲}-۲۰x+۷۵=۰ \to (x-۵)(x-۱۵)=۰ \to x=۵ \quad , \quad x=۱۵$$

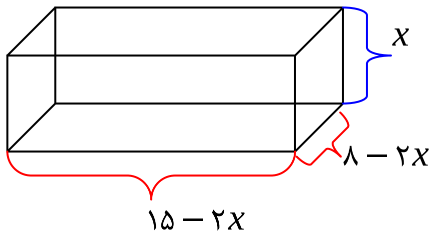
و چون $x=۱۵$ خارج از دامنه‌ی اعتباری تابع است، این جواب قابل قبول نیست. لذا

$$Max(v)=v(۵)=۵(۳۰-۲(۵))^{۲}=۵(۳۰-۱۰)^{۲}=۵(۴۰۰)=۲۰۰۰ \ cm^{۳}$$

مثال : یک سازنده‌ی قوطی مکعبی، برای بردن مربع های همنهشت از چهار گوشه ورق های حلبی را به ابعاد ۸ اینچ و ۱۵ اینچ و بالابردن چهار طرف آن، جعبه های سرباز می سازد. اگر بخواهیم حجم قوطی های ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، طول ضلع مربع هایی که باید بریده شود، چقدر است؟



حل : فرض کنید که طول ضلع مربعی که از گوشه های مستطیل مفروض بریده می شوند برحسب اینچ برابر x باشد.



طول قوطی مورد نظر $=۱۵-۲x \quad ; \quad ۰<x<\frac{۱۵}{۲}$

عرض قوطی مورد نظر $=۸-۲x \quad ; \quad ۰<x<۴$

لذا حجم قوطی ایجاد شده به شکل زیر است.

$$v(x)=x(۱۵-۲x)(۸-۲x)=۴x^۳-۴۶x^۲+۱۲۰x \qquad ; \qquad ۰<x<۴$$

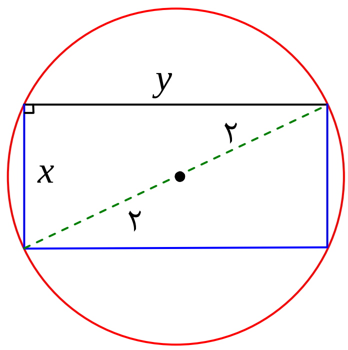
$$v'(x)=۱۲x^۲-۹۲x+۱۲۰ \xrightarrow{v'(x)=۰} ۱۲x^۲-۹۲x+۱۲۰=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴} ۳x^۲-۲۳x+۳۰=۰ \rightarrow (۳x-۵)(x-۶)=۰ \rightarrow x=\frac{۵}{۳} \ , \ x=۶$$

که $x=۶$ خارج از دامنه‌ی اعتباری تابع است و قابل قبول نیست.

مثال: مساحت بزرگترین مستطیلی که درون دایره ای به شعاع ۲ قرار می گیرد، را بیابید.

حل :



$$x^۲+y^۲=(۴)^۲ \rightarrow y=\sqrt{۱۶-x^۲}$$

$$S=x.y \rightarrow S(x)=x\sqrt{۱۶-x^۲}$$

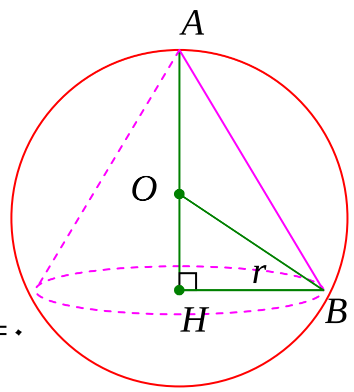
$$S'(x)=\sqrt{۱۶-x^۲}+\frac{-x^۲}{\sqrt{۱۶-x^۲}}=\frac{۱۶-۲x^۲}{\sqrt{۱۶-x^۲}}$$

$$\xrightarrow{S'(x)=۰} ۱۶-۲x^۲=۰ \rightarrow x=\pm\sqrt{۸}$$

با توجه به صورت مسئله واضح است که فقط جواب $x=\sqrt{۸}$ قابل قبول است. لذا $Max(S)=۸$

مثال : حجم بزرگترین مخروط دواری را بیابید که درون کره ای به شعاع ۵ محاط شده باشد.

حل : قرار می دهیم $AO=r$ پس $OH=AH-OA=h-۵$ لذا در مثلث OBH می توان نوشت :



$$OH^2 + BH^2 = OB^2 \rightarrow (h-5)^2 + r^2 = 25$$

$$\rightarrow r^2 = 10h - h^2$$

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow v(h) = \frac{1}{3}\pi(10h - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(10h^2 - h^3)$$

$$\rightarrow v'(h) = \frac{1}{3}\pi(20h - 3h^2) \xrightarrow{v'(h)=0} \frac{1}{3}\pi(20h - 3h^2) = 0$$

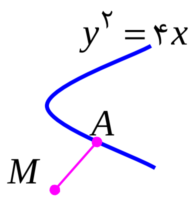
$$\rightarrow h = 0\,(\text{غ}) \;,\; h = \frac{20}{3}$$

$$\rightarrow Max(v) = \frac{1}{3}\pi\left(10\left(\frac{20}{3}\right)^2 - \left(\frac{20}{3}\right)^3\right) = \frac{4000\pi}{81}$$

مثال : مینیمم فاصله‌ی نقطه‌ی $M(4,0)$ از منحنی به معادله‌ی $y^2 = 4x$ را حساب کنید.

حل : فرض کنیم که نقطه‌ی $A(\alpha,\beta)$ نزدیکترین نقطه‌ی منحنی $y^2 = 4x$ از نقطه‌ی $M(4,0)$ باشد.

پس :



$$\beta^2 = 4\alpha$$

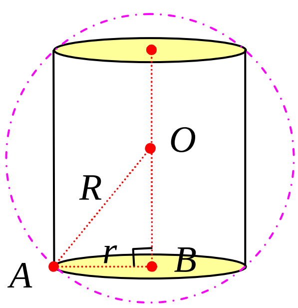
$$d = \sqrt{(\alpha-4)^2 + (\beta-0)^2} = \sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 16 + \beta^2}$$

$$\rightarrow d(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 16 + 4\alpha} = \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 16}$$

$$d'(\alpha) = \frac{2\alpha - 4}{2\sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 16}} = \frac{\alpha - 2}{\sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 16}} \rightarrow \xrightarrow{d'(\alpha)=0} \alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha = 2$$

$$\rightarrow Min(d) = \sqrt{(2)^2 - 4(2) + 16} = \sqrt{12}$$

مثال : در کره ای به شعاع R یک استوانه محاط کرده ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



حل : فرض کنیم که استوانه‌ی مورد نظر دارای شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h باشد. اگر O مرکز کره باشد، در مثلث قائم الزاویه‌ی OAB می توان نوشت:

$$OB = \frac{h}{2}$$

$$AB^{۲}+OB^{۲}=OA^{۲}\rightarrow r^{۲}+(\frac{h}{۲})^{۲}=R^{۲}\rightarrow r^{۲}=R^{۲}-\frac{h^{۲}}{۴}$$

لذا حجم استوانه‌ی ایجاد شده به شکل زیر است.

$$v(x)=\pi r^{۲}h$$

$$\rightarrow v(x)=\pi(R^{۲}-\frac{h^{۲}}{۴})h=\pi R^{۲}h-\frac{\pi}{۴}h^{۳}\quad ;\quad ۰<h<۲R$$

$$\rightarrow v'(x)=\pi R^{۲}-\frac{۳\pi}{۴}h^{۲}\xrightarrow{v'(x)=۰}\pi R^{۲}-\frac{۳\pi}{۴}h^{۲}=۰\rightarrow \pi R^{۲}=\frac{۳\pi}{۴}h^{۲}$$

$$\rightarrow \frac{۴}{۳}R^{۲}=h^{۲}\rightarrow h=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}R$$

$$r^{۲}=R^{۲}-\frac{۱}{۴}h^{۲}=R^{۲}-\frac{۱}{۴}(\frac{۴}{۳}R^{۲})=R^{۲}-\frac{۱}{۳}R^{۲}=\frac{۲}{۳}R^{۲}\rightarrow r=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}R$$

مثال : می خواهیم یک قوطی فلزی استوانه ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد.

ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

حل : باید مساحت کل استوانه کمترین مقدار ممکن گردد.

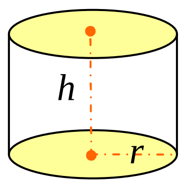
چون قرار است حجم استوانه یک لیتر باشد. پس :

$$v=\pi r^{۲}h\xrightarrow{v=۱۰۰۰\ cm^{۳}}\pi r^{۲}h=۱۰۰۰\rightarrow h=\frac{۱۰۰۰}{\pi r^{۲}}$$

از طرفی مساحت کل استوانه برابر مجموع ، مساحت قاعده و سطح جانبی آن است. لذا:

$$S(r)=\pi r^{۲}+۲\pi rh\rightarrow S(r)=\pi r^{۲}+۲\pi r(\frac{۱۰۰۰}{\pi r^{۲}})=S(r)=\pi r^{۲}+\frac{۲۰۰۰}{r}$$

$$\rightarrow S'(r)=۲\pi r+\frac{-۲۰۰۰}{r^{۲}}=\frac{۲\pi r^{۳}-۲۰۰۰}{r^{۲}}\xrightarrow{S'(r)}\frac{۲\pi r^{۳}-۲۰۰۰}{r^{۲}}=۰$$

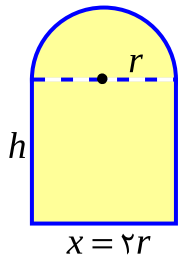


$$\rightarrow ۲\pi r^{۳}-۲۰۰۰=۰\rightarrow r^{۳}=\frac{۱۰۰۰}{\pi}\rightarrow r=۱۰\sqrt[۳]{\frac{۱}{\pi}}$$

$$\xrightarrow{S(r)=\pi r^{۲}+\frac{۲۰۰۰}{r}}S(۱۰\sqrt[۳]{\frac{۱}{\pi}})=\pi(۱۰\sqrt[۳]{\frac{۱}{\pi}})^{۲}+۲۰۰\sqrt[۳]{\pi}$$

مثال : در برخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم دایره ای بر روی آن می باشد. به طوری که قطر نیم دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره ای ۴/۵ متر باشد. ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

حل : کافی است بیشترین مساحت پنجره را بدست آوریم. این مساحت برابر مجموع مساحت های نیم دایره و مستطیل است.



محیط پنجره $p = x + ۲h + \frac{۱}{۲}(۲\pi r) = ۲r + ۲h + \pi r$

$\xrightarrow{p=۴/۵} ۲r + ۲h + \pi r = \frac{۹}{۲} \rightarrow h = \frac{۹}{۴} - r - \frac{۱}{۲}\pi r$

مساحت پنجره $S = xh + \frac{۱}{۲}\pi r^۲$

$\rightarrow S(r) = (۲r)(\frac{۹}{۴} - r - \frac{۱}{۲}\pi r) + \frac{۱}{۲}\pi r^۲ \rightarrow S(r) = \frac{۹}{۲}r - ۲r^۲ - \pi r^۲ + \frac{۱}{۲}\pi r^۲$

$\rightarrow S(r) = \frac{۹}{۲}r - (\frac{۴+\pi}{۲})r^۲$

$\rightarrow S'(r) = \frac{۹}{۲} - ۲(\frac{۴+\pi}{۲})r = \frac{۹}{۲} - (۴+\pi)r \xrightarrow{S'(r)=۰} \frac{۹}{۲} - (۴+\pi)r = ۰$

$\rightarrow r = \frac{۹}{۲(۴+\pi)}$

لذا :

شعاع نیم دایره $r = \frac{۹}{۲(۴+\pi)}$

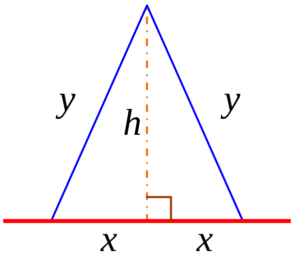
عرض پنجره $x = ۲r = ۲ \times \frac{۹}{۲(۴+\pi)} = \frac{۹}{۴+\pi}$

ارتفاع پنجره $h = \frac{۹}{۴} - r - \frac{۱}{۲}\pi r$

$h = \frac{۹}{۴} - \frac{۹}{۲(۴+\pi)} - \frac{۱}{۲}\pi(\frac{۹}{۲(۴+\pi)}) = \frac{۹}{۴} - \frac{۹}{۲(۴+\pi)} - \frac{۹\pi}{۴(۴+\pi)}$

مثال : می خواهیم کنار یک رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را نرده کشی کنیم. اگر تنها هزینه‌ی۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

حل : با توجه به شکل مقابل و نظر به اینکه محوطه کنار رودخانه ساخته می شود، پس :



$$y+y=۱۰۰ \to ۲y=۱۰۰ \to y=۵۰$$

$$x^۲+h^۲=y^۲ \xrightarrow{y=۵۰} x^۲+h^۲=۲۵۰۰$$

$$\to x^۲+h^۲=۲۵۰۰ \to h=\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}$$

$$S=\frac{۱}{۲}(۲x)h=x\sqrt{۲۵۰۰-x^۲} \qquad ; \qquad ۰<x<۵۰$$

$$S'=\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}+\frac{-۲x}{۲\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}}(x)=\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}-\frac{x^۲}{\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}}$$

$$\xrightarrow{S'=۰} \sqrt{۲۵۰۰-x^۲}-\frac{x^۲}{\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}}=۰ \to \sqrt{۲۵۰۰-x^۲}=\frac{x^۲}{\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}}$$

$$\to ۲۵۰۰-x^۲=x^۲ \to ۲x^۲=۲۵۰۰ \to x^۲=۱۲۵۰ \to x=۲۵\sqrt{۲}$$

$$S=x\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}=۲۵\sqrt{۲}\times\sqrt{۲۵۰۰-(۲۵\sqrt{۲})^۲}=۲۵\sqrt{۲}\times\sqrt{۲۵۰۰-۱۲۵۰}$$

$$\to S=۲۵\sqrt{۲}\times۲۵\sqrt{۲}=۱۲۵۰ \quad m^۲$$

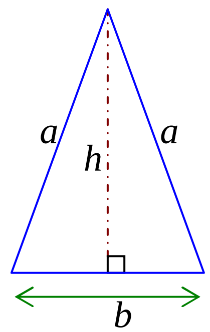
توجه داشته باشید که بدون استفاده از مشتق نیز می توان مسئله را حل کرد. به استدلال زیر دقت کنید.

مساحت این مثلث با توجه به اطلاعات داده شده برابر $S=\frac{۱}{۲}(۵۰)(۵۰)\times\sin\theta$ می باشد. بیشترین مساحت وقتی است که $\sin\theta=۱$ باشد. پس داریم :

$$Max(S)=\frac{۱}{۲}(۵۰)(۵۰)(۱)=۱۲۵۰$$

مثال : نشان دهید که در بین همه‌ی مثلث های متساوی الساقینی که محیط یکسانی دارند، مثلث متساوی الاضلاع دارای بیشترین مساحت است.

حل :



$$a^2 = h^2 + (\frac{b}{2})^2 \rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \quad (1)$$

$$P = a + a + b \rightarrow b = P - 2a \rightarrow b^2 = P^2 - 4Pa + 4a^2 \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}(P^2 - 4Pa + 4a^2)} \rightarrow h = \sqrt{Pa - \frac{1}{4}P^2}$$

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(P - 2a)\sqrt{Pa - \frac{1}{4}P^2} \rightarrow S(a) = \frac{1}{2}(P - 2a)\sqrt{Pa - \frac{1}{4}P^2}$$

$$S'(a) = (-1)\sqrt{Pa - \frac{1}{4}P^2} + \frac{1}{2}(P - 2a) \times \frac{P}{2\sqrt{Pa - \frac{1}{4}P^2}}$$

$$= \frac{-2Pa + \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}P^2 - Pa}{2\sqrt{Pa - \frac{1}{4}P^2}} = \frac{P^2 - 3Pa}{2\sqrt{Pa - \frac{1}{4}P^2}}$$

$$\xrightarrow{S'(a)=0} \frac{P^2 - 3Pa}{2\sqrt{Pa - \frac{1}{4}P^2}} = 0 \rightarrow P^2 - 3Pa = 0 \rightarrow P(P - 3a) = 0$$

$$\xrightarrow{P \neq 0} P = 3a \xrightarrow{P=2a+b} 2a + b = 3a \rightarrow b = a$$

یعنی مثلث متساوی الساقین است.

***

تمرین برای حل :

۱۸ : مجموع دو عدد مثبت برابر ۸ است. بزرگترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آنها را پیدا کنید.

۱۹ : اگر داشته باشیم $3x + 4y = 240$ ماگزیمم مقدار xy را بیابید.

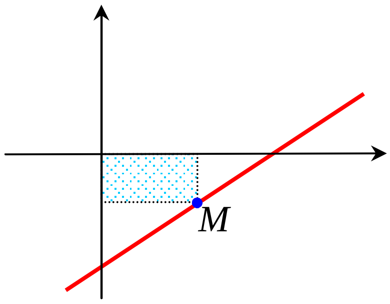
۲۰ : حاصل ضرب دو عدد مثبت ۲۴ است، کمترین مجموع این دو عدد را پیدا کنید.

۲۱ : دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضرب آنها کمترین مقدار ممکن گردد.

۲۲ : یک مقوای مستطیل شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب در باز ساخته می شود. اگر مساحت قاعده‌ی مکعب ۱۰۰ سانتی متر مربع و ارتفاع آن ۲ سانتی متر باشد. حجم این مکعب را طوری پیدا کنید که بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۲۳ : یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۲۴ : در شکل زیر یک مستطیل به محور های مختصات وخط $2y + x = 1$ محدود شده است، بیشترین مساحت مستطیل را به دست آورید.



***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان