ریاضی ۱

پایه ی دهم « رشته های علوم تجربی و ریاضی و فیزیک »

فصل ۶ : شمارش بدون شمردن (ترکیبیات)

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

مهر ۱۳۹۹

درس اوّل : شمارش

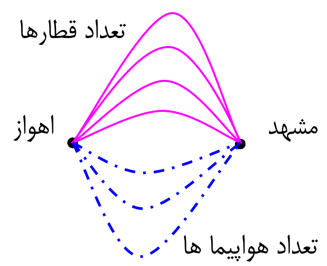
یکی از بحث های جالب ریاضیات، بحث ترکیبیات است. به کمک این بحث تعداد حالت های مختلف یک موضوع را بدون نوشتن آنها شمارش می کنیم. به همین جهت برخی، ترکیبیات را شمارش بدون شمردن نامیده اند. برای آشنایی دقیق با این مفهوم، شایسته است ابتدا اصل جمع و اصل ضرب را معرفی کنیم.

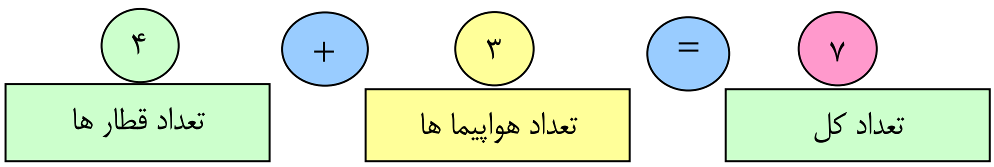
قسمت اوّل : اصل جمع و اصل ضرب

اصل جمع : اگر کاری را بتوان به دو روش مجزا انجام داد، طوری که در روش اوّل m انتخاب و در روش دوّم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m+n$ روش وجود دارد.

مثال : شخصی برای سفر از اهواز به مشهد در یک روز معین تابستان ، متوجه شد در این روز ۴ قطار متفاوت و ۳ پرواز متفاوت هواپیما برای عزیمت به مشهد وجود دارد. تعداد حالت هایی که این شخص می تواند انتخاب کند را حساب کنید.

حل :





تعمیم اصل جمع : اصل جمع برای تعداد محدودی روش مجزا انجام کار قابل تعمیم است.

مثال : شخصی برای سفر از اهواز به مشهد در یک روز معین تابستان ، متوجه شد در این روز ۴ قطار متفاوت و ۳ پرواز متفاوت هواپیما و ۲ اتوبوس متفاوت برای عزیمت به مشهد وجود دارد. تعداد حالت هایی که این شخص می تواند انتخاب کند را حساب کنید.

حل :

$$۴+۳+۲=۹$$

اصل ضرب : اگر کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله‌ی اوّل m انتخاب و برای انجام هر کدام از این m انتخاب، در مرحله‌ی دوّم n روش انجام وجود داشته باشد، در کل، کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

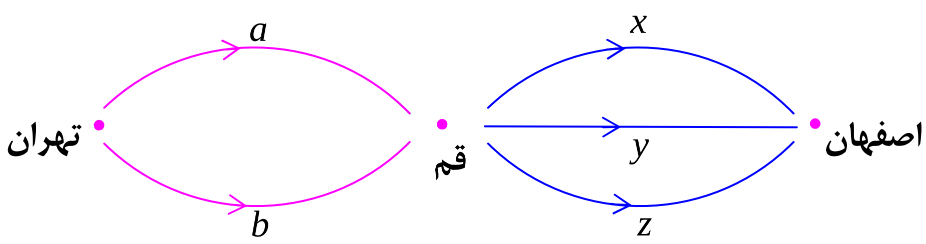
مثال : شخصی می خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد که از قم عبور کند. اگر از شهر تهران به قم ۲ مسیر (به نام های b و a) و از قم به اصفهان ۳ مسیر (به نام های z و y و x) وجود داشته باشد.

این شخص به چند طریق می تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟

حل : به کمک اصل ضرب می توان تعداد حالت های سفر از تهران به اصفهان را تعیین کرد.

۶	=	۳	×	۲
تعداد حالت های سفر از تهران به اصفهان		تعداد حالت های سفر از قم به اصفهان		تعداد حالت های سفر از تهران به قم

به نمودار زیر نیز توجه کنید که تعداد این مسیر ها را نشان می دهد.

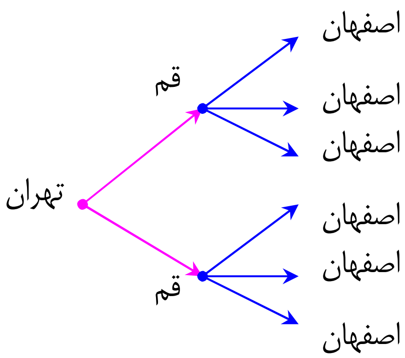


نام مسیر ها نیز بدین شکل است.

(a,x)	(a,y)	(a,z)
(b,x)	(b,y)	(b,z)

توجه: به کمک رسم نمودار زیر می توان این نتیجه را نیز تأیید کرد. چنین نموداری را **نمودار درختی** می نامند.

طبق نمودار فوق از تهران به اصفهان به شرط گذر از قم ۶ مسیر متفاوت وجود دارد.



تمرین ۱ : یک سکه و یک تاس را به هوا پرتاب می کنیم. تمام حالت های ممکن به زمین افتادن آنها را بنویسید. (از اصل ضرب و نمودار درختی کمک بگیرید.)

تمرین ۲ : با ارقام ۵ و ۷ چند عدد دو رقمی می توان نوشت؟ به طوری که تکرار ارقام مجاز نباشد.

تمرین ۳ : با ارقام ۵ و ۷ چند عدد دو رقمی می توان نوشت؟ به طوری که تکرار ارقام مجاز باشد.

تعمیم اصل ضرب : اصل ضرب برای تعداد محدودی مرحله برای انجام یک کار قابل تعمیم است.

مثال: شخصی ۲ کفش و ۳ شلوار و ۴ پیراهن متفاوت دارد ، حساب کنیدکه این شخص به چند حالت می تواند آنها را بپوشد.

حل :

۲۴	=	۴	×	۳	×	۲
		تعداد پیراهن		تعداد شلوار		تعداد کفش

تمرین ۴ : به کمک نمودار درختی نتیجه‌ی بدست آمده در مثال فوق را بررسی کنید.

تمرین ۵ : با ارقام ۵ و ۸ و ۷ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ به طوری که تکرار ارقام مجاز نباشد.

تمرین ۶ : با ارقام ۵ و ۸ و ۷ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ به طوری که تکرار ارقام مجاز باشد.

تمرین ۷ : با ارقام ۷ و ۸ و ۰ و ۹ و ۶ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

تمرین برای حل :

۸ : سه مهره (به نام های c و b و a) و دو تاس (به نام های y و x) در درون یک کیسه قرار دارند.

الف: شخصی می خواهد فقط یکی از اشیاء داخل کیسه را بردارد. تعیین کنید که به چند طریق این کار ممکن است؟

ب : شخصی می خواهد یک مهره و یک تاس بردارد، تعیین کنید که به چند حالت این کار ممکن است؟

۹ : با حروف کلمه‌ی« **خوزستان** » چند کلمه‌ی سه حرفی بدون تکرار حروف با معنی و بی معنی می توان نوشت؟

۱۰ : با حروف کلمه‌ی« **تهران**» چند کلمه‌ی سه حرفی بدون تکرار حروف با معنی و بی معنی می توان نوشت؟

۱۱ : یک برگ نظر خواهی مانند فرم زیر دارای ۵ سئوال چهار گزینه ای است. یک شخص نزد خود تصمیم گرفت که این فرم را به تصادف پاسخ دهد. حساب کنید که این شخص به چه تعداد حالت متفاوت می تواند پاسخ نامه را تکمیل نماید، به طوری که :

الف) تمام سئوالات پاسخ داده شوند.   ب) می توان به سئوالات نیز پاسخ نداد.

فرم نظر خواهی				
سئوال	گزینهA	گزینهB	گزینهC	گزینهD
۱				
۲				
۳				
۴				
۵				

❋❋❋

توجه : گاهی برای یک یا چند خانه (رقم یا حرف و به طور کلی اشیاء) شرطی قرار داده می شود. در حل چنین مسائلی ابتدا باید خانه های مشروط تکمیل شود.

تمرین ۱۲: با ارقام ۷ و ۸ و ۱ و ۹ و ۶ و ۴ چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

تمرین ۱۳: چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز و فرد، بزرگتر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟

حل : چون قرار است اعداد حاصل بزرگتر از ۳۰۰۰ باشند، پس رقم سمت چپ فقط می تواند ۹ یا ۷ یا ۵ یا ۳ باشد. لذا:

۴× ۴× ۳× ۲ = ۹۶
۱ ۱ ۱
۳
۵ ۵
۷ ۷ ۷
۹ ۹ ۹ ۹

تمرین۱۴ : به چند روش می توان با حروف کلمه‌ی« **سازندگی**» کلمه های ۴ حرفی ساخت (بدون توجه به معنی و بدون تکرار حروف) که حرف اوّل آنها نقطه دار نباشد.

حل : کافی است ، مدلی مانند مثال زیر تشکیل دهیم.

$۴\times ۶\times ۵\times ۴=۴۸۰$

س	ی	ی	ی
ا	ا	ا	ا
د	د	د	د
گ	گ	گ	گ
	ز	ز	
	ن		

توجه : حرف « ی » در اوّل کلمه، نقطه دار می شود.

تمرین۱۵ : مجموعه‌ی $S=\{a,b,c,d\}$ دارای چند زیر مجموعه است؟

نتیجه : تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر ۲^n است.

تمرین۱۶ : در هر مورد تعیین کنید که با حروف کلمه‌ی« **Computer** » چند کلمه‌ی ۸ حرفی با معنی و بی معنی بدون تکرار حروف می توان نوشت،

الف : به شرط اینکه حروف **u** و **p** کنار هم باشند.

ب : به شرط اینکه حروف **u** و**p** به شکل « **pu** » کنار هم باشند.

***

توجه : گاهی لازم می شود که دو اصل ضرب و جمع را به صورت ترکیبی استفاده کنیم. به مثال های زیر توجه کنید.

مثال : با ارقام ۷ و ۳ و ۰ و ۶

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

ج) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

د) چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

حل :

ج) $۲\times ۲\times ۲=۸$ ب) $۳\times ۳\times ۲=۱۸$ الف) $۳\times ۴\times ۴=۴۸$

با توجه به دو حالت اینکه ، اگر صفر یکان باشد یا اینکه صفر یکان نباشد. می توان نوشت:

د) $(۲\times ۲\times ۱)+(۳\times ۲\times ۱)=۴+۶=۱۰$

راه حل دوّم : با توجه به بند های ب و ج می توان نوشت.

$۱۸ - ۸ = ۱۰$

مثال : با ارقام ۷ و ۵ و ۸ چند عدد سه رقمی می توان نوشت. به طوری که حداقل یک رقم تکراری داشته باشند.

حل :

$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$ تعداد اعداد سه رقمی بدون تکرار

$۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷$ تعداد کل اعداد سه رقمی (دارای تکرار و بدون تکرار)

$۲۷ - ۶ = ۲۱$ تعداد اعداد سه رقمی که حداقل یک رقم تکراری داشته باشند.

مثال : رمزی از سه حرف تشکیل شده است. هرکدام از حروف مربوط به این رمز از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی می باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، حساب کنید که برای این رمز چند حالت وجود دارد؟

حل : مسئله دارای دو حالت است.

حالت اوّل : اوّلین حرف سمت چپ، فارسی باشد.

$۳۲ \times ۲۶ \times ۳۲ = ۲۶۶۲۴$

حالت دوّم : اوّلین حرف سمت چپ، انگلیسی باشد.

$۲۶ \times ۳۲ \times ۲۶ = ۲۱۶۳۲$

لذا تعداد کل حالت های ممکن (رمز ها)

$۲۶۶۲۴ + ۲۱۶۳۲ = ۴۸۲۵۶$

تمرین برای حل :

۱۷ : با ارقام ۷ و ۸ و ۰ و ۹ و ۶ و ۴ چند عدد چهار رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

۱۸: با ارقام ۷ و ۸ و ۵ و ۹ و ۶ و ۴ را در نظر بگیرید. حساب کنید که با ارقام متمایز

الف : چند عدد چهار رقمی می توان نوشت؟

ب : چند عدد چهار رقمی فرد می توان نوشت؟

ج : چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۵۰۰ می توان نوشت؟

د : چند عدد سه رقمی می توان نوشت که رقم یکان عدد فرد و دهگان مضرب ۳ باشد؟

۱۹ : با ارقام ۳ و ۵ و ۷ و ۸ چند عدد سه رقمی می توان نوشت، که حتماً رقم تکراری داشته باشد.

حل چند تمرین دیگر

۲۰ : تعداد حالت های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت های زیر به دست آورید.

الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که شامل یک عدد یا حرف فارسی است.

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است طوری که گزینه‌ی اوّل یک عدد و گزینه‌ی دوّم یک حرف الفبای فارسی است.

ج) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است طوری که یکی از گزینه ها یک عدد و گزینه‌ی دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

د) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عدد هستند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی می باشند.

هـ) این رمز از چهار گزینه تشکیل شده است که دو گزینه‌ی اوّل اعداد غیرتکراری و دو گزینه‌ی دوّم حروف انگلیسی غیر تکراری اند.

حل :

الف) رمز یکی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و .... یا یکی از ۳۲ حرف الفبای فارسی خواهد بود، بنابراین تعداد حالت ها می شود:

$$۳۲ + ۱۰ = ۴۲$$

ب) گزینه‌ی اوّل ۱۰ حالت و گزینه‌ی دوّم ۳۲ حالت می شوند و لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت ها برابر :

$$۱۰ \times ۳۲ = ۳۲۰$$

ب) گزینه‌ی اوّل ۱۰ حالت و گزینه‌ی دوّم ۳۲ حالت یا گزینه‌ی اوّل ۳۲ حالت و گزینه‌ی دوّم ۱۰ حالت می شوند و لذا تعداد کل حالت ها برابر : $(۱۰)\times(۳۲) + (۳۲)\times(۱۰) = ۳۲۰ + ۳۲۰ = ۶۴۰$

د) یا هر دو گزینه عدد ، یا اینکه هر دو حرف الفبای انگلیسی می باشند. پس:

$$(۱۰ \times ۱۰) + (۲۶ \times ۲۶) = ۱۰۰ + ۶۷۶ = ۷۷۶$$

هـ) دو گزینه‌ی اوّل اعداد غیرتکراری و دو گزینه‌ی دوّم حروف انگلیسی غیر تکراری

$$۱۰ \times ۹ \times ۲۶ \times ۲۵ = ۵۸۵۰۰$$

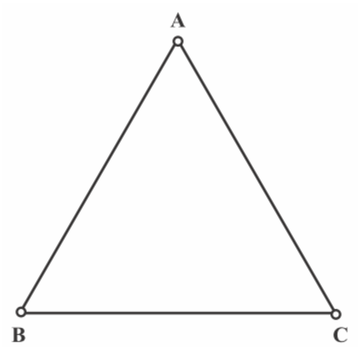
۲۱ : در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار ، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، را تعیین کنید.

حل :

حداقل $= ۵ \times ۸ \times ۱۰ \times ۲۰ = ۸۰۰۰$

حداکثر $= ۵ \times ۱۰ \times ۱۲ \times ۳۰ = ۱۸۰۰۰$

۲۲ : می خواهیم رأس های مثلث زیر را با سه رنگ قرمز و آبی و سبز رنگ کنیم.



الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که رأس هایی که با هم وصل اند، همرنگ نباشند.

حل :

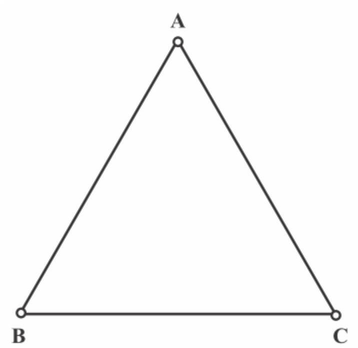
الف : هر رأس می تواند با یکی از سه حالت ، قرمز یا آبی یا سبز باشد. لذا هر رأس سه حالت دارد. پس طبق اصل ضرب داریم.

$$۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷$$

ب : رأس A سه حالت انتخاب رنگ دارد. رأس B دو حالت و لذا رأس C فقط یک حالت دارد. پس :

$$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

۲۳ : می خواهیم رأس های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.



الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که رأس هایی که با هم وصل اند، همرنگ نباشند.

حل :

الف : هر رأس می تواند با یکی از دو حالت ، قرمز یا آبی باشد. لذا هر رأس دو حالت دارد. پس طبق اصل ضرب داریم.

$$۲\times۲\times۲=۸$$

ب : با توجه به اینکه هر رأس به رأس دیگر وصل است، این خواسته غیر ممکن است و در نتیجه به هیچ طریق نمی توان این کار را انجام داد.

$$۲\times۱\times۰=۰$$

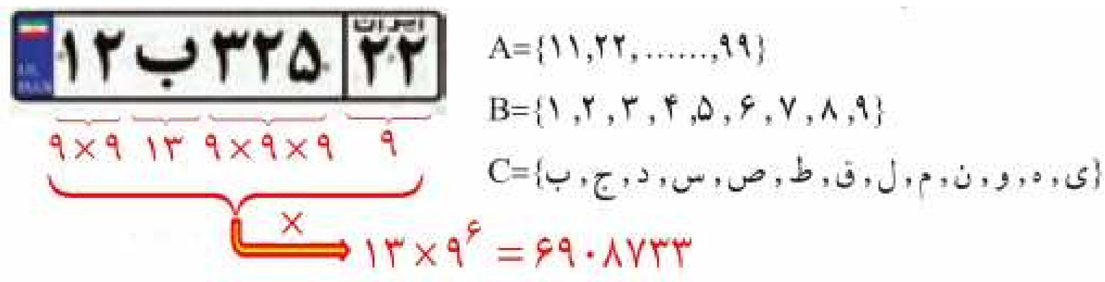
۲۴ : با پلاک هایی به صورت زیر عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعه‌ی A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه‌ی B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه‌ی C انتخاب شود، حساب کنید با شرایط چند ماشین را می توان شماره گذاری کرد؟

A={۱۱,۲۲, ...,۹۹}

B={۱ ,۲ ,۳ ,۴ ,۵ ,۶ ,۷ ,۸ ,۹}

C={ی, ه, و, ن, م, ل, ق, ط, ص, س, د, ج, ب}

حل :



۲۵ : در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل ، ۱۰ رنگ ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می شود؟

ج) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می شود.

حل :

الف :

$$\underset{\text{مدل}}{5} \times \underset{\text{رنگ}}{10} \times \underset{\text{حجم موتور}}{3} \times \underset{\text{دنده}}{2} = 300$$

ب :

$$\underset{\text{مدل}}{5} \times \underset{\text{رنگ}}{1} \times \underset{\text{حجم موتور}}{3} \times \underset{\text{دنده}}{2} = 30$$

ج :

$$\underset{\text{مدل}}{5} \times \underset{\text{رنگ}}{1} \times \underset{\text{حجم موتور}}{3} \times \underset{\text{دنده}}{1} = 15$$

۲۶ : یک آزمون چندگزینه ای شامل ۱۰ سئوال ۴ گزینه ای و ۵ سئوال ۲ گزینه ای (بله _ خیر) ، فردی قصد دارد به سؤال ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد، اگر:

الف) مجبور باشد، به همه‌ی سئوال ها پاسخ دهد.

ب) بتواند سئوال ها را بدون جواب هم بگذارد.

حل :

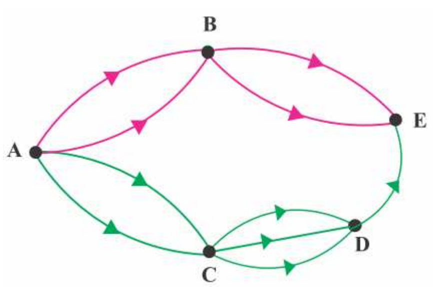
الف :

$$\underbrace{\overbrace{4\times4\times\cdots\times4}^{\text{۱۰ بار}}}_{\text{سوالات چهارگزینه ای}} \; \underbrace{\overbrace{2\times2\times\cdots\times2}^{\text{۵ بار}}}_{\text{سوالات دو گزینه ای}} \longrightarrow = 2^{25}$$

ب :

$$\underbrace{\overbrace{5\times5\times\cdots\times5}^{\text{۱۰ بار}}}_{\text{سوالات چهارگزینه ای}} \; \underbrace{\overbrace{3\times3\times\cdots\times3}^{\text{۵ بار}}}_{\text{سوالات دو گزینه ای}} \longrightarrow = 5^{10}\times3^{5}$$

۲۷ : اگر شکل مقابل نشان دهنده‌ی جاده های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه‌ی جاده ها یک



طرفه باشند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر E رفت؟

حل :

ABE تعداد مسیرهای $=۲\times۲=۴$

$ACDE$ تعداد مسیرهای $=۲\times۳\times۱=۶$

تعداد کل مسیرها $=۴+۶=۱۰$

۲۸ : مسئله‌ی زیر را به گونه ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.

مسئله : چند عدد دو رقمی می توان نوشت، به طوری که .... ؟

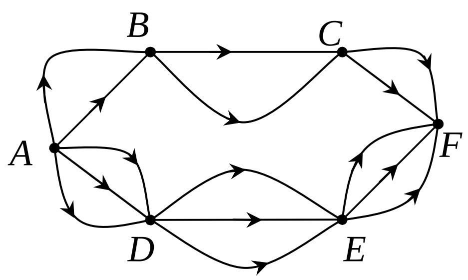
جواب : تعداد راه های نوشتن یکان برابر ۵ تا است و تعداد راه های نوشتن دهگان برابر ۴ تا است. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد شرایط مورد نظر وجود دارد.

حل : رقم یکان فرد و رقم دهگان عددی اوّل باشد.

۲۹ : مسئله ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هر دوی آنها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد.

$$۲\times۲\times۲+۳\times۳\times۳=۳۵$$

حل : اگر شکل مقابل نشان دهنده‌ی جاده های بین شهر های A و B و C و D و E و F باشد و همه‌ی جاده ها یک طرفه فرض شوند. در این صورت مسئله به صورت زیر طرح می شود.



به چند طریق می توان از شهر A به شهر F رفت؟

۳۰ : با حروف کلمه‌ی « **گل پیرا** » و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می توان نوشت که با « گل» شروع می شوند؟

حل :

الف:

$۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷۲۰$

ب: طبق مسئله « گل» را با هم در نظر می گیریم.

$۱\times۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

۳۱ : با حروف کلمه‌ی « **گل پیرا** » و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف « پ » و « ر» کنار هم آمده باشند؟

ج) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف « پ » و « ر» کنار نباشند؟

حل :

الف:

$۶\times۵\times۴\times۳=۳۶۰$

ب: طبق مسئله دو حرف « پ» و « ر» باید باشند و کنار هم. برای حل مسئله در ابتدا حروف « پ» و « ر» را با هم و به شکل « پر» در نظر می گیریم در این صورت

ی گ ل ا «پ ر»

اگر « پر » اوّل باشند. تعداد حالت ها می شود. پ ، ر ، .... ، ....

$۱\times۴\times۳=۱۲$

اگر « پر » وسط باشند. تعداد حالت ها می شود. .... ، پ ، ر، ....

$۴\times۱\times۳=۱۲$

اگر « پر » آخر باشند. تعداد حالت ها می شود. ..... ، .... ، پ ، ر

$۴\times۳\times۱=۱۲$

لذا تعداد حالت ها در این مورد می شود.

$۱۲+۱۲+۱۲=۳\times۱۲=۳۶$

ولی اگر حروف « پ» و « ر» را با هم و به شکل « رپ» در نظر می گیریم. باز ۳۶ حالت داریم. لذا در کـل تعداد حالت های می شود؟

$۳۶+۳۶=۲\times۳۶=۷۲$

روش دوّم

$(۲\times۱)\times(۴\times۳\times۱)\times۳=۷۲$

ج)

$۳۶۰-۷۲=۲۸۸$

۳۲ : با حروف کلمه‌ی « **گل پیرا** » و بدون تکرار حروف

الف : چند کلمه‌ی ۵ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه‌ی « پیرا » کنار هم آمده باشند؟

ب : چند کلمه‌ی ۶ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه‌ی « پیرا » کنار هم آمده باشند؟

حل :

الف : در این حالت ابتدا فرض می کنیم که « **گ** » و « **پیرا** » انتخاب شوند. پس

$$۱\times(۴\times۳\times۲\times۱)+(۴\times۳\times۲\times۱)\times۱=۲۴+۲۴=۴۸$$

و اگر « **ل** » و « **پیرا** » انتخاب شوند. باز داریم

$$۱\times(۴\times۳\times۲\times۱)+(۴\times۳\times۲\times۱)\times۱=۲۴+۲۴=۴۸$$

لذا در کل $۴۸+۴۸=۲\times۴۸=۹۶$ حالت می شوند.

روش دوّم :

$$(۱)\times(۴\times۳\times۲\times۱)\times۲\times۲=۹۶$$

ب: جابجایی کُلی « **گ** یا **ل** » و « **پیرا** »

$$(۲\times۱)\times(۴\times۳\times۲\times۱)\times۳=۱۴۴$$

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

درس دوّم : جایگشت

در ادامه‌ی این فصل ابتدا مفهوم جایگشت و سپس نحوه‌ی محاسبه‌ی تعداد جایشگت های اشیاء مختلف را بیان می کنیم.

قسمت اوّل : جایگشت

اگر چند شیءِ متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدنِ آنها کنار هم ، یک جایگشت از آن اشیاء می گوییم.

مثال : سه فیش و سه درگاه مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به هم می شوند. اگر فیش ها را a و b و c می نامیم. حالت های مختلف قرار دادن آنها در درگاه ها را ، در جدول زیر تنظیم کنید و سپس تعداد حالت ها را بنویسید.

a	b	c
a	c	b

تمرین ۱ : تعداد حالت های صف گرفتن چهار دانش آموز را بنویسید.

***

قسمت دوّم : معرفی نماد فاکتوریل

فرض‌کنید که n یک عدد صحیح نامنفی باشد. فاکتوریل n که با نماد $n!$ نمایش داده می شود، به شکل زیر تعریف می شود.

اگر $n=۰$ باشد. در این صورت $۰!=۱$

اگر $n=۱$ باشد. در این صورت $۱!=۱$

اگر $n>۱$ باشد. در این صورت $n!$ برابر حاصل ضرب تمام اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی آن است. یعنی

$$n!=۱\times۲\times۳\times...\times n$$

مثال :

الف) $۴!=۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$ ب) $۶!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶=۷۲۰$

تمرین ۲ : تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $۵!=$ ب) $۴!-۳!+۲!+۱!+۰!=$

تمرین ۳ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{۵!+۳!}{۹}=$ ب) $(۳!)!=$ ج) $\frac{۶!-۴!}{۴(۴!)+۵(۵!)}=$

تمرین ۴ : عبارت های زیر را با نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=$

ب) $۸\times۷\times۶\times۵=$

ج) $۵\times۲۴=$

نتیجه : با توجه به مفهوم فاکتوریل یک عدد طبیعی می توان نوشت که:

$$n!=n(n-۱)!$$

برای مثال : $۶!=۶\times۵!$

تمرین ۵ : کسر های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{۹!}{۷!}$ ب) $\frac{(n+۱)!}{n!}$ ج) $\frac{k!}{(k-۳)!}$ د) $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}$

نتیجه : تعداد جایگشت های n شیء (نفر) متمایز برابر $n!$ است.

تمرین ۶ : با حروف کلمه‌ی «Computer» چند کلمه‌ی ۸ حرفی با معنی و بی معنی بدون تکرار حروف می توان نوشت؟

تمرین ۷ : چند عدد شش رقمی بدون تکرار ارقام با اعداد ۱ تا ۶ می توان نوشت که در آنها ارقام ۲ و ۳ کنار هم نباشند؟

۱) ۳۴۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۷۲۰

حل :

$6! = 720$ تعداد کل حالات

$2 \times 5! = 240$ تعداد حالاتی که ارقام ۲ و ۳ کنار هم باشند.

$720 - 240 = 480$ تعداد حالاتی که ارقام ۲ و ۳ کنار هم نباشند.

تمرین۸ : با حروف کلمه‌ی « **جهانگردی**» و بدون تکرار حروف :

الف : چند کلمه‌ی ۸ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها به « ی» ختم می شود؟

ب : چند کلمه‌ی ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف « د » و « ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

پ: چند کلمه‌ی ۶ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها به « گردی» ختم می شوند؟

ت : چند کلمه‌ی ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه‌ی « جهان » چهار حرف اوّل باشند؟

ث : چند کلمه‌ی ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه‌ی « جهان » کنار هم باشند؟

ج: چند کلمه‌ی ۸ حرفی می توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

حل :

الف :

$8!$ = تعداد کل کلمات

$7!$ = تعداد کلماتی که به « ی» ختم می شوند.

ب :

$2 \times 7!$

پ:

$\frac{8!}{2!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$ تعداد کل کلمات ۶ حرفی

$12 = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3$ تعداد کل کلماتی که به « گردی» ختم می شوند؟

ت :

$4! \times 4!$

ث :

$4! \times 5!$

ج:

$3 \times 7!$

***

تمرین برای حل :

۹ : با پنج حرف الفبای متمایز چند کلمه‌ی (با معنی و بی معنی) بدون تکرار حروف می توان نوشت؟

۱۰ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{۱۰!}{۹!}$

ب) $\frac{۸!}{۶!}$

ج) $\frac{n!}{(n-۲)!}$

۱۱ : عبارت های زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) ۸×۹

ب) ۵

ج) $n(n-۱)!$

د) $n(n-۱)(n-۲)(n-۳)$

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان

درس سوّم : ترکیب و ترتیب

در این درس روش های تعیین تعداد جایگشت های اشیاء متمایز بدون تکرار اشیاء ولی در حالت های مهم بودن یا نبودن ترتیب آنها معرفی می کنیم.

ترتیب و ترکیب

در انتخاب k شییء از n شییء بدون تکرار اشیاء دو حالت وجود دارد.

الف : اگر اولویت (تقدم و تأخر) اشیاء مهم باشد. این نوع انتخاب را **ترتیب** می نامند و تعداد حالت های آن را به شکل زیر به دست می آورند.

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال : تعداد کلمات سه حرفی که با ۷ حرف کلمه‌ی« خوزستان» تشکیل می شوند، برابر است با:

$$P(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!}=۲۱۰$$

در این مثال تقدم و تأخر اشیاء (حروف) مهم است.برای مثال کلمات« ستا » با « تاس» تفاوت دارند. به همین دلیل از ترتیب استفاده شد.

ب : اگر اولویت (تقدم و تأخر) اشیاء مهم نباشد. این نوع انتخاب را **ترکیب** می نامند و تعداد حالت های آن را به شکل زیر به دست می آورند.

$$C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال : تعداد زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه‌ی۷ عضوی $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ ، برابر است با:

$$C(۷,۳)=\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۳!\,(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۳!\times۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۳\times۲\times۱\times۴!}=۳۵$$

در این مثال تقدم و تأخر اشیاء (عضوها) مهم نیست.برای مثال زیر مجموعه های« $\{a,b,c\}$» با « $\{b,a,c\}$ » تفاوت ندارد. به همین دلیل از ترکیب استفاده شد.

تمرین ۱ : با ارقام عدد ۵۶۸۷۴ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

تمرین۲ : از میان شش کتاب مختلف

الف : به چند طریق می توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب : به چند طریق می توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

حل :

الف:

$$P(۶,۴)=\frac{۶!}{(۶-۴)!}=\frac{۶!}{۲!}=۳۶۰$$

ب:

$$\binom{۶}{۴}=\frac{۶!}{۴!(۶-۴)!}=۱۵$$

تمرین۳ : هفت نقطه روی دایره‌ای قرار دارند. حساب کنید که با این هفت نقطه

الف) چند پاره خط ایجاد می شود.

ب) چند بردار ایجاد می شود.

ج) چند مثلث تشکیل می شود.

تمرین۴ : بر روی یک دایره ۸ نقطه‌ی متمایز وجود دارد. تعداد چهارضلعی های محدب که هر رأس یک چهارضلعی واقع بر نقاط مفروض باشد، را به دست آورید.

حل :

$$\binom{۸}{۴}=\frac{۸!}{۴!\times ۴!}=۷۰$$

تمرین۵ : تعداد قطر های یک ۱۲ ضلعی محدب را محاسبه کنید.

حل : اگر از تعداد حالات انتخاب۲ نقطه از کل نقاط تعداد اضلاع را کم کنیم. تعداد قطرها به دست می آید.

$$\binom{n}{۲}-n=\binom{۱۲}{۲}-۱۲=۶۶-۱۲=۵۴$$

تمرین۶ : تعداد قطر های یک ۸ ضلعی محدب را تعیین کنید.

تمرین۷ : ثابت کنید که هر n ضلعی محدب دارای $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ قطر است.

تمرین۸ : در یک اداره ۱۲ نفر مشغول به کار هستند. می خواهیم از بین آنها :

الف) ۳ نفر انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است.

ب) یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است.(هر نفر یک پست داشته باشد.)

حل :

الف)

$$\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲!}{۳!\,(۱۲-۳)!}=\frac{۱۲!}{۳!\times ۹!}=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰\times ۹!}{۳\times ۲\times ۱\times ۹!}=۲۲۰$$

ب)

$$P(۱۲,۳)=\frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!}=\frac{۱۲!}{۹!}=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰\times ۹!}{۹!}=۱۳۲۰$$

تمرین۹ : درون قفسه‌ی یک کتابخانه یک کتاب درسی ، یک کتاب علمی و یک کتاب داستان گذاشته شده است. اگر از بین ۷ نفر ۳ نفر به طرف قفسه رفته و هرکدام یک کتاب بردارند. به چند روش ممکن است کتاب ها توزیع شده باشند؟

حل :

تعداد انتخاب ۳ نفر از بین هفت نفر $P(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=۲۱۰$

تمرین۱۰ : راه های مختلفی که می توان از بین ۱۰ سئوال متفاوت به ۷ سئوال پاسخ داد، مساوی با فاکتوریل چه عددی است؟

حل :

$$\binom{۱۰}{۷}=\frac{۱۰!}{۷!(۱۰-۷)!}=\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷!}{۷!\times ۳\times ۲\times ۱}=۱۰\times ۳\times ۴=۲\times ۳\times ۴\times ۵=۵!$$

تمرین ۱۱ : هفت نقطه‌ی A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

حل :

$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۳!\times ۴!}=۳۵$$

تمرین ۱۲ : با حروف کلمه‌ی « **گل پیرا** » و بدون تکرار حروف چند کلمه‌ی ۶ حرفی می توان نوشت؟

حل :

$$P(۶,۴)=\frac{۶!}{۲!}=۶\times ۵\times ۴\times ۳=۳۶۰$$

تمرین ۱۳ : در یک پرواز داخلی ۴ جای خالی در هواپیما وجود دارد و ۹ نفر در فهرست انتظار قرار دارند. بـه چند طریق می توان از بین آنان ۴ نفر را سوار کرد؟

حل :

$$C(۹,۴)=\frac{۹!}{۴!(۹-۴)!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶\times ۵!}{۴\times ۳\times ۲\times ۱\times ۵!}=۱۲۶$$

تمرین ۱۴ : حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\binom{۱۲}{۷}-\binom{۱۲}{۵}=$

ب) $\dfrac{\binom{۹}{۳}+\binom{۶}{۲}}{\binom{۶}{۴}+\binom{۹}{۶}}=$

ج) $\dfrac{P(n,n-۱)}{n!}=$

تمرین ۱۵ : به چند طریق می توانیم از بین ۵ مهره آبی و ۴ مهره سبز ، ۳ مهره انتخاب کنیم. به طوری که

الف) رنگ مهره ها مهم نباشد.

ب) هر سه مهره آبی باشند.

ج) هر سه مهره سبز باشند.

د) دو مهر آبی و یکی سبز باشد.

هـ) هر سه مهره هم رنگ باشند.

تمرین ۱۶ : به چند طریق می توان از بین ۸ دانش آموز پایه‌ی دهم ، ۷ دانش آموز از پایـه‌ی یـازدهم و ۵ دانش آموز از پایه‌ی دوازدهم به تعداد ۶ دانش آموز جهت مسابقات ورزشی انتخاب کرد به طوری که :

الف) پایه‌ی دانش آموزان مهم نباشد.

ب) ۳ دانش آموز دهم و ۱دانش آموز یازدهم و بقیه دوازدهم باشند.

ج) هر۶ دانش آموز همکلاس باشند[1].

تمرین۱۷ : در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و۴ مهره سیاه و۳ مهره قرمز وجود دارد. به چند طریق مـی تـوان از این کیسه ۳ مهره انتخاب کرد که حداقل ۲ مهره سیاه باشند؟

حل :

$$\binom{۴}{۲}\binom{۸}{۱}+\binom{۴}{۳}\binom{۸}{۰}=۶\times۸+۴\times۱=۵۲$$

تمرین۱۸ : به چند طریق می توان از بین ۵ مرد و ۴ زن ، شش نفر انتخاب کرد به طوری که حـداقل سـه زن انتخاب شوند؟

حل :

$$\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۴}\binom{۵}{۲}=۴\times۱۰+۱\times۱۰=۴۰+۱۰=۵۰$$

توجه : تعداد زیر مجموعه های k عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ است.

تمرین۱۹ : تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی از یک مجموعه‌ی ۷ عضوی را به دست آورید.

تمرین۲۰ : تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی یک مجموعه، برابر ۲۱ است. این مجموعه چند عضو دارد؟

تمرین۲۱ : یک مجموعه‌ی n عضوی ، ۵۵ زیر مجموعه‌ی $n-۲$ عضوی دارد. عدد n را بیابید.

حل :

$$\binom{n}{n-۲}=۵۵\rightarrow\frac{n!}{(n-۲)!\times(n-(n-۲))!}=۵۵\rightarrow\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!\times۲!}=۵۵$$

$$\rightarrow n(n-۱)=۱۱۰\rightarrow n=۱۱$$

تمرین۲۲: تعداد زیر مجموعه های سه عضوی از مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f\}$ شـامل عـضو a را بـه دست آورید؟

---

1. توجه کنید که تعداد انتخاب $\binom{n}{k}$ اگر $k>n$ باشد، برابر صفر می باشند.

حل : کافی است ، تعداد زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه‌ی $\{b,c,d,e,f\}$ را به دست آوریم.

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۲!\times ۳!}=\frac{۵\times ۴}{۲}=۱۰$$

توجه : به هرکدام از زیر مجموعه های دوعضوی مجموعه‌ی $\{b,c,d,e,f\}$ اگر عضو a را اضافه کنیم، یک زیر مجموعه از زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه‌ی $\{a,b,c,d,e,f\}$ شامل a به دست می آید.

نتیجه : به کمک تعیین تعداد زیر مجموعه‌ی یک مجموعه‌ی n عضوی نتیجه می شود که :

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۳}+\ldots+\binom{n}{n}=۲^{n}$$

تمرین۲۳ : با حروف کلمه‌ی $Computer$ چند کلمه‌ی ۵ حرفی می توان نوشت که در آن حروف p و u کنار هم قرار داشته باشند؟

حل : ابتدا باید ۳ حرف دیگر غیر از حروف p و u را از بین ۶ حرف باقی مانده انتخاب کنیم. سپس با شرط گفته شده در کنار هم بچینیم. اگر بخواهیم p و u در کنار هم باشند. لازم است p و u را یک حرف در نظر بگیریم (به چسبیده) در این صورت:

تعداد حالت های انتخاب ۳ حرف از ۶ حرف (غیر از p و u) $=\binom{۶}{۳}=۲۰$

تعداد جایگشت های ۵ حرف که p و u کنار هم در نظر گرفته شده اند. $=۴!=۲۴$

تعداد جایگشت های p و u با هم $=۲$

و طبق اصل ضرب داریم:

$$۲۰\times ۲۴\times ۲=۹۶۰$$

***

چند تساوی مهم

نکته ۱ : برخی از حالت های خاص ترتیب بصورت زیر می باشند.

۱) $P(n,0)=1$

۲) $P(n,n)=n!$

۳) $P(n,1)=n$

۴) $P(n,n-1)=n!$

۵) $P(n,2)=n(n-1)$

۶) $P(n,n-2)=\frac{n!}{2}$

نکته ۲ : برخی از حالت های خاص ترکیب بصورت زیر می باشند.

۱) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

۲) $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

۳) $\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}$

۴) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

۵) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$ اتحاد پاسکال

۶) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$

۷) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{n}=0$

۸) $P(n,r)=C(n,r).r!$

توجه کنید که تمام تساوی های فوق به کمک مفهوم ترتیب یا ترکیب قابل اثبات هستند. برای مثال

$$P(n,n-1)=\frac{n!}{(n-(n-1))!}=\frac{n!}{(n-n+1)!}=\frac{n!}{1!}=\frac{n!}{1}=n!$$

$$\binom{n}{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!}=\frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!}=\frac{n(n-1)!}{(n-1)!(1)!}=\frac{n}{1}=n$$

تمرین ۲۴ : هر یک از تساوی های فوق را ثابت کنید.

تمرین ۲۵ : از رابطهی $C(n,n-2)=120$ ، عدد n را تعیین کنید.

حل :

$$C(n,n-2)=120 \rightarrow \frac{n(n-1)}{2}=120 \rightarrow n(n-1)=240 \rightarrow n=16$$

تمرین ۲۶ : اگر $C(n,4)=P(n-1,3)$ ، عدد n را بیابید.

حل :

$$C(n,۴)=P(n-۱,۳)$$

$$\rightarrow \frac{n!}{۴!(n-۴)!}=\frac{(n-۱)!}{(n-۱-۳)!}\rightarrow \frac{n(n-۱)!}{۴!(n-۴)!}=\frac{(n-۱)!}{(n-۴)!}\rightarrow \frac{n}{۴!}=۱\rightarrow n=۴!=۲۴$$

تمرین۲۷ : دو خط موازی داده شده است و روی هر کدام از این دو خط ۵ نقطه قرار دارد. چند مثلث با این نقاط می توان ساخت؟

حل : باید یکی از دو خط را انتخاب کنیم. سپس از آن خط دو نقطه و از خط دیگر یک نقطه بر داریم.

$$\binom{۵}{۱}\times\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۲}\times\binom{۵}{۱}=۵۰+۵۰=۱۰۰$$

تمرین۲۸ : از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیته‌ی دو نفره انتخاب شود، به گونه ای که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. تعداد حالت های انجام این کار را به دست آورید.

حل:

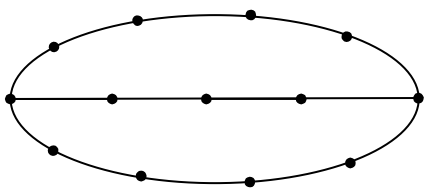
$$\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۰}+\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۰}\times\binom{۲}{۱}+\binom{۲}{۰}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}=۴+۴+۴=۳\times۴=۱۲$$

تمرین۲۹ : معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\binom{n}{۱}=۵n-۸$ ب) $P(n,۵)=P(n,n-۱)$

ج) $P(۵,۲)=۲n+C(۵,۲)$ د) $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۳}+\dots+\binom{n}{۵}=۳۲$

تمرین۳۰ : به کمک نقاط موجود در شکل زیر و از به هم وصل کردن آنها چند مثلث ایجاد می شود.



حل : تعداد کل حالت هایی که می توان با ۱۳ نقطه، مثلث ایجاد کرد برابر $\binom{۱۳}{۳}$ می باشد. امّا باید توجه داشت که از این ۱۳ نقطه ۵ نقطه روی خط راست قرار دارند و با این ۵ نقطه مثلث تشکیل نمی شود، لذا باید $\binom{۵}{۳}$ را از حاصل کم کرد.

$$\binom{۱۳}{۳}-\binom{۵}{۳}=۲۸۶-۱۰=۲۷۶$$ تعداد مثلث های حاصل

تمرین ۳۱ : در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم های اوّل تا سوّم به چند حالت مختلف می توانند مشخص شوند؟

حل :

$$P(۱۸,۳)=\frac{۱۸!}{(۱۸-۳)!}=\frac{۱۸!}{۱۵!}=\frac{۱۸\times۱۷\times۱۶\times۱۵!}{۱۵!}=۴۸۹۶$$

تمرین ۳۲ : از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه ای بچینیم. اگر تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چند تا است؟

حل:

$$P(n,۳)=۲۱۰\rightarrow\frac{n!}{(n-۳)!}=۲۱۰\rightarrow n(n-۱)(n-۲)=۲۱۰\rightarrow n=۷$$

تمرین ۳۳ : در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد (در بدترین حالت) و در چه زمانی می تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

حل :

$$۲\times P(۲۰,۳)=۲\times\frac{۲۰!}{۱۷!}=۲\times۶۸۴۰=۱۳۶۸۰$$ ثانیه

تمرین۳۴ : یک فروشنده‌ی تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه‌ی کدو، تخمه‌ی ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. تعیین کنید که او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می تواند درست کند؟

حل :

$$\binom{۷}{۵}+\binom{۷}{۶}+\binom{۷}{۷}=۲۱+۷+۱=۲۹$$

تمرین ۳۵ : یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می تواند انتخاب شود؟ هرگاه الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند.

ب) رئیس و دقیقاً معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند.

ج) رئیس و دقیقاً معاون و یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند.

حل :

الف)

$$\binom{۱}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۱۴}{۳}=۱\times۳\times۳۶۴=۱۰۹۲$$

ب)

$$\binom{۱}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۱۱}{۲}=۱\times۳\times۳\times۵۵=۴۹۵$$

ج)

$$\binom{۱}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۹}{۱}=۱\times۳\times۳\times۲\times۹=۱۶۲$$

تمرین۳۶ : در یک کلاس تعدادی از دانش آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلّم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

حل : فرض کنیم تعداد داوطلبان n نفر باشند. بنابراین.

$$\binom{n}{۲}=۲۸ \rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲}=۲۸ \rightarrow n(n-۱)=۵۶ \rightarrow n(n-۱)=۸\times۷ \rightarrow n=۸$$

تمرین۳۷ : یک گل فروش در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می دهد. او چند دسته گل مختلف می تواند درست کند؟

حل :

$$\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۴}+\binom{۱۰}{۵}=۱۲۰+۲۱۰+۲۵۲=۵۸۲$$

تمرین۳۸ : یک نقّاش قوطی هایی از ۴ رنگ قرمز ، آبی ، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می تواند داشته باشد؟

چرا با اینکه درکارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می شود، امّا تعداد رنگ های حاصل بیشتر از جواب شما است؟

حل :

$$\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}=۶+۴+۱=۱۱$$

چون ممکن است میزان ترکیب رنگ ها یکسان نباشد. به طور مثال یک بار ۵۰ درصد از یک رنگ و ۵۰ درصد از رنگ دیگر استفاده شود و بار دیگر ۶۰ درصد از یک رنگ و ۴۰ درصد از رنگ دیگر استفاده شود و در این دو حالت دو رنگ متفاوت به دست آید.

تمرین۴۰ : یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند؟ هرگاه

الف): هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد.

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی توانند استفاده شوند.

ج) سه نوع ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند.

د) ادویه ها به ۲ دسته‌ی ۵ تایی تقسیم می شوند که هیچ یک از ادویه های دسته‌ی اوّل با هیچ یک از ادویه های دسته‌ی دوّم سازگاری ندارند.

حل :

الف)

$$\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$$

ب) اگر این دو ادویه استفاده شوند، ادویه‌ی سوم از ۸ ادویه ی باقی مانده انتخاب خواهد شد و در نتیجه:

تعداد حالات وجود دو ادویه با هم $=\binom{۸}{۱}$

= تعداد کل حالاتی که دو ادویه‌ی خاص با هم استفاده نشوند.

تعداد حالاتی که دو ادویه‌ی خاص با هم استفاده می شوند − تعداد کل حالات

$$=\binom{۱۰}{۳}-\binom{۸}{۱}=۱۲۰-۸=۱۱۲$$

ج)

= تعداد کل حالاتی که هر سه ادویه‌ی خاص با هم استفاده نشوند.

تعداد حالاتی که هر سه ادویه‌ی خاص با هم استفاده می شوند − تعداد کل حالات

$$=\binom{۱۰}{۳}-\binom{۳}{۳}=۱۲۰-۱=۱۱۹$$

د) هر سه ادویه باید از دسته‌ی اوّل انتخاب شده یا هر سه ادویه از دسته‌ی دوّم انتخاب شوند. بنابراین :

$$\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۳}=۱۰+۱۰=۲۰$$

تمرین ۴۱ : در هر مورد، مسئله ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با :

الف) $\binom{۵}{۳}\times\binom{۶}{۲}$ ب) $\binom{۵}{۳}+\binom{۶}{۲}$

حل :

الف) به چند طریق می توان از بین ۵ مرد و ۶ زن ، پنج نفر انتخاب کرد به طوری که در این انتخاب ۲ زن و ۳ مرد وجود داشته باشد؟

ب) واضح است که

$$\binom{۵}{۳}+\binom{۶}{۲}=\binom{۵}{۲}+\binom{۶}{۲}$$

لذا مسئله را به صورت زیر طراحی می کنیم.

از بین۵ مهره قرمز و۶ مهره آبی، دو مهره استخراج می کنیم. تعداد حالت هایی را تعیین کنید که این دو مهره همرنگ باشند.

تمرین برای حل :

۴۲ : با حروف کلمه ی « گل بهار» چند کلمه ی ۴ حرفی می توان ساخت به طوری که:

الف) با حرف « گ» شروع و به حرف « ب» ختم شوند.

ب) در این کلمات حروف « ب» و «ه» موجود و در کنار هم باشند.

ج) در این کلمات حروف « ب» و «ه» و « ا» موجود و در کنار هم باشند.

۴۳ : از بین ۴ زن و ۳ مرد به چند حالت می توان یک گروه ۳ نفری انتخاب کرد که :

الف) ۲ مرد و یک زن باشد.　　　　ب) همگی زن باشند.

ج) نفر اوّل رئیس و نفر دوّم معاون و نفر سوّم خدمت کار باشند.

۴۴ : از بین ۵ نفر به چند حالت می توان

الف : یک نفر رئیس و یک نفر معاون انتخاب کرد.　　　　ب : دو نفر جهت شرکت در اردو انتخاب کرد.

۴۵ : با ارقام ۲ و ۳ و ۵ و ۶ و ۰ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان ساخت به طوری که :

الف) اعداد سه رقمی همگی فرد باشند.

ب) همگی با ۲ شروع شوند.

ج) دو عدد ۲ و ۳ همواره در کنار هم باشند.

د) دو رقم ۲ و ۳ به شکل «۲۳» کنار هم باشند.

۴۶ : به چند طریق می توان کمیته‌ای۳ نفره از بین۷ دانش آموز رشته‌ی ریاضی و۵ دانش آموز رشته‌ی تجربی انتخاب کرد؟

۴۷ : از میان ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان قرار است کمیته ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می تواند انتخاب شود؟ هرگاه

الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟

ج) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی دان در آن باشد؟

۴۸ : معادله های زیر را حل کنید.

الف) $n!=۲۰(n-۲)!$

ب) $P(n,۳)=۱۲C(n,۲)$

ج) $P(n,۲)+۹=C(۶,۴)$

۴۹ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $P(n,r)=nP(n-۱,r-۱)$

ب) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-۱}=\binom{n+۱}{k}$

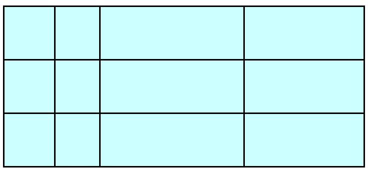
۵۰ : از بین پنج گل آبی و سه گل سفید به چند طریق می توان سه گل انتخاب کرد که هر سه گل همرنگ باشند.

۵۱ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

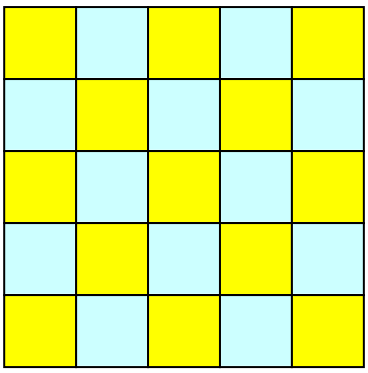
الف) $\binom{۵}{۰}+\binom{۵}{۱}+\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۴}=$

ب) $\binom{۸}{۵}-\binom{۸}{۳}=$

۵۲ : در شکل روبرو چند مستطیل وجود دارد؟



۵۳ : با توجه به شکل مقابل به سئوالات زیر پاسخ دهید.



الف : چند مربع وجود دارد؟

ب : چند مستطیل وجود دارد؟

ج : چند مستطیل وجود دارد که مربع نباشند؟

نتیجه :

الف : در یک مربع به ضلع $n \times n$ ، تعداد کل مربع های موجود از رابطه‌ی زیر بدست می آید.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ب : در یک مستطیل به ابعاد $m \times n$ ، تعداد مستطیل های موجود برابر $\binom{n+1}{2} \times \binom{m+1}{2}$ است.

در این محاسبه مربع ها هم به عنوان مستطیل در نظر گرفته شده اند.

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه

استان خوزستان